bolisches Conoid, so erhält man, wegen $y^2 = px$ (Gleich. der Parabel $AN'$, die Abscissen vom Scheitel $A$ gezählt):

$$V = \pi\int_0^x px\,dx = \pi p\,\frac{x^2}{2} \quad \text{und} \quad VX = \pi\int_0^x px^2\,dx = \pi p\,\frac{x^3}{3},$$

folglich: $$X = \tfrac{2}{3}\,x.$$

## Guldins'che Regeln.

**40.** Stellt $o$ (Fig. 12) den Schwerpunct der ebenen Curve $NN' = l$ vor, so ist für $Po = Y$ nach der zweiten der Relat. (I) in **22**:

$$Yl = \int_{s_0}^{s_1} y\,ds \text{ oder, wenn man mit } 2\pi \text{ multiplicirt, auch}$$

$$2\,Y\pi\,l = \int_{s_0}^{s_1} 2\,y\,\pi\,ds.$$

Nun entsteht aber durch Umdrehung dieser Curve $NN'$ um die Achse $AX$ eine Rotationsfläche, deren Oberfläche durch den zweiten Theil dieser Gleichung ausgedrückt wird, während der erste Theil nichts anders als das Product aus dem Weg des Schwerpunctes $o$ in die Länge $l$ der Curve bezeichnet: die durch Umdrehung einer ebenen Curve um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugte Rotationsfläche ist also gleich dem Producte aus der Länge der Curve in den Weg, welchen der Schwerpunct derselben bei dieser Umdrehung beschreibt.

**41.** Bezeichnet dagegen $o$ den Schwerpunct der von der Curve $NN'$ (Fig. 12) begrenzten ebenen Fläche $BN' = F$ und ist wieder $Po = Y$, so entsteht durch die Umdrehung dieser Fläche um die Achse $AX$ ein Rotationskörper, dessen Inhalt durch $\int_{x'}^{x''} y^2\,\pi\,dx$ ausgedrückt wird. Es ist aber nach der zweiten Relation (II) in **26**.

$YF = \int_{x'}^{x''} \tfrac{1}{2}\,y\,dF$ oder wegen $dF = y\,dx$ und wenn man auch gleich wieder mit $2\pi$ multiplicirt:

$$2\,Y\pi\,.\,F = \int_{x'}^{x''} y^2\,\pi\,dx,$$

d. h. der Inhalt des durch Umdrehung der ebenen Fläche $F$ um die Achse $AX$ erzeugten Körpers ist gleich dem Producte aus dieser Fläche in den Weg, welchen ihr Schwerpunct bei dieser Rotation zurücklegt.

Um diese beiden Regeln, welche mehr zur Darstellung einer interessanten Eigenschaft des Schwerpunctes als des Gebrauches wegen angeführt werden, auf ein ganz einfaches Beispiel anzuwenden, drehe sich die Gerade $AB = l$ (Fig. 15) um $AC$, wobei das auf $AC$ gezogene Perpendikel $BC = r$ seyn soll, folglich der Abstand des Schwerpunctes $o$ der Geraden $AB$ von $AC = \frac{1}{2} r$ ist. Zufolge der erstern Regel (**40.**) ist daher die durch diese Rotation erzeugte Kegelfläche $O = 2 . \frac{1}{2} r \pi . l = r \pi l$.

Dreht sich dagegen das rechtwinkelige Dreieck $ABC$ um diese Gerade $AC = h$, und ist $m$ der Schwerpunct dieser Fläche, folglich wegen $Am = \frac{2}{3} Ad$ der Abstand $mn = \frac{2}{3}\, Cd = \frac{2}{3} . \frac{1}{2} r = \frac{1}{3} r$; so ist nach der zweiten dieser Regeln (**41.**) das Volumen des durch Rotation dieser Fläche $ABC = \frac{1}{2} r h$ erzeugten Kegels: $V = 2 . \frac{1}{3} r \pi . \frac{1}{2} r h = \frac{1}{3} r^2 \pi h$, Alles, wie es aus der Geometrie bekannt ist.

Anmerkung. Um schlüfslich noch eine bemerkenswerthe Eigenschaft des Schwerpunctes zu entwickeln, seyen $p, p', p''$.. die Gewichte und $M, M', M''$.. die Schwerpuncte von Körpern, welche zusammen ein unveränderliches System bilden, dessen Schwerpunct in $O$ liegen soll. Bezieht man das System auf drei rechtwinkelige Coordinatenachsen, deren Ursprung in $A$ liegt, bezeichnet die Entfernung der einzelnen Schwerpuncte $M, M'$.. von diesem Ursprunge $A$ durch $r, r', r''$.., den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunctes $O$ von $A$ mit $R$, die Winkel welche $R$ mit den Achsen der $x, y, z$ bildet beziehungsweise mit $a, b, c$, jene der $r$ mit diesen Achsen mit $\alpha, \beta, \gamma$, der $r'$ mit $\alpha', \beta', \gamma'$ u. s. w. und setzt endlich die Summe der Gewichte (als Resultirende, deren Angriffspunct $O$ ist) $p + p' .. = \Sigma\,(p) = P$; so folgt nach den Relationen (1) in Nr. **17.** indem die von $O, M, M'$... auf die Ebene der $xy$ gefällten Perpendikel durch $R \operatorname{Cos} c$, $r \operatorname{Cos} \gamma$, $r' \operatorname{Cos} \gamma'$... und eben so die Perpendikel auf die Ebene der $xz$ durch $R \operatorname{Cos} b$, $r \operatorname{Cos} \beta$, $r' \operatorname{Cos} \beta'$.. und auf die Ebene der $yz$ durch $R \operatorname{Cos} a$, $r \operatorname{Cos} \alpha$, $r' \operatorname{Cos} \alpha'$.. ausgedrückt werden, sofort:

$$P R \operatorname{Cos} a = \Sigma\,(p r \operatorname{Cos} \alpha)$$
$$P R \operatorname{Cos} b = \Sigma\,(p r \operatorname{Cos} \beta)$$
$$P R \operatorname{Cos} c = \Sigma\,(p r \operatorname{Cos} \gamma)$$

die Summe der Quadrate dieser drei Gleichungen gibt, mit Berücksichtigung dafs (Comp. §. 572) $\operatorname{Cos}^2 a + \operatorname{Cos}^2 b + \operatorname{Cos}^2 c = 1$, $\operatorname{Cos}^2 \alpha + \operatorname{Cos}^2 \beta + \operatorname{Cos}^2 \gamma = 1$ u. s. w. ferner, wenn $(r.r')$ den Winkel bezeichnet, welchen die Geraden $r$ und $r'$ mit einander einschliefsen, und die übrigen Winkel damit analog bezeichnet werden, wegen (Comp. §. 572) $\operatorname{Cos}\,(r.r') = \operatorname{Cos} \alpha \operatorname{Cos} \alpha' + \operatorname{Cos} \beta \operatorname{Cos} \beta' + \operatorname{Cos} \gamma \operatorname{Cos} \gamma'$ und so auch analog für die übrigen Winkel nach gehöriger Reduction:

$$P^2 R^2 = \Sigma\,(p^2 r^2) + \Sigma\,(2 p p' r r' \operatorname{Cos}\,[r.r'])$$

Sind ferner $a, a', a''$.. die Abstände der Schwerpuncte $M, M'$.. untereinander, so ist bekanntlich $2 r r' \operatorname{Cos}\,(r.r') = r^2 + r'^2 - a^2$ und so auch für die Übrigen, folglich geht die vorige Relation über in folgende:

$$P^2 R^2 = \Sigma\,(p^2 r^2) + \Sigma\,(p p' [r^2 + r'^2 - a^2])$$

oder da alle $r^2$ enthaltenden Glieder die Form haben $p r^2 (p + p' + .. =)$

$Ppr^2$ und das Ähnliche auch für die $r'^2$, $r''^2$... enthaltenden Glieder Statt findet, eben so $P^2R^2 = P\,\Sigma(pr^2) - \Sigma(pp'a^2)$ oder endlich:

$$P\,\Sigma(p\,r^2) = P^2R^2 + \Sigma(pp'a^2)$$

aus welcher Relation sofort der Satz folgt, dafs wenn der Abstand $R$ des Schwerpunctes eines Systemes von schweren Puncten oder Körpern von irgend einem festen Puncte $(A)$ constant bleibt, dagegen sich die Lage des in seiner Form unveränderlichen Systemes wie immer ändert (wodurch sich sofort die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ u. s. w. ändern) die Summe der Producte aus den einzelnen Gewichten in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpuncte von diesem festen Puncte ebenfalls eine constante Gröfse ist.

Da ferner, wie dieselbe Relation zeigt, $\Sigma(pr^2)$ für $R=0$ am kleinsten ist, so folgt noch, dafs die Summe der Producte der Gewichte in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpuncte von diesem gemeinschaftlichen Schwerpunct ein Minimum ist.

Einige weitere wichtige Eigenschaften des Schwerpunctes werden noch in Nr. **61**, Anmerk. 2 unter 8., 9. und 10. angeführt werden.

## Die Kettenlinie.

(§. 69.)

**42.** Um eine Gleichung der in den Puncten $A$ und $B$ (Fig. 19) aufgehängten vollkommen biegsamen Schnur oder Kette (von sehr feinen Gliedern) $AMCB$, wovon gleiche Längen auch ein gleiches Gewicht haben sollen, abzuleiten, nehme man den einen Aufhängpunct $A$ zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten und die durch diesen Punct gezogene Horizontale $AA'$ zur Abscissenachse, setze also für einen beliebigen Punct $M$ der Curve $AP = x$, $PM = y$ und Bog. $AM = s$; setzt man ferner die Länge der Kette $ACB = l$, die Coordinaten des zweiten Aufhängpunctes $B$ d. i. $AE = c$, $EB = d$ und ersetzt (wodurch nichts geändert wird) diesen festen Punct $B$ durch eine nach der Tangente wirkenden Kraft $S$, welche der in diesem Puncte Statt findenden Spannung gleich ist, so kann man diese Kraft in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte $P$ und $Q$ zerlegen, wovon die erstere vertical, dle letztere daher horizontal wirkt. Die im Puncte $M$ nach der Richtung der Tangente $MT$ Statt findende Spannung $T$, welche sofort dem Gewichte, also auch der Länge des Bogens $MCB$ proportional ist, kann eben so in zwei Seitenkräfte $P'$, $Q'$ nach verticaler und horizontaler Richtung zerlegt werden, und zwar ist, wenn man W. $TMP = \varphi$ setzt, dafür: