in **22.** die dritte in z weg. Aufserdem fällt von diesen Relationen auch noch die zweite, nämlich die in y weg, wenn man einen Durchmesser der Schwere (§. 43) zur Abscissenachse nimmt.

25. Soll z. B. der Schwerpunkt eines Kreisbogens BAB' (Fig. 11), dessen Mittelpunct C ist, gefunden werden, so ziehe man an den Halbirungspunct A des Bogens den Halbmesser CA und nehme diesen, weil er eine Linie der Schwere ist (indem der Bogen BAB' durch CA in zwei gleiche symmetrische Theile getheilt wird) zur Abscissenachse, so wie den Punct C zum Anfang der rechtwinkeligen Coordinaten. Setzt man ferner den Halbmesser $CA = r$, Sehne $BB' = a$, Bogen $BAB' = l$, W. $ACB =$ W. $ACB' = i$ und endlich für einen beliebigen Punct M des Kreisbogens, Bog. $AM = s$, $CP = x$, $PM = y$ und W. $ACM = \alpha$; so ist wegen $\alpha = \frac{s}{r}$, sofort $x = r \, Cos \frac{s}{r}$ und nach der ersten der Relationen (I) in Nr. **22.**

$$Xl = \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} r \, Cos \frac{s}{r} \, ds \; (= 2\int_0^{\frac{1}{2}l} r \, Cos \frac{s}{r} \, ds) = 2\, r^2 \, Sin \frac{l}{2r}$$

oder wegen $a = 2r \, Sin \, i = 2r \, Sin \frac{\frac{1}{2}l}{r} = 2r \, Sin \frac{l}{2r}$, auch

$$Xl = ra, \text{ woraus auch } l : a = r : X \text{ oder } X = \frac{ra}{l} \quad . \quad (1)$$

folgt, wobei, wenn O den gesuchten Schwerpunct bezeichnet, sofort $X = CO$ ist.

Schwerpunct ebener Flächen.

(§. 47.)

26. Um den Schwerpunct der von der Abscissenachse AX, (Fig. 12), den beiden Ordinaten BN, $B'N'$ und dem entsprechenden Bogen der Curve AD eingeschlossenen ebenen Fläche BN' zu bestimmen, ziehe man zu den Abscissen $AP = x$ und $Ap = x + dx$ die rechtwinkeligen Ordinaten $PM = y$ und $pm = y + dy$, setze $AB = x'$, $AB' = x''$, Fläche $BN' = F$, also Fläche $Pm = dF$, und bemerke, dafs der Abstand des Schwerpunctes o des Flächenelementes Pm, welches als ein Rechteck anzusehen ist, von der Achse AX gleich $\frac{1}{2}y$ ist; so erhält man mit (l) und (m) in **22.** für den gegenwärtigen Fall die analogen Gleichungen:

$$XF = \int_{x'}^{x''} x \, dF, \quad YF = \int_{x'}^{x''} \tfrac{1}{2} y \, dF \quad \text{und} \quad F = \int_{x'}^{x''} dF. \quad (II)$$

(weil nämlich die 3te Relation in z hier wegfällt), wobei y und dF als unctionen von x auszudrücken sind, also die Gleichung der Curve AD, nämlich $y = f(x)$ gegeben seyn mufs.

Anmerkung. Die zweite dieser drei Gleichungen fällt wieder weg, wenn die Achse der x zugleich eine Linie der Schwere ist.

27. Um auf diesem Wege den Schwerpunct O eines geradlinigen Dreieckes ABC (Fig. 13) zu bestimmen, lege man dessen Spitze A in den Ursprung der rechtwinkeligen Coordinatenachsen und dessen Basis BC parallel mit der Ordinatenachse AY, halbire ferner BC in D und ziehe die Gerade AD; so ist diese Gerade (weil sie jedes mit BC parallele Flächenelement wie Nm in zwei gleiche Theile theilt, also durch dessen Schwerpunct geht) eine Linie der Schwere, in welcher sofort der Schwerpunct O des Dreieckes liegt. Setzt man daher die Abscisse dieses Punctes $AE = X$, ferner $AP = x$, $Pp = \mathrm{d}x$, $AF = h$, $NM = y$ und $BC = b$; so ist $dF = y\,\mathrm{d}x$ oder wegen $y : b = x : h$, nämlich $y = \frac{b}{h} x$, auch $dF = \frac{b}{h} x\,\mathrm{d}x$ und daher

$$F = \int_0^h \frac{b}{h}\,\mathrm{d}x = x\ \frac{b}{h}\frac{h^2}{2} = \tfrac{1}{2}\,b\,h,$$

endlich damit nach der ersten der vorigen Relationen (*II*):

$$\tfrac{1}{2}\,b\,h\,X = \int_0^h \frac{b}{h}\,x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b}{h}\frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{3}\,b\,h^2,$$

woraus endlich folgt:

$$X = \tfrac{2}{3}\,h.$$

Da also $AE = \frac{2}{3}AF$ ist, so folgt auch (wie in §. 48) $AO = \frac{2}{3}AD$.

28. Um den Schwerpunct der sogenannten parabolischen Fläche ANQ (Fig. 14) zu finden, seyen für einen beliebigen Punct M der Parabel die rechtw. Ordinaten $AP = x$, $PM = y$, so ist die Gleichung dieser Curve (Comp. §. 472) $y^2 = p\,x$.

Ist ferner $Pp = \mathrm{d}x$, so ist das Flächenelement $Pm = \mathrm{d}F = y\,\mathrm{d}x$ und die ganze Fläche $AMP = F = \int_0^x y\,\mathrm{d}x = \int_0 \mathrm{d}x \sqrt{p\,x} = \frac{2}{3}\,x\,y$. Nach der ersten der Relationen in (*II*) **26.** erhält man daher $\frac{2}{3}\,x\,y\,.\,X = \int_0^x x\,y\,\mathrm{d}x = \int_0 x\,\mathrm{d}x\,\sqrt{p\,x} = \sqrt{p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\,x^2\sqrt{p\,x} = \frac{2}{5}\,x^2\,y$ und daraus: $X = \frac{3}{5}\,x$.

Aus der zweiten dieser genannten Relationen:

$$\tfrac{2}{3}\, x\, y \,.\, Y = \int_0^x \tfrac{1}{2}\, y^2\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^x p\, x\, dx = \tfrac{1}{4}\, p\, x^2 = \tfrac{1}{4}\, x\, y^2$$

und daraus: $Y = \frac{3}{8}\, y.$

Da nun für die bestimmte Fläche AQN die Abscisse x in AQ und die Ordinate y in NQ übergeht, so ist für den gesuchten Schwerpunct O sofort die Abscisse $AE = \frac{3}{5}\, AQ$ und die Ordinate $EO = \frac{3}{8}\, NQ$.

Für die ganze Fläche $NAN'N$ liegt der Schwerpunct offenbar in E.

Schwerpunct krummer Flächen.

(§. 52.)

29. Um den Schwerpunct einer Rotationsfläche zu finden, sey NN' (Fig. 12) der Bogen von bestimmter Länge einer ebenen Curve AD, welche sich um die Abscissenachse AX umdreht und dadurch eine sogenannte Rotationsfläche erzeigt, deren Schwerpunct in der Umdrehungsachse AX liegt und sofort bestimmt werden soll.

Bezeichnet man zu diesem Ende die rechtw. Coordinaten der Endpuncte N, N' dieses Bogens mit $x'\ y'$ und $x''\ y''$, so wie jene eines beliebigen Punctes M desselben mit x, y, setzt $Pp = dx$, Bog. $AM = s$ und $Mm = ds$; so erzeugt dieses Bogenelement ds bei der Umdrehung der Curve AD um die Achse AX die Oberfläche eines abgestutzten Kegels, welche (Comp. §. 863) durch $dO = 2\, y \pi\, ds = 2\, \pi\, y\, dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ ausgedrückt wird.

Die obigen Relationen (*II*) in **26.** gehen daher für den vorliegenden Fall in die folgenden über:

$$O\,X = 2\,\pi \int_{x'}^{x''} x\, y\, dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} \text{ und}$$

$$O = 2\,\pi \int_{x'}^{x''} y\, dx \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)},$$

in welchen Relationen man in bestimmten Fällen aus der Gleichung der gegebenen Curve $y = f(x)$ den Quotienten $\frac{dy}{dx}$ bestimmen, ferner dessen Werth sammt jenen von y substituiren, und dann die Integrationen innerhalb der betreffenden Grenzen ausführen muſs, um die Abscisse X oder den Abstand AO des gesuchten Schwerpunctes O zu erhalten.

30. Ist, als einfachstes Beispiel, NN' eine mit der Achse AX parallele Gerade in dem Abstande r und von der Länge h, also die

Rotationsfläche die Mantelfläche eines gemeinen Cylinders vom Halbmesser r und von der Länge h; so ist wegen $y = r$, also $dy = 0$ sofort:

$$O = 2\pi \int_0^h r\,dx = 2 r\pi h \text{ und } 2 r \pi h\, X = 2\pi \int_0^h r x\, dx = 2 r \pi \frac{h^2}{2}$$

folglich $X = \frac{1}{2} h$, wie sich von selbst versteht.

31. Eine durch den Ursprung A der Coordinaten gehende Gerade $AB = l$ (Fig. 15) erzeugt bei der erwähnten Rotation eine gewöhnliche Kegelfläche, wofür, wenn man die Ordinate $CB = r$ und die Abscisse $AC = h$ setzt, wegen $y = \frac{r}{h} x$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{r}{h}$, sofort

$$O = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x\, dx \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right)} = \frac{2 r\pi \sqrt{(h^2 + r^2)}}{h^2} \int_0^h x\, dx$$

$$= \frac{2 r \pi l}{h^2} \frac{h^2}{2} = r \pi l \text{ und damit}$$

$$r \pi l X = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x^2\, dx \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right)} = \frac{2 r \pi l}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \tfrac{2}{3} r \pi l h$$

folglich $X = \frac{2}{3} h$ wird.

32. Ist die erzeugende Curve ein Kreisbogen NN' (Fig. 16) vom Halbmesser $CA = r$, so entsteht durch die Umdrehung desselben um den Durchmesser AA' eine Kugelzone mit zwei Grundflächen, und da $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ die Gleichung des Kreises ist, wenn man die Abscissen vom Mittelpuncte C aus zählt, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$ und $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{r}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$ wird; so hat man nach den beiden Relationen in **29.**, wegen $CB = x'$ und $CB' = x''$ sofort:

$$O = 2\pi \int_{x'}^{x''} \sqrt{(r^2 - x^2)} \frac{r\, dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = 2 r \pi \int_{x'}^{x''} dx = 2 r \pi (x'' - x')$$

und damit

$$2 r \pi (x'' - x') X = 2\pi \int_{x'}^{x''} x \sqrt{(r^2 - x^2)} \frac{r\, dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

$$= 2 r \pi \int_{x'}^{x''} x\, dx = 2 r \pi \left(\frac{x''^2 - x'^2}{2}\right)$$

woraus endlich folgt: $X = \frac{1}{2}(x' + x'')$,

so, daſs also der gesuchte Schwerpunct O in der halben Höhe der Zone liegt. (§. 54.)

Dasselbe Resultat erhält man offenbar auch für eine Zone mit einer Grundfläche, d. i. für eine Kugelhaube oder Kugelschale, indem man dafür nur $x'' = CA = r$ setzen darf. Auch wird für die Oberfläche der Halbkugel, wegen $x' = 0$ und $x'' = r$ ebenfalls nach dieser Regel $X = \frac{1}{2} r$.

Schwerpunct der Körper.

(§. 55.)

33. Da bei homogenen Körpern, wie sie hier immer vorausgesetzt werden, das Gewicht dem Volumen proportional ist, das Volumen daher zur gröfseren Einfachheit statt dem Gewichte gesetzt werden darf (indem der Factor, welcher das Gewicht der cubischen Einheit bezeichnet, zuletzt überall hinausfällt); so erhält man zur allgemeinen Bestimmung des Schwerpunctes eines Körpers, wenn man dessen Volumen mit V, also ein Element davon mit dV bezeichnet, die nachstehenden (mit jenen in **22.** analogen) Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{c} VX = \int x\, dV, \quad VY = \int y\, dV, \quad VZ = \int z\, dV, \\ V = \int dV. \end{array}\right\} \text{(III)}$$

wobei sich die Grenzen, innerhalb welcher die Integrationen ausgeführt werden müssen, in den einzelnen speciellen Fällen immer von selbst ergeben

34. Um z. B. den Schwerpunct einer Pyramide $ABCD$ (Fig. 17) von einer beliebigen Grundfläche zu bestimmen, verbinde man die Spitze der Pyramide A mit dem Schwerpunct E der Grundfläche, wodurch AE eine Linie der Schwere wird, in welcher sofort der gesuchte Schwerpunct 0 liegt. Fällt man ferner aus demselben Puncte A auf die Grundfläche der Pyramide das Perpendikel AF, nimmt dieses zur Abscissenachse, so wie den Punct A zum Ursprung der rechtw. Coordinaten, legt durch die Puncte P und p wofür $AP = x$ und $Pp = dx$ ist, zwei Ebenen $b\,c\,d$ und $b'\,c'\,d'$ parallel mit der Grundfläche BCD, bezeichnet die Gröfse der Grundfläche $B\;C\;D$ mit f, so wie jene des ähnlichen Polygones $b\,c\,d$ mit z und endlich die Höhe der Pyramide AF mit h; so ist zuerst $dV = z\,dx$ oder wegen $f : z = h^2 : x^2$, woraus $z = \frac{f}{h^2} x^2$ folgt, auch $dV = \frac{f}{h^2} x^2\, dx$ und daraus

$$V = \int_0^h \frac{f}{h^2} x^2\, dx = \frac{f}{h^2} \frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{3} f h \text{ (wie ohnehin bekannt.)}$$

1/3