$Cos\,\alpha\,\Sigma(P) - R\,Cos\,a = 0$, $Cos\,\beta\,\Sigma(P) - R\,Cos\,b = 0$, und
$Cos\,\gamma\,\Sigma(P) - R\,Cos\,c = 0$,
woraus zuerst $R = \Sigma(P)$ und $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ folgt, und, wenn x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punctes dieser Resultirenden R sind ferner:

$$Cos\,\alpha\,[\Sigma(Py) - y'\,\Sigma(P)] = Cos\,\beta\,[\Sigma(Px) - x'\,\Sigma(P)]$$
$$Cos\,\alpha\,[\Sigma(Pz) - z'\,\Sigma(P)] = Cos\,\gamma\,[\Sigma(Px) - x'\,\Sigma(P)]$$
$$Cos\,\beta\,[\Sigma(Pz) - z'\,\Sigma(P)] = Cos\,\gamma\,[\Sigma(Py) - y'\,\Sigma(P)]$$

welchen letztern 3 Gleichungen offenbar für

$$x' = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)},\quad y' = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)},\quad z' = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)}$$

Genüge geleistet wird, und welches sofort (Nr. 17, Relat. 3) die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte sind.

Auf gleiche Weise hätte man schon in dem allgemeinen, durch die Relationen (s) gegebenen Falle die Resultirende bestimmen können, wenn kein Gleichgewicht vorausgesetzt worden wäre.

Schwerpunct der Linien.

(§. 44.)

22. Soll allgemein für irgend eine Curve im Raume BB' (Fig. 10) der Schwerpunkt bestimmt werden, so beziehe man diese auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem AX, AY, AZ, bezeichne die Coordinaten irgend eines Punctes M dieser Curve mit x, y, z ($AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$), setze die Länge des variablen Bogens $BM = s$, so wie die des ganzen Bogens $BB' = l$; so stellt $\lambda\, ds$ das diesem Puncte M entsprechende Curvenelement und da man dieses (nach der in §. 44 gemachten Voraussetzung) gleich unmittelbar statt dem Gewichte des materiellen Punctes x, y, z setzen kann, $z\,ds$ das Moment dieses Gewichtes auf die Ebene der xy bezogen vor. Bezeichnet man ferner die Werthe von s auf die Endpunkte B, B' des Bogens $BB' = l$ bezogen, beziehungsweise mit s_0, s_1; so stellt das bestimmte Integral $\int_{s_0}^{s_1} z\,ds$ die algebraische Summe der Momente $\Sigma(Pz)$ in den Relationen (1) von **17.** vor, wobei P unendlich klein ist und statt ds steht. Eben so sind die Integrale $\int_{s_0}^{s_1} y\,ds$ und $\int_{s_0}^{s_1} x\,ds$ die Summe der Momente dieser Gewichte auf die Ebenen xz und yz bezogen, so, daſs wegen $\mathfrak{R} = l$, die genannten Relationen (1) in **17.** zur Bestimmung des Schwerpunctes x, y, z (dort Mittelpunct der parallelen Kräfte genannt) einer krummen Linie im Raume, hier in folgende übergehen:

$$Xl = \int_{s_0}^{s_1} x\, ds,\quad Yl = \int_{s_0}^{s_1} y\, ds,\quad Zl = \int_{s_0}^{s_1} z\, ds \;\ldots\; \text{(I)}$$

wobei noch (Relat. 2 in **17.**) $l = \int_{s_0}^{s_1} ds \;\ldots\; (m)$ ist.

Anmerkung. Um in diesen Formeln nach der Variablen s integriren zu können, in welchem Falle die Grenzwerthe s_0, s_1 unmittelbar gelten, mufs man x, y, z als Functionen von s darstellen. Man mufs dagegen diese Grenzwerthe in die entsprechenden x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1 verwandeln, wenn man für ds den bekannten Werth $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ setzt und nach x, y, z integrirt. Welcher Vorgang von beiden der einfachere ist, hängt von Umständen ab, und es lassen sich hierüber gar keine bestimmten Regeln angeben.

23. Ist, um das Verfahren auf ein einfaches Beispiel anzuwenden, die gegebene Linie eine gerade Linie von der Länge $BB' = l$, bezeichnet man die Winkel, welche diese Gerade mit den Achsen der x, y, z bildet, beziehungsweise durch α, β, γ und die Coordinaten des Anfangspunctes B mit a, b, c; so sind jene irgend eines andern Punctes M dieser Geraden: $x = a + s\, Cos\, \alpha$, $y = b + s\, Cos\, \beta$, $z = c + s\, Cos\, \gamma$. Substituirt man diese Werthe in die vorigen Gleichungen (I) und führt die ganz einfachen Integrationen innerhalb der Grenzen von $s = 0$ bis $s = l$ aus; so erhält man, wenn man auch gleich mit l durchaus dividirt: $X = a + \frac{1}{2} l\, Cos\, \alpha$, $Y = b + \frac{1}{2} l\, Cos\, \beta$, $Z = c + \frac{1}{2} l\, Cos\, \gamma$, woraus sofort folgt, dafs der Schwerpunct dieser geraden Linie (wie es ohnehin bekannt) in ihrem Halbirungspuncte liegt.

Weniger einfach gelangt man zu diesem Resultate durch die zweite vorhin erwähnte Methode, nach welcher man die Gleichungen der Geraden BB' (d. i. $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$. Comp. S. 360) aufstellen, daraus die Differentialquotienten $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ entwickeln und in die Gleichung ds = $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = dz\sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2}\right)}$, so wie wieder diesen Werth in die obigen Relationen (I) substituiren und dann nach z innerhalb der Grenzen x', x'', y', y'', z', z'' integriren mufs, wenn x', y', z' und x'', y'', z'' die Coordinaten der Endpuncte B, B' dieser Geraden bezeichnen. Auf diesem Wege erhält man, mit Berücksichtigung der Relation $l = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}$ (Comp. S. 356) sofort $X = \frac{1}{2}(x' + x'')$, $Y = \frac{1}{2}(y' + y'')$, $Z = \frac{1}{2}(z' + z'')$, welches bekanntlich die Coordinaten des Halbirungspunktes dieser Geraden BB' sind.

24. Für eine ebene Curve fällt, wenn man die Ebene, in welcher sie liegt, zur Ebene der xy nimmt, von den 3 Relationen (I)

;n **22.** die dritte in z weg. Aufserdem fällt von diesen Relationen auch noch die zweite, nämlich die in y weg, wenn man einen Durchmesser der Schwere (§. 43) zur Abscissenachse nimmt.

25. Soll z. B. der Schwerpunkt eines Kreisbogens BAB' (Fig. 11), dessen Mittelpunct C ist, gefunden werden, so ziehe man an den Halbirungspunct A des Bogens den Halbmesser CA und nehme diesen, weil er eine Linie der Schwere ist (indem der Bogen BAB' durch CA in zwei gleiche symmetrische Theile getheilt wird) zur Abscissenachse, so wie den Punct C zum Anfang der rechtwinkeligen Coordinaten. Setzt man ferner den Halbmesser $CA = r$, Sehne $BB' = a$, Bogen $BAB' = l$, W. $ACB =$ W. $ACB' = i$ und endlich für einen beliebigen Punct M des Kreisbogens, Bog. $AM = s$, $CP = x$, $PM = y$ und W. $ACM = \alpha$; so ist wegen $\alpha = \frac{s}{r}$, sofort $x = r\,Cos\,\frac{s}{r}$ und nach der ersten der Relationen (I) in Nr. **22.**

$$Xl = \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} r\,Cos\,\frac{s}{r}\,\mathrm{d}s\ \left(= 2\int_0^{\frac{1}{2}l} r\,Cos\,\frac{s}{r}\,\mathrm{d}s\right) = 2\,r^2\,Sin\,\frac{l}{2r}$$

oder wegen $a = 2r\,Sin\,i = 2r\,Sin\,\frac{\frac{1}{2}l}{r} = 2r\,Sin\,\frac{l}{2r}$, auch

$$Xl = ra,\ \text{woraus auch}\ l : a = r : X\ \text{oder}\ X = \frac{ra}{l}\ \cdot\ .\ (1)$$

folgt, wobei, wenn O den gesuchten Schwerpunct bezeichnet, sofort $X = CO$ ist.

Schwerpunct ebener Flächen.

(§. 47.)

26. Um den Schwerpunct der von der Abscissenachse AX, (Fig. 12), den beiden Ordinaten BN, $B'N'$ und dem entsprechenden Bogen der Curve AD eingeschlossenen ebenen Fläche BN' zu bestimmen, ziehe man zu den Abscissen $AP = x$ und $Ap = x + \mathrm{d}x$ die rechtwinkeligen Ordinaten $PM = y$ und $pm = y + \mathrm{d}y$, setze $AB = x'$, $AB' = x''$, Fläche $BN' = F$, also Fläche $Pm = \mathrm{d}F$, und bemerke, dafs der Abstand des Schwerpunctes o des Flächenelementes Pm, welches als ein Rechteck anzusehen ist, von der Achse AX gleich $\frac{1}{2}\,y$ ist; so erhält man mit (l) und (m) in **22.** für den gegenwärtigen Fall die analogen Gleichungen:

$$XF = \int_{x'}^{x''} x\,\mathrm{d}F,\quad YF = \int_{x'}^{x''} \tfrac{1}{2}\,y\,\mathrm{d}F\quad \text{und}\quad F = \int_{x'}^{x''} \mathrm{d}F.\quad (II)$$