beiden Gleichungen: $\Re X = \Sigma(Px)$ und $\Re Y = \Sigma(Py)$, wobei $\Re = \Sigma(P)$ ist.

19. Liegen dagegen die sämmtlichen Puncte $M, M_1 \ldots$ in einer geraden Linie und nimmt man diese zur Achse der x, so erhält man aus den beiden letzten der Relationen (1) in **17.** wegen

$$y = y_1 = y_2 = \ldots = 0 \text{ und } z = z_1 = z_2 \ldots = 0,$$

wenn das Gleichgewicht nicht Statt hat, also $\Re$ nicht Null ist (da für das Gleichgewicht dieser Punct X, Y, Z ohnehin nicht besteht), sofort $Y = 0$, $Z = 0$, zum Zeichen, dafs in diesem Falle (wie es ohnehin bekannt) der Mittelpunct der parallelen Kräfte in der nämlichen Geraden liegt.

Satz der statischen Momente.

(§. 32.)

20. Wirken auf einen frei beweglichen Punct A (Fig. 8) beliebig viele in ein und derselben Ebene liegende Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ nach den angedeuteten Richtungen, und fällt man aus irgend einem, in derselben Ebene liegenden Punct O auf die Richtungen der Kräfte oder deren Verlängerungen die Perpendikel Oa, $Oa_1 \ldots$ und bezeichnet ihre Gröfse oder Länge beziehungsweise durch $p, p_1, p_2 \ldots$ so sind Pp, $P_1 p_1$ u s. w. die statischen Momente dieser Kräfte in Beziehung auf den Punct O.

Nimmt man die durch diesen Punct O und den Angriffspunct A gezogene Gerade XX' zur Abscissen- und die durch A darauf perpendikuläre Gerade YY' zur Ordinatenachse, bezeichnet die Winkel, welche die Kräfte $P, P_1 \ldots$ mit XX' einschliefsen, wie in Nr. **11** durch α, α_1, $\alpha_2 \ldots$ zerlegt wieder, wie dort, jede dieser Kräfte in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte, nämlich nach AX und AY, und bezeichnet gerade so wie dort die Mittelkraft aus allen nach der Achse XX' wirksamen Seitenkräfte mit P', so wie jene nach YY' wirkenden Kräfte mit Q', so, dafs also (wie in **11.**) $P' = P \, Cos\, \alpha + P_1 \, Cos\, \alpha_1 + \ldots$ und $Q' = P \, Sin\, \alpha + P_1 \, Sin\, \alpha_1 + \ldots$ wird; so hat man aus dieser letztern Relation, wenn man den beliebigen Abstand $AO = u$ setzt, wodurch

$$Sin\, \alpha = \frac{p}{u},\; Sin\, \alpha_1 = \frac{p_1}{u},\; Sin\, \alpha_2 = \frac{p_2}{u} \ldots$$

wird, sofort:

$$Q' = P\frac{p}{u} + P_1 \frac{p_1}{u} + \ldots,$$

oder wenn man durchaus mit u multiplicirt:

$$Q'u = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots (m).$$

Ist nun $\mathfrak{R}$ die Resultirende aus diesen Kräften P, P_1 . . . also auch der beiden Mittelkräfte P', Q', und fällt man auf diese Kraft ebenfalls aus O das Perpendikel Ob, dessen Länge $\mathfrak{r}$ heifsen soll; so ist nach dem Satze (1) in §. 29 $\mathfrak{R}\,\mathfrak{r} = Q'q' + P'p'$, oder da hier $q' = u$ und $p' = 0$ ist, auch $\mathfrak{R}\,\mathfrak{r} = Q'u$, und wenn man für $Q'u$ den Werth aus der vorigen Relation (m) setzt:

$$\mathfrak{R}\,\mathfrak{r} = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots (1).$$

Anmerkung 1. Die in dieser algebraischen Summe vorkommenden Glieder werden positiv oder negativ, je nachdem (da man die sämmtlichen Kräfte P als positiv anzusehen hat) die Perpendikel $p = u \operatorname{Sin} \alpha$, $p_1 = u \operatorname{Sin} \alpha_1$ . . . positiv oder negativ ausfallen, d. h. je nachdem die entsprechenden Winkel α im 1ten und 2ten oder 3ten und 4ten Quadranten liegen.

Auch läfst sich dieser Gegensatz in den Zeichen der Glieder Pp leicht dadurch finden, dafs man sich die sämmtlichen Perpendikel p, p_1 . . . im Puncte O fest mit einander verbunden, zugleich aber um diesen Punct drehbar denkt und sich vorstellt, dafs die Kräfte P, P_1 . . . an ihren Endpuncten a, a_1 . . . wirksam sind; dann bilden die Kräfte, wie hier P und P_1, welche das System von Oa, Oa_1 . . . nach der einen Richtung drehen wollen, den Gegensatz zu jener, wie hier P_2, welche dieses System nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben. Die Resultirende sucht das System im positiven oder negativen Sinne zu drehen, je nachdem die algebraische Summe der Glieder Pp (wobei man willkürlich die eine oder die andere Richtung als die positive annehmen kann) positiv oder negativ ausfällt.

Anmerkung 2. Da für den Fall des Gleichgewichtes, wegen $\mathfrak{R} = 0$, sofort $Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots = 0$ wird, so folgt, dafs in diesem Falle die Summe der statischen Momente jener Kräfte, welche das genannte System nach einer Richtung zu drehen suchen, gleich seyn mufs der Summe der statischen Momente der übrigen, d. h. jener Kräfte, welche das System nach der entgegengesetzten Richtung drehen wollen. Aufserdem müssen auch noch, wenn O ein freier Punct ist, die beiden Bedingungsgleichungen (13.) $P' = 0$ *und* $Q' = 0$ bestehen.

Ist dagegen O ein fester Drehungspunct, so ist das Gleichgewicht von der Bedingungsgleichung $P' = 0$ unabhängig, d. h. diese Gleichung braucht nicht Statt zu finden.

Anmerkung 3. Läfst man, ohne die Gröfse der Perpendikel p, p_1, p_2 . . . zu ändern, die ganz willkürliche Distanz $AO = u$ allmälig zunehmen und setzt endlich $u = \infty$, so laufen zuletzt die Kräfte P, P_1, P_2 . . . unter einander parallel, ohne dafs dadurch die obige Relation (1), in welcher diese Gröfse u nicht mehr vorkommt oder hinausgefallen ist, ihre Giltigkeit verliert (§. 33).

21. Die vorige Relation (1) gilt aber nicht bloſs für den Fall, in welchem die Kräfte P, P_1 . . . auf einen einzigen Punct, sondern auch wenn diese auf verschiedene, mit den Kräften in derselben Ebene liegende, jedoch fest mit einander verbundene Puncte A, A_1, A_2 . . . (Fig. 9) wirken. Denn sucht man zuerst zu den beiden Kräften P und P_1, welche sich in M schneiden, die Mittelkraft R, ferner zu dieser und der 3ten Kraft P_2, welche sich in N schneiden sollen, die Mittelkraft R_1 u. s. w. fort, fällt dann aus irgend einem in derselben Ebene liegenden Punct O auf die Richtungen der Kräfte P, P_1 . . . R, R_1 . . . die Perpendikel $Oa = p$, $Oa_1 = p_1$ . . . $Ob = r$, $Ob_1 = r_1$ . . . ; so folgt nach der genannten Relation (1) der vorigen Nummer: $Rr = Pp + P_1 p_1$, ferner eben so

$$R_1 r_1 = Rr + P_2 p_2 = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2,$$

und wenn man auf diese Weise fortfährt und die letzte Resultirende aus allen Kräften wieder durch $\mathfrak{R}$, das aus O darauf gefällte Perpendikel durch $\mathfrak{r}$ bezeichnet, endlich wie zuvor:

$$\mathfrak{R}\mathfrak{r} = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = \Sigma(Pp) \ldots (2).$$

Anmerkung 1. Bezieht man die Angriffspuncte A, A_1 . . . auf zwei willkürliche in dieser Ebene gezogene rechtwinkelige Achsen, und zerlegt jede der gegebenen Kräfte P, P_1 . . . in zwei mit diesen Achsen parallele Kräfte, deren Angriffspuncte man sich in diese Achsen verlegt denken kann; so erhält man genau so wie in **12.**, wenn man die dortige Bezeichnung der Winkel, welche die Kräfte P, P_1 . . . mit der Achse XX' bilden, beibehält, zwei Gruppen von parallelen Kräften, von denen die mit der Achse XX' parallele Gruppe die Resultirende $P' = \Sigma(P \cos \alpha)$ und die mit YY' parallele die Mittelkraft $Q' = \Sigma(P \sin \alpha)$ besitzt.

Soll also hier das Gleichgewicht Statt finden, so müssen gleichzeitig die drei Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\Sigma(P \cos \alpha) = 0, \ \Sigma(P \sin \alpha) = 0, \ \Sigma(Pp) = 0 \quad (l).$$

Auch lassen sich die in der vorigen allgemeinen Gleichung (2) vorkommenden Producte oder stat. Momente so ausdrücken, daſs dadurch zugleich die Zeichen der Perpendikel $\mathfrak{r}$, p, p_1 . . . in die Augen fallen.

Nimmt man nämlich zuerst nur zwei Kräfte P, P_1 an und bezieht diese auf ein durch den Punct O gehendes rechtwinkeliges Achsensystem, bezeichnet die Coordinaten der Angriffspuncte A, A' dieser Kräfte beziehungsweise mit x, y und x_1, y_1, die Winkel, welche die Kräfte P, P_1 und ihre Resultirende R mit der Abscissenachse bilden, mit α, α_1 und a; so erhält man für die aus dem Anfangspunct O auf die Richtungen der Kräfte P, P_1, R gefällten Perpendikel p, p_1, r, wie leicht zu sehen, die Ausdrücke

$$p = y \cos \alpha - x \sin \alpha, \ p_1 = y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \sin \alpha_1$$

und wenn X, Y die Coordinaten irgend eines Punctes der Resultirenden R sind, $r = Y \, Cos \, a - X \, Sin \, a$.

Dadurch erhält also die obige Gleichung $Rr = Pp + P_1 p_1$ die Form:
$R(Y \, Cos \, a - X \, Sin \, a) = P(y \, Cos \, \alpha - x \, Sin \, \alpha) + P_1(y_1 \, Cos \, \alpha_1 - x_1 \, Sin \, \alpha_1)$.

Verbindet man jetzt gerade so, wie es vorhin geschehen, diese Resultirende R mit der dritten Kraft P_2 und setzt für R, P_2 und ihrer Resultirenden R' die der vorigen analoge Gleichung an, verbindet ferner R' mit P_3 u. s. w. fort, bis man auf diese Weise zur letzten Kraft gekommen ist, und bezeichnet die letzte Resultirende wieder mit $\mathfrak{R}$, die Coordinaten eines ihrer Puncte durch X, Y, so wie den Winkel, welchen sie mit der Abscissenachse bildet, durch a; so ist die der vorigen analoge Gleichung:

$$\mathfrak{R}(Y \, Cos \, a - X \, Sin \, a) = \Sigma[P(y \, Cos \, \alpha - x \, Sin \, \alpha)] \quad (m),$$

welche den Abstand r angibt, in welchem die Resultante $\mathfrak{R}$ vom Anfangspuncte der Coordinaten durchgeht, während die beiden obigen Gleichungen $P' = \mathfrak{R} \, Cos \, a$ und $Q' = \mathfrak{R} \, Sin \, a$, d. i.

$$\mathfrak{R} \, Cos \, a = \Sigma(P \, Cos \, \alpha) \text{ und } \mathfrak{R} \, Sin \, a = \Sigma(P \, Sin \, \alpha) \; . \; . \; . \; (n),$$

die Gröfse und Richtung derselben angeben.

Nach den vorhin aufgestellten Bedingungsgleichungen (l) folgt, dafs eine beliebige Anzahl von in derselben Ebene liegenden Kräften im Gleichgewichte steht, wenn 1. die Summe der Seitenkräfte derselben nach den Richtungen zweier beliebiger in dieser Ebene angenommenen rechtwinkeligen Achsen jede für sich gleich Null und 2. die Summe der statischen Momente der Kräfte in Beziehung auf irgend einen in der Ebene angenommenen Punct ebenfalls gleich Null ist.

Hätte die Ebene, in welcher die Kräfte liegen, einen festen Punct, so brauchte ihre Resultirende nicht mehr $= 0$ zu seyn, sondern es würde für das Gleichgewicht hinreichen, dafs diese durch den festen Punct geht. Nimmt man diesen Punct zum Ursprung der Coordinaten, so reducirt sich die Bedingung des Gleichgewichtes auf die einzige Gleichung $\Sigma(Pp) = 0$, während der Werth der Resultante

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\left\{[\Sigma(P \, Cos \, \alpha)]^2 + [\Sigma(P \, Sin \, \alpha)]^2\right\}}$$

den Druck gegen diesen festen Punct angibt.

Wären die sämmtlichen Kräfte parallel, so wäre $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$, folglich hätte man $\mathfrak{R} \, Cos \, a = Cos \, \alpha \, \Sigma(P)$, $\mathfrak{R} \, Sin \, a = Sin \, \alpha \, \Sigma(P)$ und $\mathfrak{R} \, r = \Sigma(Pp)$, woraus sofort

$$Cos \, a = Cos \, \alpha, \quad Sin \, a = Sin \, \alpha \text{ und } \mathfrak{R} = \Sigma(P)$$

folgt; es ist also die Resultante in diesem Falle (wie bekannt) den Seitenkräften parallel und ihrer Summe gleich.

Für das Gleichgewicht ist $\mathfrak{R} = 0$, also $\Sigma(P) = 0$ und $\Sigma(Pp) = 0$.

Anmerkung 2. Wir können jetzt auch auf den allgemeinen Fall übergehen und die Gleichgewichtsbedingungen für ein System von fest mit einander verbundenen Puncten bestimmen, auf welche Kräfte nach beliebigen Richtungen im Raume wirken.

Es seyen nämlich $P, P_1, P_2 \ldots$ diese Kräfte; x, y, z, x_1, y_1, z_1 u. s. w. die auf irgend ein rechtwinkeliges Achsensystem bezogenen Coordinaten ihrer Angriffspuncte; $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ u. s. w. die Winkel, welche die Kräfte beziehungsweise mit den Achsen der x, y, z bilden. Diefs vorausgesetzt, zerlege man jede Kraft P in drei mit den Coordinatenachsen parallele Kräfte, so sind diese (Nr. 15) für die Kraft P beziehungsweise $P\, Cos\, \alpha$, $P\, Cos\, \beta$, $P\, Cos\, \gamma$; für jene P_1: $P_1\, Cos\, \alpha_1$, $P_1\, Cos\, \beta_1$, $P_1\, Cos\, \gamma_1$ u. s. w. Man verlängere ferner die (mit der Achse der x parallele) Kraft $P\, Cos\, \alpha$ bis zu ihrem Durchschnitt N (Fig. 9, a) mit der Ebene der yz; so hat dieser Punct N die Coordinaten $An = y$ und $Am = z$. Zerlegt man diese Kraft $P\, Cos\, \alpha$ in zwei gleiche mit ihr parallele Kräfte, welche in derselben und zwar in der durch pq gehenden Ebene liegen (wofür $Ap = Aq$ ist), so fällt von diesen beiden, mit der Achse der x parallelen Kräfte $\frac{1}{2} P\, Cos\, \alpha$, eine in die Ebene der xy und hat von der Achse der x den Abstand $Ap = 2An = 2y$, und die andere in die Ebene der xz in den Abstand $Aq = 2Am = 2z$ von dieser Achse.

Zerlegt man auf gleiche Weise auch die übrigen mit der Achse der x parallelen Kräfte $P_1\, Cos\, \alpha_1 \ldots$ jede in zwei gleiche dieser Achse parallele Kräfte, so erhält man für das System der mit der Achse der x parallelen Seitenkräfte zwei Gruppen solcher mit dieser Achse paralleler Kräfte $\frac{1}{2} P\, Cos\, \alpha$, $\frac{1}{2} P_1\, Cos\, \alpha_1 \ldots$, wovon die eine Gruppe in der Ebene der xy in den Entfernungen beziehungsweise $2y$, $2y_1 \ldots$ und die zweite in der Ebene der xz in den Entfernungen $2z$, $2z_1 \ldots$ wirksam ist.

Eben so kann man das der Achse der y parallele System der Seitenkräfte $P\, Cos\, \beta$, $P_1\, Cos\, \beta_1 \ldots$ durch zwei Gruppen dieser Achse parallele Kräfte ersetzen, von denen die eine in der Ebene der xy in den Entfernungen $2x$, $2x_1 \ldots$ und die andere Gruppe in der Ebene der yz in den Entfernungen $2z$, $2z_1 \ldots$ wirksam ist.

Endlich kann man auch für das dritte System der mit der Achse der z parallelen Seitenkräfte $P\, Cos\, \gamma$, $P_1\, Cos\, \gamma_1 \ldots$ zwei Gruppen von mit derselben Achse der z parallelen Kräfte $\frac{1}{2} P\, Cos\, \gamma$, $\frac{1}{2} P_1\, Cos\, \gamma_1 \ldots$ substituiren, wovon die eine Gruppe in der Ebene der xz liegt und deren einzelnen Kräfte die Abstände $2x$, $2x_1 \ldots$, die andere in der Ebene der yz wirksam ist, und die Abstände $2y$, $2y_1 \ldots$ von dieser Achse der z haben.

Durch dieses Verfahren hat man aber anstatt der ursprünglichen Kräfte $P, P_1 \ldots$ welche ganz willkürliche Richtungen im Raume haben können, durchaus Kräfte erhalten, welche lediglich in den 3 coordinirten Ebenen wirksam, und darin in je zwei, beziehungsweise mit den in diesen Ebenen liegenden Achsen parallelen Gruppen vertheilt sind; es ist klar, dafs wenn in jeder dieser 3 coordinirten Ebenen Gleichgewicht besteht, auch das ganze System im Gleichgewichte seyn mufs.

Nun sind aber die Bedingungen für das Gleichgewicht in den 3 genannten Ebenen der xy, xz, yz beziehungsweise (nach den vorigen Relationen (n) und (m), wenn man $\mathfrak{R} = 0$ setzt):

$\frac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\,\alpha)=0,\ \frac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\,\beta)=0,\ \frac{1}{2}\Sigma(P\,[2y\, Cos\,\alpha - 2x\, Cos\,\beta])=0$
$\frac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\,\alpha)=0,\ \frac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\,\gamma)=0,\ \frac{1}{2}\Sigma(P\,[2z\, Cos\,\alpha - 2x\, Cos\,\gamma])=0$
$\frac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\,\beta)=0,\ \frac{1}{2}\Sigma(P\, Cos\,\gamma)=0,\ \frac{1}{2}\Sigma(P\,[2z\, Cos\,\beta - 2y\, Cos\,\gamma])=0$

Da jedoch diese 9 Gleichungen nur 6 verschiedene ausmachen, so wird das angenommene freie System im Gleichgewichte seyn, wenn die Kräfte P, P_1 . . folgenden 6 Bedingungsgleichungen Genüge leisten:

$$(s)\left\{\begin{array}{l} \Sigma(P\, Cos\,\alpha)=0,\ \Sigma(P\, Cos\,\beta)=0,\ \Sigma(P\, Cos\,\gamma)=0 \\ \Sigma(P\,[y\, Cos\,\alpha - x\, Cos\,\beta])=0 \\ \Sigma(P\,[z\, Cos\,\alpha - x\, Cos\,\gamma])=0 \\ \Sigma(P\,[z\, Cos\,\beta - y\, Cos\,\gamma])=0 \end{array}\right.$$

Auch läfst sich leicht zeigen, dafs ohne Erfüllung dieser Gleichungen das Gleichgewicht nicht bestehen kann.

Ist das System nicht frei, sondern z. B. durch einen festen Punct gehalten, um welchen es rotiren kann; so ist es für das Gleichgewicht nicht mehr nothwendig, dafs die Resultirende Null sey, sondern es genügt, dafs diese durch den festen Punct geht. Nimmt man diesen Punct zum Ursprung der Coordinaten, so bilden die 3 letzten Gleichungen der vorigen Relationen (s) die hier nöthigen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht (weil jetzt $\mathfrak{r}$ statt $\mathfrak{R}$ Null ist)

Wird das System durch zwei feste Puncte oder durch eine feste Achse gehalten, so werden alle zu dieser Achse parallelen und auf diese perpendiculären Kräfte durch ihren Widerstand aufgehoben. Nimmt man daher diese Achse zu einer der Coordinatenachsen, z. B. für jene der z, so werden alle in der Ebene der xz und yz liegenden Kräfte aufgehoben oder vernichtet und es wird also für das Gleichgewicht nur nöthig seyn, dafs die Resultante der in der Ebene der xy wirksamen Kräfte nach der Achse der z gerichtet sey, d. h. dafs sie durch den Ursprung der Coordinaten gehe; dadurch wird die Bedingung des Gleichgewichtes auf die einzige Gleichung $\Sigma(P\,[y\, Cos\,\alpha - x\, Cos\,\beta])=0$ reducirt, so, dafs also in diesem Falle nur die Summe der stat. Momente in Beziehung auf diese feste Achse $=0$ zu seyn braucht.

Nimmt man an, dafs die sämmtlichen Kräfte z unter einander parallel sind, so darf man nur $\alpha=\alpha_1=\alpha_2=\ldots,\ \beta=\beta_1=\beta_2=\ldots$ und $\gamma=\gamma_1=\gamma_2=\ldots$ setzen, um für das Gleichgewicht aus den Relationen (s) die Bedingungsgleichungen zu erhalten:

$$Cos\,\alpha\,\Sigma(P)=0,\ Cos\,\beta\,\Sigma(P)=0,\ Cos\,\gamma\,\Sigma(P)=0,\ \text{d. i.}\ \Sigma(P)=0$$

und $$Cos\,\alpha\,\Sigma(Py) - Cos\,\beta\,\Sigma(Px)=0,\ Cos\,\alpha\,\Sigma(Pz) - Cos\,\gamma\,\Sigma(Px)=0$$
$$Cos\,\beta\,\Sigma(Pz) - Cos\,\gamma\,\Sigma(Py)=0$$

welchen letztern Gleichungen genügt wird, wenn

$$\Sigma(Px)=0,\ \Sigma Py)=0,\ \Sigma(Pz)=0\ \text{ist.}$$

Findet das Gleichgewicht nicht Statt und haben die Kräfte die Resultirende R, welche mit den Achsen der x, y, z beziehungsweise die Winkel a, b, c bildet; so darf man zur Herstellung des Gleichgewichtes offenbar zu den Kräften P, P_1 . . nur noch eine der R gleiche und gerade entgegengesetzt wirkende Kraft hinzufügen; dadurch gehen die vorigen Bedingungsgleichungen über in folgende:

$$Cos\,\alpha\,\Sigma(P) - R\,Cos\,a = 0,\quad Cos\,\beta\,\Sigma(P) - R\,Cos\,b = 0,\quad \text{und}$$
$$Cos\,\gamma\,\Sigma(P) - R\,Cos\,c = 0,$$
woraus zuerst $R = \Sigma\,(P)$ und $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ folgt, und, wenn x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punctes dieser Resultirenden R sind ferner:
$$Cos\,\alpha\,[\Sigma(Py) - y'\,\Sigma(P)] = Cos\,\beta\,[\Sigma(Px) - x'\,\Sigma(P)]$$
$$Cos\,\alpha\,[\Sigma(Pz) - z'\,\Sigma(P)] = Cos\,\gamma\,[\Sigma(Px) - x'\,\Sigma(P)]$$
$$Cos\,\beta\,[\Sigma(Pz) - z'\,\Sigma(P)] = Cos\,\gamma\,[\Sigma(Py) - y'\,\Sigma(P)]$$
welchen letztern 3 Gleichungen offenbar für
$$x' = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)},\quad y' = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)},\quad z' = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)}$$
Genüge geleistet wird, und welches sofort (Nr. 17, Relat. 3) die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte sind.

Auf gleiche Weise hätte man schon in dem allgemeinen, durch die Relationen (s) gegebenen Falle die Resultirende bestimmen können, wenn kein Gleichgewicht vorausgesetzt worden wäre.

Schwerpunct der Linien.

(§. 44.)

22. Soll allgemein für irgend eine Curve im Raume BB' (Fig. 10) der Schwerpunkt bestimmt werden, so beziehe man diese auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem AX, AY, AZ, bezeichne die Coordinaten irgend eines Punctes M dieser Curve mit x, y, z ($AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$), setze die Länge des variablen Bogens $BM = s$, so wie die des ganzen Bogens $BB' = l$; so stellt $\cancel{l}\,ds$ das diesem Puncte M entsprechende Curvenelement und da man dieses (nach der in §. 44 gemachten Voraussetzung) gleich unmittelbar statt dem Gewichte des materiellen Punctes x, y, z setzen kann, $z\,ds$ das Moment dieses Gewichtes auf die Ebene der xy bezogen vor. Bezeichnet man ferner die Werthe von s auf die Endpunkte B, B' des Bogens $BB' = l$ bezogen, beziehungsweise mit s_0, s_1; so stellt das bestimmte Integral $\int_{s_0}^{s_1} z\,ds$ die algebraische Summe der Momente $\Sigma\,(Pz)$ in den Relationen (1) von **17.** vor, wobei P unendlich klein ist und statt ds steht. Eben so sind die Integrale $\int_{s_0}^{s_1} y\,ds$ und $\int_{s_0}^{s_1} x\,ds$ die Summe der Momente dieser Gewichte auf die Ebenen xz und yz bezogen, so, daſs wegen $\mathfrak{R} = l$, die genannten Relationen (1) in **17.** zur Bestimmung des Schwerpunctes x, y, z (dort Mittelpunct der parallelen Kräfte genannt) einer krummen Linie im Raume, hier in folgende übergehen: