Erster Abschnitt.

Statik.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

(§. 14.)

1. Wirken zuerst zwei Kräfte P und Q auf einen Punct A (Fig. 1) unter einem rechten Winkel nach den Richtungen AB und AC, und nimmt man an, daſs ihre Mittelkraft $\mathfrak{R}$, welche nothwendig mit den beiden erstern in derselben Ebene liegen muſs, die Richtung AD hat, wofür W. $BAD = x$, folglich W. $CAD = \frac{\pi}{2} - x = x'$ seyn soll; so zeigt eine ganz einfache Betrachtung, daſs jede der beiden Seitenkräfte P und Q auf irgend eine Weise von ihrer Mittelkraft $\mathfrak{R}$ und dem entsprechenden Winkel x oder x' abhängen muſs, so daſs, wenn F irgend ein Functionszeichen vorstellt, sofort $P = F(\mathfrak{R}, x)$ und eben so $Q = F(\mathfrak{R}, x')$ gesetzt werden kann. Da sich jedoch das Gesetz der Abhängigkeit zwischen P, R, x offenbar nicht ändern darf, wie groſs oder klein man auch die beliebig zu wählende oder zum Grunde zu legende Kräfteeinheit (ob man das Loth, Pfund u. s. w. zur Einheit nimmt) annehmen mag, so folgt als nähere Bestimmung der Form:

$$P = \mathfrak{R}\varphi(x) \;..\; (1) \text{ und } Q = \mathfrak{R}\varphi(x') \;..\; (2),$$

wobei φ ein zwar noch unbestimmtes, jedoch in beiden Relationen (1) und (2) einerlei Bedeutung habendes Functionszeichen ist.

Unter dieser Form bleibt die Abhängigkeit jeder Seitenkraft von der Mittelkraft und dem eingeschlossenen Winkel in der That ungeändert, wie sich auch die Kräfteeinheit ändern mag, d. h die Relationen (1) und (2) bleiben dieselben, wenn man auch diese Einheit n Mal gröſser oder kleiner nimmt, weil in diesen beiden Fällen P, Q und $\mathfrak{R}$ beziehungsweise in $\frac{P}{n}, \frac{Q}{n}, \frac{\mathfrak{R}}{n}$ oder $nP, nQ, n\mathfrak{R}$ übergehen, wodurch in diesen Relationen der Factor $\frac{1}{n}$ oder n wieder wegfällt

2. Zieht man durch den Punct A unter einem beliebigen Winkel z mit AD die Gerade AG und darauf perpendikulär jene EF, setzt W. $EAB = y$, wodurch W. $FAC = \frac{\pi}{2} - y = y'$ und $z = \frac{\pi}{2} - (x+y)$ wird, und zerlegt die Kraft P in zwei nach den (ebenfalls wieder einen rechten Winkel einschliefsenden) Richtungen AG und AE wirkende Seitenkräfte p und p', so wie die Kraft Q in q und q' nach den Richtungen AG und AF; so hat man nach dem nämlichen Gesetze, welches durch die vorigen Relationen (1) und (2) ausgedrückt ist, wegen W. $BAG = y'$ und W. $CAG = y$, sofort:

$$\left.\begin{array}{l} p' = P\varphi(y), \quad p = P\varphi(y') \\ q' = Q\varphi(y'), \quad q = Q\varphi(y) \end{array}\right\} \ (3),$$

wobei φ durchaus dieselbe Bedeutung wie in den Relationen (1) und (2) hat.

3. Läfst man AG mit AD zusammenfallen, wodurch $z = o$ $y = \frac{\pi}{2} - x = x'$ und $y' = \frac{\pi}{2} - y = x$ wird, so erhält man aus diesen Relationen (3), wenn unter einem die aus (1) und (2) folgenden Werthe für $\varphi(x)$ und $\varphi(x')$, d. i. $\frac{P}{\Re}$ und $\frac{Q}{\Re}$ gesetzt werden:

$$p' = P\varphi(x') = \frac{PQ}{\Re}, \quad q' = Q\varphi(x) = \frac{PQ}{\Re}$$

$$p = P\varphi(x) = \frac{P^2}{\Re}, \quad q = Q\varphi(x') = \frac{Q^2}{\Re}.$$

Nun wirken aber von den vier Kräften p, q, p', q', welche jene beiden P und Q ersetzen und mit diesen also auch dieselbe Resultirende $\Re$ besitzen müssen, die beiden erstern nach einerlei Richtung AG oder AD, und die letztern nach gerad entgegengesetzten Richtungen AE und AF, so, dafs sich diese letzteren, weil sie, wie die vorigen Relationen oder Werthe von p' und q' zeigen, gleich grofs sind, aufheben und die Summe $p + q$ sofort die Resultirende $\Re$ bildet, wodurch

$$\Re = \frac{P^2}{\Re} + \frac{Q^2}{\Re} \quad \text{oder} \quad \Re^2 = P^2 + Q^2 \ . \ . \ (I)$$

wird. Es kann daher die aus den beiden Seitenkräften P und Q hervorgehende Mittelkraft $\Re$ ihrer Gröfse nach durch die Diagonale AD des Rechteckes BC vorgestellt werden, in welchen die Seiten AB und AC den Kräften P und Q proportional abgeschnitten sind oder geradezu diese Kräfte vorstellen.

4. Um ferner auch die Richtung dieser Mittelkraft $\mathfrak{R}$ zu bestimmen, welche, wie bereits bemerkt, in der Ebene der Seitenkräfte liegen mufs, so gehen wir auf die aus der Zerlegung von P und Q erhaltenen vier Seitenkräfte p, q, p', q' zurück, wovon die beiden erstern die nach AG wirkende Mittelkraft $p + q$ und die beiden letztern, je nachdem p' oder q' die gröfsere ist, die nach AE oder AF wirksame Mittelkraft $p' - q'$ oder $q' - p'$ geben, so, dafs wenn man (was ganz gleichgiltig ist) den ersten dieser beiden Fälle annimmt, auf den Punct A die zwei Kräfte $p + q$ und $p' - q'$ nach den auf einander perpendikulären Richtungen AG und AE wirken, welche sofort mit den ursprünglichen beiden Kräften P und Q die nämliche Resultirende $\mathfrak{R}$ besitzen müssen, und, wie wir vorläufig angenommen haben, in die Richtung AD fallen soll.

Nun folgt aber wieder nach den ersten Relationen (1) oder (2):

$$p' - q' = \mathfrak{R}\varphi(x + y) \quad \text{und} \quad p + q = \mathfrak{R}\varphi(z),$$

oder wenn man für p, q, p', q' die Werthe aus den vorigen Gleichungen (3), dabei die Werthe von P und Q aus (1) und (2) substituirt, ferner Kürze halber $\varphi(x') = \varphi(90^0 - x) = \varphi'(x)$ und eben so $\varphi(y') = \varphi(90^0 - y) = \varphi'(y)$, $\varphi(z) = \varphi[90^0 - (x+y)] = \varphi'(x+y)$ setzt und dann durchaus mit dem Factor R abkürzt, auch:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi'(x)\varphi'(y) \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\varphi'(x + y) = \varphi(x)\varphi'(y) + \varphi(y)\varphi'(x) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

5. Nun mufs für jeden reellen Werth von x der Quotient $\frac{Q}{x} < \mathfrak{R}$ und $> P$ seyn. Denn könnte erstens $\frac{Q}{x} \overline{\gtrless} \mathfrak{R}$, d. i. $Q \overline{\gtrless} \mathfrak{R}x$ seyn, so müfste eben so $P \overline{\gtrless} \mathfrak{R}x'$, also $P + Q \overline{\gtrless} \mathfrak{R}(x + x')$, nämlich $P + Q \overline{\gtrless} \mathfrak{R}\frac{\pi}{2}$, folglich $P^2 + Q^2 + 2PQ \overline{\gtrless} \mathfrak{R}^2\frac{\pi^2}{4}$, oder wegen $P^2 + Q^2 = \mathfrak{R}^2$ (1 in **3.**) auch

$$2PQ \overline{\gtrless} \mathfrak{R}^2\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) \quad \text{oder} \quad \frac{2PQ}{\mathfrak{R}^2} \overline{\gtrless} \frac{(3{\cdot}14)^2}{4} - 1,$$

d. i. $\frac{2PQ}{P^2 + Q^2} \overline{\gtrless} 1{\cdot}46$ . . Statt finden, was jedoch nicht möglich ist, indem bekanntlich für was immer für zwei reelle Gröfsen P und Q stets $P^2 + Q^2 \overline{\gtrless} 2PQ$, also $\frac{2PQ}{P^2 + Q^2} \overline{\lessgtr} 1$ seyn mufs.

Könnte aber zweitens $\frac{Q}{x} \overline{\lessgtr} P$, d. i. $Q \overline{\lessgtr} Px$ seyn, so müfste auf gleiche Weise auch $P \overline{\lessgtr} Qx'$ oder, wenn man zusammen multiplicirt, $PQ \gtreqless PQxx'$, d. i. $xx' \lesseqgtr 1$ . . (α) seyn. Da nun aber die Summe der beiden Gröfsen x, x' constant, d. i. $x + x' = \frac{\pi}{2}$ ist, so wird, wie bekannt, ihr Product am gröfsten für $x' = x$, also hier für $x = x' = \frac{\pi}{4}$, so, dafs dieses gröfste Product sofort $xx' = \frac{\pi^2}{16} = \cdot 61$ ist, womit die vorige Relation (α) im Widerspruche steht, diese daher ebenfalls nicht bestehen kann.

Da also der genannte Quotient $\frac{Q}{x}$ stets zwischen den Grenzen $\mathfrak{R}$ und P liegt, diese Grenzen aber einander um so näher rücken, je kleiner x wird und diese endlich für $x = 0$ (wofür auch $Q = 0$ wird) zusammenfallen und dann $P = \mathfrak{R}$ ist, so wird dafür auch dieser Quotient $\frac{Q}{x} = \mathfrak{R}$, oder wegen $Q = \mathfrak{R}\,\varphi'(x)$ sofort $\frac{\varphi'(x_0)}{x_0} = 1$ und aus der Relation (1) ebenfalls für $x = 0$, $\varphi(x_0) = 1$, d. h. die gesuchte Function φ mufs die Eigenschaft besitzen, dafs sowohl $\varphi(x)$ als auch der Quotient $\frac{\varphi'(x)}{x} = \frac{\varphi(90^\circ - x)}{x}$ für $x = 0$ gleich 1 wird, so wie auch überdiefs aus der vorigen Relation $Q = \mathfrak{R}\,\varphi'(x)$, wegen $Q = 0$, noch $\varphi'(x_0) = 0$ folgt.

Diese Eigenschaften, verbunden mit den Relationen (4) und (5) geben (*Burg's* Lehrbuch der höhern Mathematik. Bd. I. S. 329) $\varphi(x) = Cos\, x$, folglich $\varphi'(x) = Sin\, x$, so, dafs also dadurch die Natur und Bedeutung des oben angenommenen Functionszeichens φ vollkommen bestimmt ist und sonach die Seitenkräfte P und Q nach den obigen Relationen (1) und (2) durch

$$P = \mathfrak{R}\, Cos\, x \quad \text{und} \quad Q = \mathfrak{R}\, Cos\, x' = \mathfrak{R}\, Sin\, x$$

ausgedrückt werden, oder die in **3.** erwähnte Diagonale AD des Rechteckes BC zugleich auch die Richtung der Resultirenden $\mathfrak{R}$ darstellt *).

6. Zerlegt man also irgend eine Kraft $\mathfrak{R}$ in zwei auf einander senkrecht wirkende Seitenkräfte P und Q, so ist jede derselben gleich dem Producte aus der

---

*) Wir haben diese Art der Entwicklung und Beweisführung zum ersten Male im XIX. Bde der Jahrbücher des k. k. polyt. Institutes bekannt gemacht.

M i t t e l k r a f t i n d e n C o s i n u s d e s e i n g e s c h l o s s e n e n W i n k e l s.

Schneidet man auf den Richtungen AN, AM der beiden gegebenen Kräfte P und Q die Stücke AB, AC diesen Kräften proportional ab, construirt aus diesen Puncten B, C das Rechteck BC und zieht darin die Diagonale AD, so stellt diese die Resultirende $\mathfrak{R}$ sowohl der Gröfse als Lage nach vor.

7. Schliefsen die Richtungen der Kräfte P, Q keinen r e c h t e n, sondern einen b e l i e b i g e n Winkel BAC (Fig. 2) ein, so schneide man zur Bestimmung ihrer Mittelkraft darauf die Stücke AB und AC diesen Kräften proportional ab, ergänze aus diesen Puncten B, C das Parallelogramm $ABDC$, ziehe die Diagonale AD, darauf perpendikulär die Geraden FAE, CG und BH, so wie noch mit dieser Diagonale parallel die Geraden CF und BE; so erhält man dadurch die beiden Rechtecke FG und EH, in welchen, wie man sogleich sieht, $AE = AF \ldots (m)$ und $AG = HD \ldots (n)$ ist. Da man sich aber zufolge des vorigen Satzes in Nr. 6 die Kraft P in die zwei auf einander senkrecht wirkende Seitenkräfte AE und AH, so wie die Kraft Q in die beiden Seitenkräfte AF und AG zerlegt denken kann, wodurch statt der beiden Kräfte P und Q die vier gleich geltenden, dieselbe Resultirende $\mathfrak{R}$ besitzenden Kräfte AE, AF, AG, AH entstehen, und da sich davon die beiden erstern als gleich und entgegengesetzt wirkend aufheben, dagegen die beiden letztern nach e i n e r l e i, und zwar nach der Richtung AD wirken, deren Mittelkraft daher $= AH + AG$ oder wegen $AG = HD$ auch $= AH + HD = AD$ ist; so stellt diese Diagonale AD zugleich auch die Resultirende $\mathfrak{R}$ aus den beiden Kräften P und Q vor.

Bestimmung der Mittelkraft oder der Seitenkräfte durch Rechnung.

8. Schliefsen die Richtungen der auf den Punct A (Fig. 2) wirkenden beiden Kräfte P und Q den Winkel $CAB = \alpha$ ein, und bezeichnet man den Winkel BAD, welchen die Seitenkraft P mit der Resultirenden $\mathfrak{R}$ bildet, durch φ; so hat man ganz einfach durch die Auflösung des Dreieckes ABD, in welchem $AB = P$, $BD = Q$, $AD = \mathfrak{R}$, Winkel $DAB = \varphi$, W. $ADB = \alpha - \varphi$ und W. $ABD = 180^0 - \alpha$ ist, nach bekannten Regeln:

$$(1)\ \mathfrak{R} = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q\,Cos\,\alpha)},\ (2)\ P = \frac{\mathfrak{R}\,Sin\,(\alpha - \varphi)}{Sin\,\alpha},$$

$$(3)\ Q = \frac{\mathfrak{R}\,Sin\,\varphi}{Sin\,\alpha},\ (4)\ Cos\,\varphi = \frac{P + Q\,Cos\,\alpha}{\mathfrak{R}},$$

$$(5)\ Cos\,(\alpha - \varphi) = \frac{Q + P\,Cos\,\alpha}{\mathfrak{R}}\ \text{und}\ (6)\ Tang\,\varphi = \frac{Q\,Sin\,\alpha}{P + Q\,Cos\,\alpha}.$$

Alle diese Formeln lassen sich auch auf die bekannte Weise (*Burg's* Compend. der höhern Mathem. Cap. IV.; dessen „Sammlung trigonom. Formeln." S. 41; oder dessen Handbuch der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie) für die Anwendung der Logarithmen einrichten.

9. Für den besondern Fall, als die Seitenkräfte einen rechten Winkel einschliefsen, gehen diese Formeln, wegen $\alpha = 90^0$, in die folgenden einfachern über:

$$(1)\ \mathfrak{R} = \sqrt{(P^2 + Q^2)},\ (2)\ P = \mathfrak{R}\,Cos\,\varphi,\ (3)\ Q = \mathfrak{R}\,Sin\,\varphi$$

| φ

$$\text{und}\ (4)\ Tang\,\cancel{\alpha} = \frac{Q}{P},$$

was sofort auch mit den in **3.** und **5.** entwickelten Relationen übereinstimmt.

Beispiel Wirken auf einen Punct A (Fig 2) die zwei Kräfte $P = 48{\cdot}34$ und $Q = 26{\cdot}52$ Pfund unter einem Winkel von $\alpha = 99^\circ, 24', 13''$; so erhält man nach den Formeln (1) und (6) in **8.** $\mathfrak{R} = 55{\cdot}62$ Pf. und $\varphi = 40^\circ, 22', 26{\cdot}6''$, wodurch sofort die Gröfse und Lage der Mittelkraft gegeben ist.

Gleichgewichtsbedingungen für *drei* auf einen Punct wirkende, in *einerlei* Ebene liegende Kräfte.

(§ 16. Anmerkung.)

10. Wirken auf den freibeweglichen Punct A (Fig. 3) nach den durch die Pfeile angedeuteten Richtungen die in einerlei Ebene liegenden Kräfte P_1, P_2, P_3, und sollen diese unter sich im Gleichgewichte stehen; so mufs nothwendig die Resultirende aus irgend zwei dieser Kräfte, z. B. jene von P_1 und P_2 mit der dritten Kraft P_3 im Gleichgewichte, dieser also gleich und gerade entgegengesetzt seyn, es mufs nämlich, wenn die Geraden AB, AC, AD diese drei Kräfte darstellen, die Diagonale AE des Parallelogrammes BC mit AD gleich grofs seyn und in der Verlängerung der Geraden DA liegen.

Bezeichnet man nun die gegebenen Winkel CAB, BAD, CAD

beziehungsweise durch $\widehat{P_1 P_2}$, $\widehat{P_1 P_3}$, $\widehat{P_2 P_3}$; so hat man aus dem Dreiecke ABE, wegen $AB = P_1$, $BE = P_2$ und $AE = AD = P_3$ sofort:

$$P_1 : P_2 : P_3 = Sin\, AEB : Sin\, BAE : Sin\, ABE,$$

oder auch (da zwei Nebenwinkel einerlei Sinus haben):

$$P_1 : P_2 : P_3 = Sin\, \widehat{P_2 P_3} : Sin\, \widehat{P_1 P_3} : Sin\, \widehat{P_1 P_2},$$

wornach also jede Kraft dem Sinus des Winkels der beiden übrigen Kräfte proportional ist.

Bestimmung der Resultirenden aus einer *beliebigen* Anzahl von Kräften, welche auf einen frei beweglichen Punct wirken und in *ein und derselben* Ebene liegen.

(§. 16)

11. Wirken auf den Punct A (Fig. 4) die Kräfte $P, P_1, P_2, P_3 \ldots$ nach den angedeuteten Richtungen in einerlei Ebene, so lege man zur Bestimmung ihrer Resultirenden in derselben Ebene durch den Punct A ein beliebiges rechtwinkeliges Achsensystem XX', YY', bezeichne die als bekannt anzusehenden oder gegebenen Winkel, welche die Kräfte P, $P_1 \ldots$ mit der Achse der x bilden, der Reihe nach und nach einerlei Richtung (von den positiven x gegen die positive y) gezählt, durch α, α_1, $\alpha_2 \ldots$ und zerlege endlich die Kraft P in zwei (auf einander senkrechte) Seitenkräfte p, q, wovon die erstere nach AX, die letztere nach AY wirkt, eben so P_1 in zwei Kräfte p_1, q_1 nach AX' und AY, die Kraft P_2 in p_2 und q_2 nach AX' und AY' u. s. w., so hat man nach Nr. **5**: $p = P\, Cos\, \alpha$, $q = P\, Sin\, \alpha$, $p_1 = P_1\, Cos\, \alpha_1$, $q_1 = P_1\, Sin\, \alpha_1$, $p_2 = P_2\, Cos\, \alpha_2$, $q_2 = P_2\, Sin\, \alpha_2$ u. s. w., wobei die Kräfte p positiv oder negativ ausfallen, d. h. von A gegen X oder von A gegen X' hin wirken, je nachdem der entsprechende Winkel α im 1ten oder 4ten, oder im 2ten oder 3ten Quadranten liegt; eben so fallen die nach der Achse YY' wirksamen Seitenkräfte q positiv oder negativ aus, wirken nämlich von A gegen Y oder von A gegen Y', je nachdem der betreffende Winkel α im 1ten oder 2ten, oder im 3ten oder 4ten Quadranten liegt.

12. Bezeichnet man die algebraische Summe der Kräfte p, d. i. die Resultirende aus allen auf der Achse der x wirksamen Seitenkräfte durch P' und eben so die Resultirende aus allen nach der Achse der y wirkenden Seitenkräfte q durch Q'; so wird

$$P' = p + p_1 + p_2 + \ldots \text{ und } Q' = q + q_1 + q_2 + \ldots \text{ d. i.}$$

$$(1) \quad P' = P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\alpha)$$

$$(2) \quad Q' = P\,Sin\,\alpha + P_1\,Sin\,\alpha_1 + \ldots = \Sigma(P\,Sin\,\alpha),$$

wobei sich die richtigen Zeichen der einzelnen Glieder je nach den Werthen der Winkel $\alpha, \alpha_1 \ldots$ von selbst ergeben. Dadurch fallen die Kräfte P' und Q' positiv oder negativ aus, wodurch dann auch die Richtung bekannt ist, nach welcher diese beiden Kräfte (ob von A gegen X oder X', oder von A gegen Y oder Y') wirksam sind.

Legt man den Fall zum Grunde, in welchem P' und Q' positiv ausfallen, diese Kräfte also nach AX und AY wirken, folglich ihre Resultirende in den 1ten Quadranten XAY fällt (für $-P'$, $+Q'$ fällt diese in den 2ten, für $-P'$, $-Q'$ in den 3ten, so wie für $+P'$, $-Q'$ in den 4ten Quadranten), bezeichnet die Gröfse dieser Resultirenden mit $\mathfrak{R}$, so wie ihren Neigungswinkel mit der Achse der x durch φ; so erhält man nach den Relationen in **9.**:

$$(3) \quad \mathfrak{R} = \sqrt{(P'^2 + Q'^2)} \quad \text{und} \quad (4) \quad Tang\,\varphi = \frac{Q'}{P'}.$$

Beispiel. Wirken z. B. auf den Punct A vier Kräfte, $P = 12$, $P_1 = 40$, $P_2 = 15$ und $P_3 = 10$, unter den Winkeln mit der Achse XX' von $\alpha = 30^\circ\,12'$, $\alpha_1 = 112^\circ\,25'\,16''$, $\alpha_2 = 234^\circ\,48'\,24''$ und $\alpha_3 = 342^\circ\,12'\,8''$; so findet man nach den vorigen Relationen (1) und (2):

$$P' = 10{\cdot}3713 - 15{\cdot}2564 - 8{\cdot}6451 + 9{\cdot}5214 = -4{\cdot}0088$$

und $$Q' = 6{\cdot}0362 + 18{\cdot}4881 - 12{\cdot}2582 - 3{\cdot}0566 = +9{\cdot}2095,$$

so dafs also die Mittelkraft aus den Seitenkräften p von A gegen X', und jene aus den Seitenkräften q von A nach Y wirksam ist, daher die gesuchte Resultirende $\mathfrak{R}$ im 2ten Quadranten $X'AY$ liegt.

Nach den weitern Relationen (3) und (4) findet man ferner mit diesen Werthen von P' und Q' sofort:

$$\mathfrak{R} = \sqrt{100{\cdot}8854} = 10{\cdot}0441 \text{ und } \varphi = 113^\circ\,31'\,22{\cdot}8''.$$

13. Bedingungen des Gleichgewichtes. Da für das Gleichgewicht der Kräfte ihre Resultirende $\mathfrak{R} = 0$ seyn mufs, so erhält man als Bedingungsgleichungen für diesen Fall aus der vorigen Relation (3) sofort $P' = 0$ und $Q' = 0$, d. i. (Relat. 1 und 2)

$$P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + P_2\,Cos\,\alpha_2 + \ldots = 0 \text{ oder } \Sigma(P\,Cos\,\alpha) = 0,$$

$$P\,Sin\,\alpha + P_1\,Sin\,\alpha_1 + P_2\,Sin\,\alpha_2 + \ldots = 0 \text{ oder } \Sigma(P\,Sin\,\alpha) = 0.$$

Findet das Gleichgewicht nicht Statt, so läfst sich dieses ganz einfach durch Hinzufügung einer neuen Kraft, welche der Resultirenden der vorhandenen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist, herstellen.

Zusammensetzung von Kräften, welche auf *einen* Punct wirken, jedoch in *verschiedenen* Ebenen liegen.

(§. 17.)

14. Wirken drei Kräfte P, Q, R auf einen frei beweglichen Punct A (Fig. 5) nach den wechselweise auf einander perpendikulären Richtungen AB, AC, AD, und schneidet man diese eben genannten Linien den Kräften proportional ab; so stellt die Diagonale AG des aus den Puncten B, C, D ergänzten rechtwinkeligen Parallelopipedes die Resultirende $\mathfrak{R}$ aus diesen Kräften vor, und zwar ist wegen $AG^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2$ sofort

$$\mathfrak{R} = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)} \ldots (1),$$

und wenn man die Winkel, welche die Diagonale AG mit den drei Seiten AB, AC, AD bildet, der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet, auch

$$Cos\,a = \frac{P}{\mathfrak{R}},\ Cos\,b = \frac{Q}{\mathfrak{R}},\ Cos\,c = \frac{R}{\mathfrak{R}} \ldots (2),$$

wobei noch überdiefs die Relation (*Burg's* Compendium §. 558):

$$Cos\,a^2 + Cos\,b^2 + Cos\,c^2 = 1$$

Statt findet, welche als Rechnungscontrolle benützt werden kann.

15. Wirken die Kräfte, deren Anzahl überhaupt beliebig seyn kann, unter schiefen Winkeln auf den freien Punct A (Fig. 6), so lege man durch diesen Angriffspunct drei Coordinatenachsen AX, AY, AZ rechtwinkelig auf einander und bezeichne die Winkel, welche die Kraft P mit diesen genannten Achsen bildet, der Reihe nach mit α, β, γ, eben so jene der Kraft P_1 mit α_1, β_1, γ_1, jene der Kraft P_2 mit α_2, β_2, γ_2 u. s. w., zerlege ferner die Kraft P in drei auf einander senkrechte und zwar nach den Richtungen AX, AY, AZ wirkende Seitenkräfte p, q, r, eben so P_1 in p_1, q_1, r_1, die Kraft P_2 in die Seitenkräfte p_2, q_2, r_2 u. s. w.; so erhält man nach den Relationen (2) der vorigen Nummer:

$$p = P\,Cos\,\alpha,\quad q = P\,Cos\,\beta,\quad r = P\,Cos\,\gamma$$

und eben so

$$p_1 = P_1\,Cos\,\alpha_1,\quad q_1 = P_1\,Cos\,\beta_1,\quad r_1 = P_1\,Cos\,\gamma_1$$

u. s. w. fort.

Durch diese Zerlegung erhält man aber anstatt der ursprünglichen Kräfte P, P_1, P_2 ... drei Gruppen von Kräften, welche nach den auf einander perpendikulär stehenden Achsen XX', YY' und ZZ' auf den Punct A wirken, so daſs, wenn man ihre Resultirenden beziehungsweise durch P', Q', R' bezeichnet, sofort

$$(m)\quad P' = p + p_1 + p_2 + \ldots,\ Q' = q + q_1 + q_2 + \ldots,$$
$$R' = r + r_1 + r_2 + \ldots \text{ wird.}$$

Bezeichnet man aber die Resultirende aus den ursprünglichen Kräften P, P_1, P_2 . . ., welche zugleich auch jene dieser drei Kräfte P', Q', R', ist, mit $\mathfrak{R}$, und die Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Achsen XX', YY', ZZ' bildet, durch a, b, c; so hat man unmittelbar nach **14.** (Relat. 1 und 2)

$$\mathfrak{R} = \sqrt{(P'^2 + Q'^2 + R'^2)} \quad \text{und}$$
$$Cos\,a = \frac{P'}{\mathfrak{R}},\ Cos\,b = \frac{Q'}{\mathfrak{R}},\ Cos\,c = \frac{R'}{\mathfrak{R}},$$

wodurch die Gröſse und Lage der Resultirenden gegeben ist.

Substituirt man für P', Q', R' und darin ür p, q, r . . . die vorigen Werthe, so wird:

$$P' = P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\alpha),$$
$$Q' = P\,Cos\,\beta + P_1\,Cos\,\beta_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\beta),$$
$$R' = P\,Cos\,\gamma + P_1\,Cos\,\gamma_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\gamma).$$

Anmerkung 1. Für das Gleichgewicht der angenommenen Kräfte müssen die drei Gleichungen $P' = 0$, $Q' = 0$, $R' = 0$ bestehen. Wäre z. B. bloſs $R' = 0$, so wäre nach der vorhergehenden Relation $Cos\,c = \frac{0}{\mathfrak{R}} = 0$ oder $c = 90°$, zum Beweis, daſs in diesem Falle die Resultirende in die Ebene der Achsen XX', YY' fällt. Wäre auſserdem auch $Q' = 0$, so würde auch noch $b = 90°$, zum Zeichen, daſs jetzt die Resultirende $\mathfrak{R}$ mit der Achse XX' zusammenfällt.

Anmerkung 2. Ist der Angriffspunct der Kräfte nicht vollkommen frei, sondern z. B. gezwungen, auf einer gegebenen krummen Fläche oder Linie zu bleiben, auf welcher er sich übrigens wieder ganz frei soll bewegen können, so ist es für das Gleichgewicht nicht mehr nothwendig, daſs die Resultirende aus allen diesen Kräften gleich Null sey, sondern es reicht hin, daſs diese auf der Fläche oder Linie normal stehe, indem sie dann von dem Widerstande der Fläche oder Curve aufgehoben wird. Diese Betrachtung führt im erstern dieser beiden Fälle zu zwei, im letztern zu einer Bedingungsgleichung, und zwar, wenn $F = \varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der krummen Fläche ist; so sind diese für den erstern Fall:

$$P'\left(\frac{dF}{dy}\right) - Q'\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad P'\left(\frac{dF}{dz}\right) - R'\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$$

und für den letztern:

$$P'dx + Q'dy + R'dz = 0.$$

Allgemeine Bestimmung des Mittelpunctes paralleler Kräfte.

(§. 23.)

16. Wirken auf ein System von beliebigen, fest mit einander verbundenen Puncten $M, M_1, M_2 \ldots$ (Fig. 7) nach parallelen, sonst aber beliebigen Richtungen die Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$, so beziehe man, zur Bestimmung ihrer Resultirenden, dieses System auf irgend drei rechtwinkelige Coordinatenachsen AX, AY, AZ, und bezeichne die Coordinaten des Angriffspunctes M durch x, y, z, jene des Punctes M_1 durch x_1, y_1, z_1 u. s. w., so wie endlich jene des Angriffspunctes der Resultirenden $\mathfrak{R}$, d. i. des Mittelpunctes der parallelen Kräfte durch X, Y, Z; fälle ferner aus diesen Puncten $M, M_1, \ldots$ auf die Ebene der xy die Perpendikel $Mm = z$, $M_1 m_1 = z_1$, $M_2 m_2 = z_2$ u. s. w. und ziehe in der durch zz_1 gedachten Ebene $M_1 m$ durch M die Gerade MB parallel zu mm_1 (als Durchschnittslinie der beiden Ebenen $M_1 m$ und xy). Diefs vorausgesetzt, liegt der Angriffspunct N der Mittelkraft aus den beiden Kräften P, P_1, je nachdem diese nach einerlei oder nach entgegengesetzten Richtungen wirken (§§. 20 und 21), entweder in der bestimmten Geraden MM_1 oder in ihrer Verlängerung; nimmt man hier den ersten Fall an, da sich auch der letztere leicht darauf zurückführen läfst, so hat man (§. 20), da diese Mittelkraft $= P + P_1$ ist:

$$P_1 : (P + P_1) = MN : MM_1 = NC : M_1 B$$

(wenn man auch noch aus N auf die Ebene der xy das in der Ebene $M_1 m$ liegende Perpendikel Nn fällt), nämlich $(P + P_1) NC = P_1 . M_1 B$, oder wenn man beiderseits die identische Gleichung

$$(P + P_1) Cn = P . Mm + P_1 . Bm_1$$

(wegen $Cn = Mm = Bm_1$) addirt und reducirt, auch

$$(P + P_1) Nn = P . Mm + P_1 . M_1 m_1 = Pz + P_1 z_1 ;$$

es ist nämlich, wenn man das Product aus der Kraft in das aus ihrem Angriffspunct auf die Ebene der xy gefällte Perpendikel Moment dieser Kraft in Bezug auf diese Ebene nennt, sofort das Moment der Mittelkraft gleich der Summe der Momente der beiden Seitenkräfte.

Ist ferner N_1 der Angriffspunct der Resultirenden $P + P_1 + P_2$ aus dieser Mittelkraft $P + P_1$ und der dritten in M_2 wirkenden parallelen Kraft P_2, und zieht man wieder $N_1 n_1$ perpendikulär auf die Ebene xy; so hat man eben so nach diesem Satze:

$$(P + P_1 + P_2) N_1 n_1 = (P + P_1) N n + P_2 . M_2 m_2,$$

oder wenn man für $(P + P_1) N n$ den vorigen Werth setzt:

$$(P + P_1 + P_2) N_1 n_1 = P z + P_1 z_1 + P_2 z_2,$$

wobei diese Summen immer nur im algebraischen Sinne zu verstehen sind.

Fährt man nun auf diese Weise fort, bis auch die letzte parallele Kraft verbunden ist, so erhält man endlich die Relation:

$$\mathfrak{R} Z = P z + P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots = \Sigma (P z) \quad (k),$$

wobei

$$\mathfrak{R} = P + P_1 + P_2 + \ldots = \Sigma (P) \quad \text{ist.}$$

17. Fällt man nun auch auf die beiden übrigen coordinirten Ebenen der $x z$ und $y z$ aus den oben genannten Angriffspuncten $M, M_1 \ldots$ die Perpendikel, so sind diese nichts anders als beziehungsweise die Ordinaten $y, y_1 \ldots$ und $x, x_1 \ldots$ der Puncte $M, M_1 \ldots$ und man erhält analog mit der vorigen Relation (k) eben so $\mathfrak{R} Y = \Sigma (P y)$ und $\mathfrak{R} X = \Sigma (P x)$, so, dafs man also zur Bestimmung des Mittelpunctes der parallelen Kräfte die nachstehenden Gleichungen hat:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{R} X &= P x + P_1 x_1 + \ldots = \Sigma (P x) \\ \mathfrak{R} Y &= P y + P_1 y_1 + \ldots = \Sigma (P y) \\ \mathfrak{R} Z &= P z + P_1 z_1 + \ldots = \Sigma (P z) \end{aligned}\right\} (1)$$

und $$\mathfrak{R} = P + P_1 + \ldots = \Sigma (P) \ldots \quad (2),$$

aus welchen sich für diesen Punct die Coordinaten ergeben:

$$X = \frac{\Sigma (P x)}{\Sigma (P)}, \quad Y = \frac{\Sigma (P y)}{\Sigma (P)}, \quad Z = \frac{\Sigma (P z)}{\Sigma (P)} \ldots (3)$$

und wobei die sämmtlichen Summen im algebraischen Sinne zu nehmen sind.

18. Liegen die sämmtlichen Angriffspuncte $M, M_1 \ldots$ in ein und derselben Ebene, und nimmt man diese zur Vereinfachung der Rechnung als eine der drei coordinirten Ebenen, z. B. zur Ebene der $x y$; so werden die sämmtlichen durch $z, z_1, z_2 \ldots$ bezeichneten Ordinaten Null, und man erhält aus der 3ten der vorigen Relationen (1) $\mathfrak{R} Z = 0$, also, wenn $\mathfrak{R}$ nicht Null ist (d. h. das Gleichgewicht nicht besteht), $Z = 0$, zum Beweis, dafs in diesem Falle der Mittelpunct der parallelen Kräfte in derselben Ebene der Angriffspuncte $M, M_1 \ldots$ liegt.

Zur Bestimmung dieses Punctes genügen daher (die Puncte $M, M_1 \ldots$ auf zwei in dieser Ebene gezogene rechtwinkelige Achsen bezogen) die beiden Gleichungen: $\mathfrak{R}X = \Sigma(Px)$ und $\mathfrak{R}Y = \Sigma(Py)$, wobei $\mathfrak{R} = \Sigma(P)$ ist.

19. Liegen dagegen die sämmtlichen Puncte $M, M_1 \ldots$ in einer geraden Linie und nimmt man diese zur Achse der x, so erhält man aus den beiden letzten der Relationen (1) in **17.** wegen

$y = y_1 = y_2 = \ldots = 0$ und $z = z_1 = z_2 \ldots = 0$,

wenn das Gleichgewicht nicht Statt hat, also $\mathfrak{R}$ nicht Null ist (da für das Gleichgewicht dieser Punct X, Y, Z ohnehin nicht besteht), sofort $Y = 0$, $Z = 0$, zum Zeichen, daſs in diesem Falle (wie es ohnehin bekannt) der Mittelpunct der parallelen Kräfte in der nämlichen Geraden liegt.

Satz der statischen Momente.

(§. 32.)

20. Wirken auf einen frei beweglichen Punct A (Fig. 8) beliebig viele in ein und derselben Ebene liegende Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ nach den angedeuteten Richtungen, und fällt man aus irgend einem, in derselben Ebene liegenden Punct O auf die Richtungen der Kräfte oder deren Verlängerungen die Perpendikel Oa, $Oa_1 \ldots$ und bezeichnet ihre Gröſse oder Länge beziehungsweise durch $p, p_1, p_2 \ldots$ so sind Pp, $P_1 p_1$ u. s. w. die statischen Momente dieser Kräfte in Beziehung auf den Punct O.

Nimmt man die durch diesen Punct O und den Angriffspunct A gezogene Gerade XX' zur Abscissen- und die durch A darauf perpendikuläre Gerade YY' zur Ordinatenachse, bezeichnet die Winkel, welche die Kräfte $P, P_1 \ldots$ mit XX' einschlieſsen, wie in Nr. **11** durch α, α_1, $\alpha_2 \ldots$ zerlegt wieder, wie dort, jede dieser Kräfte in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte, nämlich nach AX und AY, und bezeichnet gerade so wie dort die Mittelkraft aus allen nach der Achse XX' wirksamen Seitenkräfte mit P', so wie jene nach YY' wirkenden Kräfte mit Q', so, daſs also (wie in **11.**) $P' = P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + \ldots$ und $Q' = P\,Sin\,\alpha + P_1\,Sin\,\alpha_1 + \ldots$ wird; so hat man aus dieser letztern Relation, wenn man den beliebigen Abstand $AO = u$ setzt, wodurch

$$Sin\,\alpha = \frac{p}{u},\quad Sin\,\alpha_1 = \frac{p_1}{u},\quad Sin\,\alpha_2 = \frac{p_2}{u} \ldots$$

wird, sofort:

$$Q' = P\frac{p}{u} + P_1\frac{p_1}{u} + \ldots,$$