Erster Abschnitt.

Statik.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

(§. 14.)

1. Wirken zuerst zwei Kräfte P und Q auf einen Punct A (Fig. 1) unter einem rechten Winkel nach den Richtungen AB und AC, und nimmt man an, daſs ihre Mittelkraft $\mathfrak{R}$, welche nothwendig mit den beiden erstern in derselben Ebene liegen muſs, die Richtung AD hat, wofür W. $BAD = x$, folglich W. $CAD = \frac{\pi}{2} - x = x'$ seyn soll; so zeigt eine ganz einfache Betrachtung, daſs jede der beiden Seitenkräfte P und Q auf irgend eine Weise von ihrer Mittelkraft $\mathfrak{R}$ und dem entsprechenden Winkel x oder x' abhängen muſs, so daſs, wenn F irgend ein Functionszeichen vorstellt, sofort $P = F(\mathfrak{R}, x)$ und eben so $Q = F(\mathfrak{R}, x')$ gesetzt werden kann. Da sich jedoch das Gesetz der Abhängigkeit zwischen P, R, x offenbar nicht ändern darf, wie groſs oder klein man auch die beliebig zu wählende oder zum Grunde zu legende Kräfteeinheit (ob man das Loth, Pfund u. s. w. zur Einheit nimmt) annehmen mag, so folgt als nähere Bestimmung der Form:

$$P = \mathfrak{R}\varphi(x) \;..\; (1) \text{ und } Q = \mathfrak{R}\varphi(x') \;..\; (2),$$

wobei φ ein zwar noch unbestimmtes, jedoch in beiden Relationen (1) und (2) einerlei Bedeutung habendes Functionszeichen ist.

Unter dieser Form bleibt die Abhängigkeit jeder Seitenkraft von der Mittelkraft und dem eingeschlossenen Winkel in der That ungeändert, wie sich auch die Kräfteeinheit ändern mag, d. h die Relationen (1) und (2) bleiben dieselben, wenn man auch diese Einheit n Mal gröſser oder kleiner nimmt, weil in diesen beiden Fällen P, Q und $\mathfrak{R}$ beziehungsweise in $\frac{P}{n}$, $\frac{Q}{n}$, $\frac{\mathfrak{R}}{n}$ oder nP, nQ, $n\mathfrak{R}$ übergehen, wodurch in diesen Relationen der Factor $\frac{1}{n}$ oder n wieder wegfällt

2. Zieht man durch den Punct A unter einem beliebigen Winkel z mit AD die Gerade AG und darauf perpendikulär jene EF, setzt W. $EAB = y$, wodurch W. $FAC = \frac{\pi}{2} - y = y'$ und $z = \frac{\pi}{2} - (x+y)$ wird, und zerlegt die Kraft P in zwei nach den (ebenfalls wieder einen rechten Winkel einschliefsenden) Richtungen AG und AE wirkende Seitenkräfte p und p', so wie die Kraft Q in q und q' nach den Richtungen AG und AF; so hat man nach dem nämlichen Gesetze, welches durch die vorigen Relationen (1) und (2) ausgedrückt ist, wegen W. $BAG = y'$ und W. $CAG = y$, sofort:

$$\left.\begin{array}{l} p' = P\varphi(y),\quad p = P\varphi(y') \\ q' = Q\varphi(y'),\quad q = Q\varphi(y) \end{array}\right\} (3),$$

wobei φ durchaus dieselbe Bedeutung wie in den Relationen (1) und (2) hat.

3. Läfst man AG mit AD zusammenfallen, wodurch $z = o$ $y = \frac{\pi}{2} - x = x'$ und $y' = \frac{\pi}{2} - y = x$ wird, so erhält man aus diesen Relationen (3), wenn unter einem die aus (1) und (2) folgenden Werthe für $\varphi(x)$ und $\varphi(x')$, d. i. $\frac{P}{\mathfrak{R}}$ und $\frac{Q}{\mathfrak{R}}$ gesetzt werden:

$$p' = P\varphi(x') = \frac{PQ}{\mathfrak{R}},\quad q' = Q\varphi(x) = \frac{PQ}{\mathfrak{R}}$$
$$p = P\varphi(x) = \frac{P^2}{\mathfrak{R}},\quad q = Q\varphi(x') = \frac{Q^2}{\mathfrak{R}}.$$

Nun wirken aber von den vier Kräften p, q, p', q', welche jene beiden P und Q ersetzen und mit diesen also auch dieselbe Resultirende $\mathfrak{R}$ besitzen müssen, die beiden erstern nach einerlei Richtung AG oder AD, und die letztern nach gerad entgegengesetzten Richtungen AE und AF, so, dafs sich diese letzteren, weil sie, wie die vorigen Relationen oder Werthe von p' und q' zeigen, gleich grofs sind, aufheben und die Summe $p + q$ sofort die Resultirende $\mathfrak{R}$ bildet, wodurch

$$\mathfrak{R} = \frac{P^2}{\mathfrak{R}} + \frac{Q^2}{\mathfrak{R}} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{R}^2 = P^2 + Q^2 \;.\;.\; (1)$$

wird. Es kann daher die aus den beiden Seitenkräften P und Q hervorgehende Mittelkraft $\mathfrak{R}$ ihrer Gröfse nach durch die Diagonale AD des Rechteckes BC vorgestellt werden, in welchen die Seiten AB und AC den Kräften P und Q proportional abgeschnitten sind oder geradezu diese Kräfte vorstellen.

4. Um ferner auch die Richtung dieser Mittelkraft $\mathfrak{R}$ zu bestimmen, welche, wie bereits bemerkt, in der Ebene der Seitenkräfte liegen mufs, so gehen wir auf die aus der Zerlegung von P und Q erhaltenen vier Seitenkräfte p, q, p', q' zurück, wovon die beiden erstern die nach AG wirkende Mittelkraft $p + q$ und die beiden letztern, je nachdem p' oder q' die gröfsere ist, die nach AE oder AF wirksame Mittelkraft $p' - q'$ oder $q' - p'$ geben, so, dafs wenn man (was ganz gleichgiltig ist) den ersten dieser beiden Fälle annimmt, auf den Punct A die zwei Kräfte $p + q$ und $p' - q'$ nach den auf einander perpendikulären Richtungen AG und AE wirken, welche sofort mit den ursprünglichen beiden Kräften P und Q die nämliche Resultirende $\mathfrak{R}$ besitzen müssen, und, wie wir vorläufig angenommen haben, in die Richtung AD fallen soll.

Nun folgt aber wieder nach den ersten Relationen (1) oder (2):

$$p' - q' = \mathfrak{R}\varphi(x + y) \quad \text{und} \quad p + q = \mathfrak{R}\varphi(z),$$

oder wenn man für p, q, p', q' die Werthe aus den vorigen Gleichungen (3), dabei die Werthe von P und Q aus (1) und (2) substituirt, ferner Kürze halber $\varphi(x') = \varphi(90^0 - x) = \varphi'(x)$ und eben so $\varphi(y') = \varphi(90^0 - y) = \varphi'(y)$, $\varphi(z) = \varphi[90^0 - (x+y)] = \varphi'(x+y)$ setzt und dann durchaus mit dem Factor R abkürzt, auch:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi'(x)\varphi'(y) \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\varphi'(x + y) = \varphi(x)\varphi'(y) + \varphi(y)\varphi'(x) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

5. Nun mufs für jeden reellen Werth von x der Quotient $\frac{Q}{x} < \mathfrak{R}$ und $> P$ seyn. Denn könnte erstens $\frac{Q}{x} \overline{\gtrless} \mathfrak{R}$, d. i. $Q \overline{\gtrless} \mathfrak{R}x$ seyn, so müfste eben so $P \overline{\gtrless} \mathfrak{R}x'$, also $P + Q \overline{\gtrless} \mathfrak{R}(x + x')$, nämlich $P + Q \overline{\gtrless} \mathfrak{R}\frac{\pi}{2}$, folglich $P^2 + Q^2 + 2PQ \overline{\gtrless} \mathfrak{R}^2\frac{\pi^2}{4}$, oder wegen $P^2 + Q^2 = \mathfrak{R}^2$ (1 in **3.**) auch

$$2PQ \overline{\gtrless} \mathfrak{R}^2\left(\frac{\pi^2}{4} - 1\right) \quad \text{oder} \quad \frac{2PQ}{\mathfrak{R}^2} \overline{\gtrless} \frac{(3{\cdot}14)^2}{4} - 1,$$

d. i. $\frac{2PQ}{P^2 + Q^2} \overline{\gtrless} 1{\cdot}46$ . . Statt finden, was jedoch nicht möglich ist, indem bekanntlich für was immer für zwei reelle Gröfsen P und Q stets $P^2 + Q^2 \overline{\gtrless} 2PQ$, also $\frac{2PQ}{P^2 + Q^2} \overline{\lessgtr} 1$ seyn mufs.

Könnte aber zweitens $\frac{Q}{x} \overline{\lessgtr} P$, d. i. $Q \overline{\lessgtr} Px$ seyn, so müfste auf gleiche Weise auch $P \overline{\lessgtr} Qx'$ oder, wenn man zusammen multiplicirt, $PQ \gtreqless PQxx'$, d. i. $xx' \gtreqless 1$ . . (α) seyn. Da nun aber die Summe der beiden Gröſsen x, x' constant, d. i. $x + x' = \frac{\pi}{2}$ ist, so wird, wie bekannt, ihr Product am gröſsten für $x' = x$, also hier für $x = x' = \frac{\pi}{4}$, so, daſs dieses gröſste Product sofort $xx' = \frac{\pi^2}{16} = \cdot 61$ ist, womit die vorige Relation (α) im Widerspruche steht, diese daher ebenfalls nicht bestehen kann.

Da also der genannte Quotient $\frac{Q}{x}$ stets zwischen den Grenzen $\mathfrak{R}$ und P liegt, diese Grenzen aber einander um so näher rücken, je kleiner x wird und diese endlich für $x = 0$ (wofür auch $Q = 0$ wird) zusammenfallen und dann $P = \mathfrak{R}$ ist, so wird dafür auch dieser Quotient $\frac{Q}{x} = \mathfrak{R}$, oder wegen $Q = \mathfrak{R}\,\varphi'(x)$ sofort $\frac{\varphi'(x_0)}{x_0} = 1$ und aus der Relation (1) ebenfalls für $x = 0$, $\varphi(x_0) = 1$, d. h. die gesuchte Function φ muſs die Eigenschaft besitzen, daſs sowohl $\varphi(x)$ als auch der Quotient $\frac{\varphi'(x)}{x} = \frac{\varphi(90^\circ - x)}{x}$ für $x = 0$ gleich 1 wird, so wie auch überdieſs aus der vorigen Relation $Q = \mathfrak{R}\,\varphi'(x)$, wegen $Q = 0$, noch $\varphi'(x_0) = 0$ folgt.

Diese Eigenschaften, verbunden mit den Relationen (4) und (5) geben (*Burg's* Lehrbuch der höhern Mathematik. Bd. I. S. 329) $\varphi(x) = Cos\,x$, folglich $\varphi'(x) = Sin\,x$, so, daſs also dadurch die Natur und Bedeutung des oben angenommenen Functionszeichens φ vollkommen bestimmt ist und sonach die Seitenkräfte P und Q nach den obigen Relationen (1) und (2) durch

$$P = \mathfrak{R}\,Cos\,x \quad \text{und} \quad Q = \mathfrak{R}\,Cos\,x' = \mathfrak{R}\,Sin\,x$$

ausgedrückt werden, oder die in **3.** erwähnte Diagonale AD des Rechteckes BC zugleich auch die Richtung der Resultirenden $\mathfrak{R}$ darstellt *).

6. Zerlegt man also irgend eine Kraft $\mathfrak{R}$ in zwei auf einander senkrecht wirkende Seitenkräfte P und Q, so ist jede derselben gleich dem Producte aus der

---

*) Wir haben diese Art der Entwicklung und Beweisführung zum ersten Male im XIX. Bde der Jahrbücher des k. k. polyt. Institutes bekannt gemacht.

Mittelkraft in den Cosinus des eingeschlossenen Winkels.

Schneidet man auf den Richtungen AN, AM der beiden gegebenen Kräfte P und Q die Stücke AB, AC diesen Kräften proportional ab, construirt aus diesen Puncten B, C das Rechteck BC und zieht darin die Diagonale AD, so stellt diese die Resultirende $\mathfrak{R}$ sowohl der Grösse als Lage nach vor.

7. Schliessen die Richtungen der Kräfte P, Q keinen rechten, sondern einen beliebigen Winkel BAC (Fig. 2) ein, so schneide man zur Bestimmung ihrer Mittelkraft darauf die Stücke AB und AC diesen Kräften proportional ab, ergänze aus diesen Puncten B, C das Parallelogramm $ABDC$, ziehe die Diagonale AD, darauf perpendikulär die Geraden FAE, CG und BH, so wie noch mit dieser Diagonale parallel die Geraden CF und BE; so erhält man dadurch die beiden Rechtecke FG und EH, in welchen, wie man sogleich sieht, $AE = AF$ . . . (m) und $AG = HD$ . . . (n) ist. Da man sich aber zufolge des vorigen Satzes in Nr. 6 die Kraft P in die zwei auf einander senkrecht wirkende Seitenkräfte AE und AH, so wie die Kraft Q in die beiden Seitenkräfte AF und AG zerlegt denken kann, wodurch statt der beiden Kräfte P und Q die vier gleich geltenden, dieselbe Resultirende $\mathfrak{R}$ besitzenden Kräfte AE, AF, AG, AH entstehen, und da sich davon die beiden erstern als gleich und entgegengesetzt wirkend aufheben, dagegen die beiden letztern nach einerlei, und zwar nach der Richtung AD wirken, deren Mittelkraft daher $= AH + AG$ oder wegen $AG = HD$ auch $= AH + HD = AD$ ist; so stellt diese Diagonale AD zugleich auch die Resultirende $\mathfrak{R}$ aus den beiden Kräften P und Q vor.

Bestimmung der Mittelkraft oder der Seitenkräfte durch Rechnung.

8. Schliessen die Richtungen der auf den Punct A (Fig. 2) wirkenden beiden Kräfte P und Q den Winkel $CAB = \alpha$ ein, und bezeichnet man den Winkel BAD, welchen die Seitenkraft P mit der Resultirenden $\mathfrak{R}$ bildet, durch φ; so hat man ganz einfach durch die Auflösung des Dreieckes ABD, in welchem $AB = P$, $BD = Q$, $AD = \mathfrak{R}$, Winkel $DAB = \varphi$, W. $ADB = \alpha - \varphi$ und W. $ABD = 180^0 - \alpha$ ist, nach bekannten Regeln:

$$(1)\ \mathfrak{R} = \sqrt{(P^2 + Q^2 + 2PQ\,Cos\,\alpha)},\ (2)\ P = \frac{\mathfrak{R}\,Sin\,(\alpha - \varphi)}{Sin\,\alpha},$$

$$(3)\quad Q = \frac{\mathfrak{R}\,Sin\,\varphi}{Sin\,\alpha},\quad (4)\quad Cos\,\varphi = \frac{P + Q\,Cos\,\alpha}{\mathfrak{R}},$$

$$(5)\ \ Cos\,(\alpha - \varphi) = \frac{Q + P\,Cos\,\alpha}{\mathfrak{R}}\ \ \text{und}\ (6)\ \ Tang\,\varphi = \frac{Q\,Sin\,\alpha}{P + Q\,Cos\,\alpha}.$$

Alle diese Formeln lassen sich auch auf die bekannte Weise (*Burg*'s Compend. der höhern Mathem. Cap. IV.; dessen „Sammlung trigonom. Formeln.“ S. 41; oder dessen Handbuch der geradlinigen und sphärischen Trigonometrie) für die Anwendung der Logarithmen einrichten.

9. Für den besondern Fall, als die Seitenkräfte einen rechten Winkel einschliefsen, gehen diese Formeln, wegen $\alpha = 90^0$, in die folgenden einfachern über:

$$(1)\ \mathfrak{R} = \sqrt{(P^2 + Q^2)},\ (2)\ P = \mathfrak{R}\,Cos\,\varphi,\ (3)\ Q = \mathfrak{R}\,Sin\,\varphi$$

φ $$\text{und}\quad (4)\quad Tang\,\alpha = \frac{Q}{P},$$

was sofort auch mit den in **3.** und **5.** entwickelten Relationen übereinstimmt.

Beispiel. Wirken auf einen Punct A (Fig 2) die zwei Kräfte $P = 48{\cdot}34$ und $Q = 26{\cdot}52$ Pfund unter einem Winkel von $\alpha = 99^\circ, 24', 13''$; so erhält man nach den Formeln (1) und (6) in **8.** $\mathfrak{R} = 55{\cdot}62$ Pf. und $\varphi = 40^\circ, 22', 26{\cdot}6''$, wodurch sofort die Gröfse und Lage der Mittelkraft gegeben ist.

Gleichgewichtsbedingungen für *drei* auf einen Punct wirkende, in *einerlei* Ebene liegende Kräfte.

(§ 16. Anmerkung.)

10. Wirken auf den freibeweglichen Punct A (Fig. 3) nach den durch die Pfeile angedeuteten Richtungen die in einerlei Ebene liegenden Kräfte P_1, P_2, P_3, und sollen diese unter sich im Gleichgewichte stehen; so mufs nothwendig die Resultirende aus irgend zwei dieser Kräfte, z. B. jene von P_1 und P_2 mit der dritten Kraft P_3 im Gleichgewichte, dieser also gleich und gerade entgegengesetzt seyn, es mufs nämlich, wenn die Geraden AB, AC, AD diese drei Kräfte darstellen, die Diagonale AE des Parallelogrammes BC mit AD gleich grofs seyn und in der Verlängerung der Geraden DA liegen.

Bezeichnet man nun die gegebenen Winkel CAB, BAD, CAD

beziehungsweise durch $\widehat{P_1 P_2}$, $\widehat{P_1 P_3}$, $\widehat{P_2 P_3}$; so hat man aus dem Dreiecke ABE, wegen $AB = P_1$, $BE = P_2$ und $AE = AD = P_3$ sofort:

$$P_1 : P_2 : P_3 = Sin\, AEB : Sin\, BAE : Sin\, ABE,$$

oder auch (da zwei Nebenwinkel einerlei Sinus haben):

$$P_1 : P_2 : P_3 = Sin\, \widehat{P_2 P_3} : Sin\, \widehat{P_1 P_3} : Sin\, \widehat{P_1 P_2},$$

wornach also jede Kraft dem Sinus des Winkels der beiden übrigen Kräfte proportional ist.

Bestimmung der Resultirenden aus einer *beliebigen* Anzahl von Kräften, welche auf einen frei beweglichen Punct wirken und in *ein und derselben* Ebene liegen.

(§. 16)

11. Wirken auf den Punct A (Fig. 4) die Kräfte P, P_1, P_2, $P_3 \ldots$ nach den angedeuteten Richtungen in einerlei Ebene, so lege man zur Bestimmung ihrer Resultirenden in derselben Ebene durch den Punct A ein beliebiges rechtwinkeliges Achsensystem XX', YY', bezeichne die als bekannt anzusehenden oder gegebenen Winkel, welche die Kräfte P, $P_1 \ldots$ mit der Achse der x bilden, der Reihe nach und nach einerlei Richtung (von den positiven x gegen die positive y) gezählt, durch α, α_1, $\alpha_2 \ldots$ und zerlege endlich die Kraft P in zwei (auf einander senkrechte) Seitenkräfte p, q, wovon die erstere nach AX, die letztere nach AY wirkt, eben so P_1 in zwei Kräfte p_1, q_1 nach AX' und AY, die Kraft P_2 in p_2 und q_2 nach AX' und AY' u. s. w., so hat man nach Nr. **5**: $p = P\, Cos\, \alpha$, $q = P\, Sin\, \alpha$, $p_1 = P_1\, Cos\, \alpha_1$, $q_1 = P_1\, Sin\, \alpha_1$, $p_2 = P_2\, Cos\, \alpha_2$, $q_2 = P_2\, Sin\, \alpha_2$ u. s. w., wobei die Kräfte p positiv oder negativ ausfallen, d. h. von A gegen X oder von A gegen X' hin wirken, je nachdem der entsprechende Winkel α im 1ten oder 4ten, oder im 2ten oder 3ten Quadranten liegt; eben so fallen die nach der Achse YY' wirksamen Seitenkräfte q positiv oder negativ aus, wirken nämlich von A gegen Y oder von A gegen Y', je nachdem der betreffende Winkel α im 1ten oder 2ten, oder im 3ten oder 4ten Quadranten liegt.

12. Bezeichnet man die algebraische Summe der Kräfte p, d. i. die Resultirende aus allen auf der Achse der x wirksamen Seitenkräfte durch P' und eben so die Resultirende aus allen nach der Achse der y wirkenden Seitenkräfte q durch Q'; so wird

$$P' = p + p_1 + p_2 + \ldots \text{ und } Q' = q + q_1 + q_2 + \ldots \text{ d. i.}$$

$$(1) \quad P' = P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\alpha)$$

$$(2) \quad Q' = P\,Sin\,\alpha + P_1\,Sin\,\alpha_1 + \ldots = \Sigma(P\,Sin\,\alpha),$$

wobei sich die richtigen Zeichen der einzelnen Glieder je nach den Werthen der Winkel $\alpha, \alpha_1 \ldots$ von selbst ergeben. Dadurch fallen die Kräfte P' und Q' positiv oder negativ aus, wodurch dann auch die Richtung bekannt ist, nach welcher diese beiden Kräfte (ob von A gegen X oder X', oder von A gegen Y oder Y') wirksam sind.

Legt man den Fall zum Grunde, in welchem P' und Q' positiv ausfallen, diese Kräfte also nach AX und AY wirken, folglich ihre Resultirende in den 1ten Quadranten XAY fällt (für $-P'$, $+Q'$ fällt diese in den 2ten, für $-P'$, $-Q'$ in den 3ten, so wie für $+P'$, $-Q'$ in den 4ten Quadranten), bezeichnet die Gröfse dieser Resultirenden mit $\mathfrak{R}$, so wie ihren Neigungswinkel mit der Achse der x durch φ; so erhält man nach den Relationen in **9.**:

$$(3) \quad \mathfrak{R} = \sqrt{(P'^2 + Q'^2)} \quad \text{und} \quad (4) \quad Tang\,\varphi = \frac{Q'}{P'}.$$

Beispiel. Wirken z. B. auf den Punct A vier Kräfte, $P = 12$, $P_1 = 40$, $P_2 = 15$ und $P_3 = 10$, unter den Winkeln mit der Achse XX' von $\alpha = 30^\circ 12'$, $\alpha_1 = 112^\circ 25' 16''$, $\alpha_2 = 234^\circ 48' 24''$ und $\alpha_3 = 342^\circ 12' 8''$; so findet man nach den vorigen Relationen (1) und (2):

$$P' = 10{\cdot}3713 - 15{\cdot}2564 - 8{\cdot}6451 + 9{\cdot}5214 = -4{\cdot}0088$$

und $Q' = 6{\cdot}0362 + 18{\cdot}4881 - 12{\cdot}2582 - 3{\cdot}0566 = +9{\cdot}2095,$

so dafs also die Mittelkraft aus den Seitenkräften p von A gegen X', und jene aus den Seitenkräften q von A nach Y wirksam ist, daher die gesuchte Resultirende $\mathfrak{R}$ im 2ten Quadranten $X'AY$ liegt.

Nach den weitern Relationen (3) und (4) findet man ferner mit diesen Werthen von P' und Q' sofort:

$$\mathfrak{R} = \sqrt{100{\cdot}8854} = 10{\cdot}0441 \text{ und } \varphi = 113^\circ 31' 22{\cdot}8''.$$

13. Bedingungen des Gleichgewichtes. Da für das Gleichgewicht der Kräfte ihre Resultirende $\mathfrak{R} = 0$ seyn mufs, so erhält man als Bedingungsgleichungen für diesen Fall aus der vorigen Relation (3) sofort $P' = 0$ und $Q' = 0$, d. i. (Relat. 1 und 2)

$$P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + P_2\,Cos\,\alpha_2 + \ldots = 0 \text{ oder } \Sigma(P\,Cos\,\alpha) = 0,$$

$$P\,Sin\,\alpha + P_1\,Sin\,\alpha_1 + P_2\,Sin\,\alpha_2 + \ldots = 0 \text{ oder } \Sigma(P\,Sin\,\alpha) = 0.$$

Findet das Gleichgewicht nicht Statt, so läfst sich dieses ganz einfach durch Hinzufügung einer neuen Kraft, welche der Resultirenden der vorhandenen Kräfte gleich und entgegengesetzt ist, herstellen.

Zusammensetzung von Kräften, welche auf *einen* Punct wirken, jedoch in *verschiedenen* Ebenen liegen.

(§. 17.)

14. Wirken drei Kräfte P, Q, R auf einen frei beweglichen Punct A (Fig. 5) nach den wechselweise auf einander perpendikulären Richtungen AB, AC, AD, und schneidet man diese eben genannten Linien den Kräften proportional ab; so stellt die Diagonale AG des aus den Puncten B, C, D ergänzten rechtwinkeligen Parallelopipedes die Resultirende $\mathfrak{R}$ aus diesen Kräften vor, und zwar ist wegen $AG^2 = AB^2 + AC^2 + AD^2$ sofort

$$\mathfrak{R} = \sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)} \ldots (1),$$

und wenn man die Winkel, welche die Diagonale AG mit den drei Seiten AB, AC, AD bildet, der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet, auch

$$Cos\, a = \frac{P}{\mathfrak{R}},\ Cos\, b = \frac{Q}{\mathfrak{R}},\ Cos\, c = \frac{R}{\mathfrak{R}} \ldots (2),$$

wobei noch überdiefs die Relation (*Burg's* Compendium §. 558):

$$Cos\, a^2 + Cos\, b^2 + Cos\, c^2 = 1$$

Statt findet, welche als Rechnungscontrolle benützt werden kann.

15. Wirken die Kräfte, deren Anzahl überhaupt beliebig seyn kann, unter schiefen Winkeln auf den freien Punct A (Fig. 6), so lege man durch diesen Angriffspunct drei Coordinatenachsen AX, AY, AZ rechtwinkelig auf einander und bezeichne die Winkel, welche die Kraft P mit diesen genannten Achsen bildet, der Reihe nach mit α, β, γ, eben so jene der Kraft P_1 mit α_1, β_1, γ_1, jene der Kraft P_2 mit α_2, β_2, γ_2 u. s. w., zerlege ferner die Kraft P in drei auf einander senkrechte und zwar nach den Richtungen AX, AY, AZ wirkende Seitenkräfte p, q, r, eben so P_1 in p_1, q_1, r_1, die Kraft P_2 in die Seitenkräfte p_2, q_2, r_2 u. s. w.; so erhält man nach den Relationen (2) der vorigen Nummer:

$$p = P\, Cos\, \alpha,\ q = P\, Cos\, \beta,\ r = P\, Cos\, \gamma$$

und eben so

$$p_1 = P_1\, Cos\, \alpha_1,\ q_1 = P_1\, Cos\, \beta_1,\ r_1 = P_1\, Cos\, \gamma_1$$

u. s. w. fort.

Durch diese Zerlegung erhält man aber anstatt der ursprünglichen Kräfte P, P_1, P_2 ... drei Gruppen von Kräften, welche nach den auf einander perpendikulär stehenden Achsen XX', YY' und ZZ' auf den Punct A wirken, so dafs, wenn man ihre Resultirenden beziehungsweise durch P', Q', R' bezeichnet, sofort

$$(m)\quad P' = p + p_1 + p_2 + \ldots,\ Q' = q + q_1 + q_2 + \ldots,$$
$$R' = r + r_1 + r_2 + \ldots \text{ wird.}$$

Bezeichnet man aber die Resultirende aus den ursprünglichen Kräften P, P_1, P_2 . . . ., welche zugleich auch jene dieser drei Kräfte P', Q', R', ist, mit $\mathfrak{R}$, und die Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Achsen XX', YY', ZZ' bildet, durch a, b, c; so hat man unmittelbar nach **14.** (Relat. 1 und 2)

$$\mathfrak{R} = \sqrt{(P'^2 + Q'^2 + R'^2)} \quad \text{und}$$
$$Cos\,a = \frac{P'}{\mathfrak{R}},\ Cos\,b = \frac{Q'}{\mathfrak{R}},\ Cos\,c = \frac{R'}{\mathfrak{R}},$$

wodurch die Gröfse und Lage der Resultirenden gegeben ist.

Substituirt man für P', Q', R' und darin ür p, q, r . . . die vorigen Werthe, so wird:

$$P' = P\,Cos\,\alpha + P_1\,Cos\,\alpha_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\alpha),$$
$$Q' = P\,Cos\,\beta + P_1\,Cos\,\beta_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\beta),$$
$$R' = P\,Cos\,\gamma + P_1\,Cos\,\gamma_1 + \ldots = \Sigma(P\,Cos\,\gamma).$$

Anmerkung 1. Für das Gleichgewicht der angenommenen Kräfte müssen die drei Gleichungen $P' = 0$, $Q' = 0$, $R' = 0$ bestehen. Wäre z. B. blofs $R' = 0$, so wäre nach der vorhergehenden Relation $Cos\,c = \frac{0}{\mathfrak{R}} = 0$ oder $c = 90°$, zum Beweis, dafs in diesem Falle die Resultirende in die Ebene der Achsen XX', YY' fällt. Wäre aufserdem auch $Q' = 0$, so würde auch noch $b = 90°$, zum Zeichen, dafs jetzt die Resultirende $\mathfrak{R}$ mit der Achse XX' zusammenfällt.

Anmerkung 2. Ist der Angriffspunct der Kräfte nicht vollkommen frei, sondern z. B. gezwungen, auf einer gegebenen krummen Fläche oder Linie zu bleiben, auf welcher er sich übrigens wieder ganz frei soll bewegen können, so ist es für das Gleichgewicht nicht mehr nothwendig, dafs die Resultirende aus allen diesen Kräften gleich Null sey, sondern es reicht hin, dafs diese auf der Fläche oder Linie normal stehe, indem sie dann von dem Widerstande der Fläche oder Curve aufgehoben wird. Diese Betrachtung führt im erstern dieser beiden Fälle zu zwei, im letztern zu einer Bedingungsgleichung, und zwar, wenn $F = \varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der krummen Fläche ist; so sind diese für den erstern Fall:

$$P'\left(\frac{dF}{dy}\right) - Q'\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0 \quad \text{und} \quad P'\left(\frac{dF}{dz}\right) - R'\left(\frac{dF}{dx}\right) = 0$$

und für den letztern:

$$P'dx + Q'dy + R'dz = 0.$$

Allgemeine Bestimmung des Mittelpunctes paralleler Kräfte.

(§. 23.)

16. Wirken auf ein System von beliebigen, fest mit einander verbundenen Puncten M, M_1, $M_2 \ldots$ (Fig. 7) nach parallelen, sonst aber beliebigen Richtungen die Kräfte P, P_1, $P_2 \ldots$, so beziehe man, zur Bestimmung ihrer Resultirenden, dieses System auf irgend drei rechtwinkelige Coordinatenachsen AX, AY, AZ, und bezeichne die Coordinaten des Angriffspunctes M durch x, y, z, jene des Punctes M_1 durch x_1, y_1, z_1 u. s. w., so wie endlich jene des Angriffspunctes der Resultirenden $\Re$, d. i. des Mittelpunctes der parallelen Kräfte durch X, Y, Z; fälle ferner aus diesen Puncten M, M_1, .. auf die Ebene der xy die Perpendikel $Mm = z$, $M_1 m_1 = z_1$, $M_2 m_2 = z_2$ u. s. w. und ziehe in der durch zz_1 gedachten Ebene $M_1 m$ durch M die Gerade MB parallel zu mm_1 (als Durchschnittslinie der beiden Ebenen $M_1 m$ und xy). Diefs vorausgesetzt, liegt der Angriffspunct N der Mittelkraft aus den beiden Kräften P, P_1, je nachdem diese nach einerlei oder nach entgegengesetzten Richtungen wirken (§§. 20 und 21), entweder in der bestimmten Geraden MM_1 oder in ihrer Verlängerung; nimmt man hier den ersten Fall an, da sich auch der letztere leicht darauf zurückführen läfst, so hat man (§. 20), da diese Mittelkraft $= P + P_1$ ist:

$$P_1 : (P + P_1) = MN : MM_1 = NC : M_1 B$$

(wenn man auch noch aus N auf die Ebene der xy das in der Ebene $M_1 m$ liegende Perpendikel Nn fällt), nämlich $(P + P_1) NC = P_1 . M_1 B$, oder wenn man beiderseits die identische Gleichung

$$(P + P_1) Cn = P . Mm + P_1 . Bm_1$$

(wegen $Cn = Mm = Bm_1$) addirt und reducirt, auch

$$(P + P_1) Nn = P . Mm + P_1 . M_1 m_1 = Pz + P_1 z_1 ;$$

es ist nämlich, wenn man das Product aus der Kraft in das aus ihrem Angriffspunct auf die Ebene der xy gefällte Perpendikel Moment dieser Kraft in Bezug auf diese Ebene nennt, sofort das Moment der Mittelkraft gleich der Summe der Momente der beiden Seitenkräfte.

Ist ferner N_1 der Angriffspunct der Resultirenden $P + P_1 + P_2$ aus dieser Mittelkraft $P + P_1$ und der dritten in M_2 wirkenden parallelen Kraft P_2, und zieht man wieder $N_1 n_1$ perpendikulär auf die Ebene xy; so hat man eben so nach diesem Satze:

$$(P + P_1 + P_2) N_1 n_1 = (P + P_1) N n + P_2 . M_2 m_2,$$

oder wenn man für $(P + P_1) N n$ den vorigen Werth setzt:

$$(P + P_1 + P_2) N_1 n_1 = P z + P_1 z_1 + P_2 z_2,$$

wobei diese Summen immer nur im algebraischen Sinne zu verstehen sind.

Fährt man nun auf diese Weise fort, bis auch die letzte parallele Kraft verbunden ist, so erhält man endlich die Relation:

$$\Re Z = P z + P_1 z_1 + P_2 z_2 + \ldots = \Sigma(P z) \quad (k),$$

wobei

$$\Re = P + P_1 + P_2 + \ldots = \Sigma(P) \quad \text{ist.}$$

17. Fällt man nun auch auf die beiden übrigen coordinirten Ebenen der $x z$ und $y z$ aus den oben genannten Angriffspuncten M, $M_1 \ldots$ die Perpendikel, so sind diese nichts anders als beziehungsweise die Ordinaten y, $y_1 \ldots$ und x, $x_1 \ldots$ der Puncte M, $M_1 \ldots$ und man erhält analog mit der vorigen Relation (k) eben so $\Re Y = \Sigma(P y)$ und $\Re X = \Sigma(P x)$, so, dafs man also zur Bestimmung des Mittelpunctes der parallelen Kräfte die nachstehenden Gleichungen hat:

$$\left.\begin{aligned} \Re X &= P x + P_1 x_1 + \ldots = \Sigma(P x) \\ \Re Y &= P y + P_1 y_1 + \ldots = \Sigma(P y) \\ \Re Z &= P z + P_1 z_1 + \ldots = \Sigma(P z) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und
$$\Re = P + P_1 + \ldots = \Sigma(P) \ldots \quad (2),$$

aus welchen sich für diesen Punct die Coordinaten ergeben:

$$X = \frac{\Sigma(P x)}{\Sigma(P)}, \quad Y = \frac{\Sigma(P y)}{\Sigma(P)}, \quad Z = \frac{\Sigma(P z)}{\Sigma(P)} \ldots \quad (3)$$

und wobei die sämmtlichen Summen im algebraischen Sinne zu nehmen sind.

18. Liegen die sämmtlichen Angriffspuncte M, $M_1 \ldots$ in ein und derselben Ebene, und nimmt man diese zur Vereinfachung der Rechnung als eine der drei coordinirten Ebenen, z. B. zur Ebene der $x y$; so werden die sämmtlichen durch z, z_1, $z_2 \ldots$ bezeichneten Ordinaten Null, und man erhält aus der 3ten der vorigen Relationen (1) $\Re Z = 0$, also, wenn $\Re$ nicht Null ist (d. h. das Gleichgewicht nicht besteht), $Z = 0$, zum Beweis, dafs in diesem Falle der Mittelpunct der parallelen Kräfte in derselben Ebene der Angriffspuncte M, $M_1 \ldots$ liegt.

Zur Bestimmung dieses Punctes genügen daher (die Puncte M, $M_1 \ldots$ auf zwei in dieser Ebene gezogene rechtwinkelige Achsen bezogen) die beiden Gleichungen: $\mathfrak{R} X = \Sigma(P x)$ und $\mathfrak{R} Y = \Sigma(P y)$, wobei $\mathfrak{R} = \Sigma(P)$ ist.

19. Liegen dagegen die sämmtlichen Puncte $M, M_1 \ldots$ in einer geraden Linie und nimmt man diese zur Achse der x, so erhält man aus den beiden letzten der Relationen (1) in **17.** wegen

$$y = y_1 = y_2 = \ldots = 0 \text{ und } z = z_1 = z_2 \ldots = 0,$$

wenn das Gleichgewicht nicht Statt hat, also $\mathfrak{R}$ nicht Null ist (da für das Gleichgewicht dieser Punct X, Y, Z ohnehin nicht besteht), sofort $Y = 0$, $Z = 0$, zum Zeichen, dafs in diesem Falle (wie es ohnehin bekannt) der Mittelpunct der parallelen Kräfte in der nämlichen Geraden liegt.

Satz der statischen Momente.

(§. 32.)

20. Wirken auf einen frei beweglichen Punct A (Fig. 8) beliebig viele in ein und derselben Ebene liegende Kräfte $P, P_1, P_2 \ldots$ nach den angedeuteten Richtungen, und fällt man aus irgend einem, in derselben Ebene liegenden Punct O auf die Richtungen der Kräfte oder deren Verlängerungen die Perpendikel $O a$, $O a_1 \ldots$ und bezeichnet ihre Gröfse oder Länge beziehungsweise durch $p, p_1, p_2 \ldots$ so sind $P p$, $P_1 p_1$ u. s. w. die statischen Momente dieser Kräfte in Beziehung auf den Punct O.

Nimmt man die durch diesen Punct O und den Angriffspunct A gezogene Gerade $X X'$ zur Abscissen- und die durch A darauf perpendikuläre Gerade $Y Y'$ zur Ordinatenachse, bezeichnet die Winkel, welche die Kräfte $P, P_1 \ldots$ mit $X X'$ einschliefsen, wie in Nr. **11** durch α, α_1, $\alpha_2 \ldots$ zerlegt wieder, wie dort, jede dieser Kräfte in zwei auf einander senkrechte Seitenkräfte, nämlich nach $A X$ und $A Y$, und bezeichnet gerade so wie dort die Mittelkraft aus allen nach der Achse $X X'$ wirksamen Seitenkräfte mit P', so wie jene nach $Y Y'$ wirkenden Kräfte mit Q', so, dafs also (wie in **11.**) $P' = P \, Cos\, \alpha + P_1 \, Cos\, \alpha_1 + \ldots$ und $Q' = P \, Sin\, \alpha + P_1 \, Sin\, \alpha_1 + \ldots$ wird; so hat man aus dieser letztern Relation, wenn man den beliebigen Abstand $A O = u$ setzt, wodurch

$$Sin\,\alpha = \frac{p}{u},\ Sin\,\alpha_1 = \frac{p_1}{u},\ Sin\,\alpha_2 = \frac{p_2}{u} \ldots$$

wird, sofort:

$$Q' = P\frac{p}{u} + P_1\frac{p_1}{u} + \ldots,$$

oder wenn man durchaus mit u multiplicirt:

$$Q'u = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots (m).$$

Ist nun $\mathfrak{R}$ die Resultirende aus diesen Kräften P, P_1 ... also auch der beiden Mittelkräfte P', Q', und fällt man auf diese Kraft ebenfalls aus O das Perpendikel Ob, dessen Länge $\mathfrak{r}$ heifsen soll; so ist nach dem Satze (1) in §. 29 $\mathfrak{R}\mathfrak{r} = Q'q' + P'p'$, oder da hier $q' = u$ und $p' = 0$ ist, auch $\mathfrak{R}\mathfrak{r} = Q'u$, und wenn man für $Q'u$ den Werth aus der vorigen Relation (m) setzt:

$$\mathfrak{R}\mathfrak{r} = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots (1).$$

Anmerkung 1. Die in dieser algebraischen Summe vorkommenden Glieder werden positiv oder negativ, je nachdem (da man die sämmtlichen Kräfte P als positiv anzusehen hat) die Perpendikel $p = u \, Sin \, \alpha$, $p_1 = u \, Sin \, \alpha_1$ ... positiv oder negativ ausfallen, d. h. je nachdem die entsprechenden Winkel α im 1ten und 2ten oder 3ten und 4ten Quadranten liegen.

Auch läfst sich dieser Gegensatz in den Zeichen der Glieder Pp leicht dadurch finden, dafs man sich die sämmtlichen Perpendikel p, p_1 ... im Puncte O fest mit einander verbunden, zugleich aber um diesen Punct drehbar denkt und sich vorstellt, dafs die Kräfte P, P_1 ... an ihren Endpuncten a, a_1 ... wirksam sind; dann bilden die Kräfte, wie hier P und P_1, welche das System von Oa, Oa_1 ... nach der einen Richtung drehen wollen, den Gegensatz zu jener, wie hier P_2, welche dieses System nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen streben. Die Resultirende sucht das System im positiven oder negativen Sinne zu drehen, je nachdem die algebraische Summe der Glieder Pp (wobei man willkürlich die eine oder die andere Richtung als die positive annehmen kann) positiv oder negativ ausfällt.

Anmerkung 2. Da für den Fall des Gleichgewichtes, wegen $\mathfrak{R} = 0$, sofort $Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = 0$ wird, so folgt, dafs in diesem Falle die Summe der statischen Momente jener Kräfte, welche das genannte System nach einer Richtung zu drehen suchen, gleich seyn mufs der Summe der statischen Momente der übrigen, d. h. jener Kräfte, welche das System nach der entgegengesetzten Richtung drehen wollen. Aufserdem müssen auch noch, wenn O ein freier Punct ist, die beiden Bedingungsgleichungen (13.) $P' = 0$ *und* $Q' = 0$ bestehen.

Ist dagegen O ein fester Drehungspunct, so ist das Gleichgewicht von der Bedingungsgleichung $P' = 0$ unabhängig, d. h. diese Gleichung braucht nicht Statt zu finden.

Anmerkung 3. Läfst man, ohne die Gröfse der Perpendikel p, p_1, p_2 ... zu ändern, die ganz willkürliche Distanz $AO = u$ allmälig zunehmen und setzt endlich $u = \infty$, so laufen zuletzt die Kräfte P, P_1, P_2 ... unter einander parallel, ohne dafs dadurch die obige Relation (1), in welcher diese Gröfse u nicht mehr vorkommt oder hinausgefallen ist, ihre Giltigkeit verliert (§. 33).

21. Die vorige Relation (1) gilt aber nicht bloſs für den Fall, in welchem die Kräfte P, P_1 . . . auf einen einzigen Punct, sondern auch wenn diese auf verschiedene, mit den Kräften in derselben Ebene liegende, jedoch fest mit einander verbundene Puncte A, A_1, A_2 . . . (Fig. 9) wirken. Denn sucht man zuerst zu den beiden Kräften P und P_1, welche sich in M schneiden, die Mittelkraft R, ferner zu dieser und der 3ten Kraft P_2, welche sich in N schneiden sollen, die Mittelkraft R_1 u. s. w. fort, fällt dann aus irgend einem in derselben Ebene liegenden Punct O auf die Richtungen der Kräfte $P, P_1 \ldots$ R, R_1 . . . die Perpendikel $Oa = p$, $Oa_1 = p_1 \ldots$ $Ob = r$, $Ob_1 = r_1 \ldots$; so folgt nach der genannten Relation (1) der vorigen Nummer: $Rr = Pp + P_1 p_1$, ferner eben so

$$R_1 r_1 = Rr + P_2 p_2 = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2,$$

und wenn man auf diese Weise fortfährt und die letzte Resultirende aus allen Kräften wieder durch $\mathfrak{R}$, das aus O darauf gefällte Perpendikel durch $\mathfrak{r}$ bezeichnet, endlich wie zuvor:

$$\mathfrak{R}\mathfrak{r} = Pp + P_1 p_1 + P_2 p_2 + \ldots = \Sigma(Pp) \;\ldots\; (2).$$

Anmerkung 1. Bezieht man die Angriffspuncte $A, A_1 \ldots$ auf zwei willkürliche in dieser Ebene gezogene rechtwinkelige Achsen, und zerlegt jede der gegebenen Kräfte $P, P_1 \ldots$ in zwei mit diesen Achsen parallele Kräfte, deren Angriffspuncte man sich in diese Achsen verlegt denken kann; so erhält man genau so wie in **12.**, wenn man die dortige Bezeichnung der Winkel, welche die Kräfte $P, P_1 \ldots$ mit der Achse XX' bilden, beibehält, zwei Gruppen von parallelen Kräften, von denen die mit der Achse XX' parallele Gruppe die Resultirende $P' = \Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha)$ und die mit YY' parallele die Mittelkraft $Q' = \Sigma(P \operatorname{Sin} \alpha)$ besitzt.

Soll also hier das Gleichgewicht Statt finden, so müssen gleichzeitig die drei Bedingungsgleichungen bestehen:

$$\Sigma(P \operatorname{Cos} \alpha) = 0, \quad \Sigma(P \operatorname{Sin} \alpha) = 0, \quad \Sigma(Pp) = 0 \quad (I).$$

Auch lassen sich die in der vorigen allgemeinen Gleichung (2) vorkommenden Producte oder stat. Momente so ausdrücken, daſs dadurch zugleich die Zeichen der Perpendikel $\mathfrak{r}, p, p_1 \ldots$ in die Augen fallen.

Nimmt man nämlich zuerst nur zwei Kräfte P, P_1 an und bezieht diese auf ein durch den Punct O gehendes rechtwinkeliges Achsensystem, bezeichnet die Coordinaten der Angriffspuncte A, A' dieser Kräfte beziehungsweise mit x, y und x_1, y_1, die Winkel, welche die Kräfte P, P_1 und ihre Resultirende R mit der Abscissenachse bilden, mit α, α_1 und a; so erhält man für die aus dem Anfangspunct O auf die Richtungen der Kräfte P, P_1, R gefällten Perpendikel p, p_1, r, wie leicht zu sehen, die Ausdrücke

$$p = y \operatorname{Cos} \alpha - x \operatorname{Sin} \alpha, \quad p_1 = y_1 \operatorname{Cos} \alpha_1 - x_1 \operatorname{Sin} \alpha_1$$

und wenn X, Y die Coordinaten irgend eines Punctes der Resultirenden R sind, $r = Y \cos a - X \sin a$.

Dadurch erhält also die obige Gleichung $Rr = Pp + P_1 p_1$ die Form:
$R (Y \cos a - X \sin a) = P (y \cos \alpha - x \sin \alpha) + P_1 (y_1 \cos \alpha_1 - x_1 \sin \alpha_1)$.

Verbindet man jetzt gerade so, wie es vorhin geschehen, diese Resultirende R mit der dritten Kraft P_2 und setzt für R, P_2 und ihrer Resultirenden R' die der vorigen analoge Gleichung an, verbindet ferner R' mit P_3 u. s. w. fort, bis man auf diese Weise zur letzten Kraft gekommen ist, und bezeichnet die letzte Resultirende wieder mit $\mathfrak{R}$, die Coordinaten eines ihrer Puncte durch X, Y, so wie den Winkel, welchen sie mit der Abscissenachse bildet, durch a; so ist die der vorigen analoge Gleichung:

$$\mathfrak{R} (Y \cos a - X \sin a) = \Sigma [P (y \cos \alpha - x \sin \alpha)] \quad (m),$$

welche den Abstand r angibt, in welchem die Resultante $\mathfrak{R}$ vom Anfangspuncte der Coordinaten durchgeht, während die beiden obigen Gleichungen $P' = \mathfrak{R} \cos a$ und $Q' = \mathfrak{R} \sin a$, d. i.

$$\mathfrak{R} \cos a = \Sigma (P \cos \alpha) \text{ und } \mathfrak{R} \sin a = \Sigma (P \sin \alpha) \ . \ . \ . \ (n),$$

die Gröfse und Richtung derselben angeben.

Nach den vorhin aufgestellten Bedingungsgleichungen (l) folgt, dafs eine beliebige Anzahl von in derselben Ebene liegenden Kräften im Gleichgewichte steht, wenn 1. die Summe der Seitenkräfte derselben nach den Richtungen zweier beliebiger in dieser Ebene angenommenen rechtwinkeligen Achsen jede für sich gleich Null und 2. die Summe der statischen Momente der Kräfte in Beziehung auf irgend einen in der Ebene angenommenen Punct ebenfalls gleich Null ist.

Hätte die Ebene, in welcher die Kräfte liegen, einen festen Punct, so brauchte ihre Resultirende nicht mehr $= 0$ zu seyn, sondern es würde für das Gleichgewicht hinreichen, dafs diese durch den festen Punct geht. Nimmt man diesen Punct zum Ursprung der Coordinaten, so reducirt sich die Bedingung des Gleichgewichtes auf die einzige Gleichung $\Sigma (Pp) = 0$, während der Werth der Resultante

$$\mathfrak{R} = \sqrt{\left\{ [\Sigma (P \cos \alpha)]^2 + [\Sigma (P \sin \alpha)]^2 \right\}}$$

den Druck gegen diesen festen Punct angibt.

Wären die sämmtlichen Kräfte parallel, so wäre $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots$, folglich hätte man $\mathfrak{R} \cos a = \cos \alpha \, \Sigma (P)$, $\mathfrak{R} \sin a = \sin \alpha \, \Sigma (P)$ und $\mathfrak{R}\, \mathrm{r} = \Sigma (Pp)$, woraus sofort

$$\cos a = \cos \alpha, \ \sin a = \sin \alpha \text{ und } \mathfrak{R} = \Sigma (P)$$

folgt; es ist also die Resultante in diesem Falle (wie bekannt) den Seitenkräften parallel und ihrer Summe gleich.

Für das Gleichgewicht ist $\mathfrak{R} = 0$, also $\Sigma (P) = 0$ und $\Sigma (Pp) = 0$.

Anmerkung 2. Wir können jetzt auch auf den allgemeinen Fall übergehen und die Gleichgewichtsbedingungen für ein System von fest mit einander verbundenen Puncten bestimmen, auf welche Kräfte nach beliebigen Richtungen im Raume wirken.

Es seyen nämlich P, P_1, P_2 . . . diese Kräfte; x, y, z, x_1, y_1, z_1 u. s. w. die auf irgend ein rechtwinkeliges Achsensystem bezogenen Coordinaten ihrer Angriffspuncte; α, β, γ, α_1, β_1, γ_1 u. s. w. die Winkel, welche die Kräfte beziehungsweise mit den Achsen der x, y, z bilden. Diefs vorausgesetzt, zerlege man jede Kraft P in drei mit den Coordinatenachsen parallele Kräfte, so sind diese (Nr. 15) für die Kraft P beziehungsweise $P \, Cos \, \alpha$, $P \, Cos \, \beta$, $P \, Cos \, \gamma$; für jene P_1: $P_1 \, Cos \, \alpha_1$, $P_1 \, Cos \, \beta_1$, $P_1 \, Cos \, \gamma_1$ u. s. w. Man verlängere ferner die (mit der Achse der x parallele) Kraft $P \, Cos \, \alpha$ bis zu ihrem Durchschnitt N (Fig. 9, a) mit der Ebene der yz; so hat dieser Punct N die Coordinaten $An = y$ und $Am = z$. Zerlegt man diese Kraft $P \, Cos \, \alpha$ in zwei gleiche mit ihr parallele Kräfte, welche in derselben und zwar in der durch pq gehenden Ebene liegen (wofür $Ap = Aq$ ist), so fällt von diesen beiden, mit der Achse der x parallelen Kräften $\frac{1}{2} P \, Cos \, \alpha$, eine in die Ebene der xy und hat von der Achse der x den Abstand $Ap = 2An = 2y$, und die andere in die Ebene der xz in den Abstand $Aq = 2Am = 2z$ von dieser Achse.

Zerlegt man auf gleiche Weise auch die übrigen mit der Achse der x parallelen Kräfte $P_1 \, Cos \, \alpha_1$ . . . jede in zwei gleiche dieser Achse parallele Kräfte, so erhält man für das System der mit der Achse der x parallelen Seitenkräfte zwei Gruppen solcher mit dieser Achse paralleler Kräfte $\frac{1}{2} P \, Cos \, \alpha$, $\frac{1}{2} P_1 \, Cos \, \alpha_1$ . . ., wovon die eine Gruppe in der Ebene der xy in den Entfernungen beziehungsweise $2y$, $2y_1$ . . . und die zweite in der Ebene der xz in den Entfernungen $2z$, $2z_1$ . . . wirksam ist.

Eben so kann man das der Achse der y parallele System der Seitenkräfte $P \, Cos \, \beta$, $P_1 \, Cos \, \beta_1$ . . . durch zwei Gruppen dieser Achse parallele Kräfte ersetzen, von denen die eine in der Ebene der xy in den Entfernungen $2x$, $2x_1$ . . . und die andere Gruppe in der Ebene der yz in den Entfernungen $2z$, $2z_1$ . . . wirksam ist.

Endlich kann man auch für das dritte System der mit der Achse der z parallelen Seitenkräfte $P \, Cos \, \gamma$, $P_1 \, Cos \, \gamma_1$ . . . zwei Gruppen von mit derselben Achse der z parallelen Kräfte $\frac{1}{2} P \, Cos \, \gamma$, $\frac{1}{2} P_1 \, Cos \, \gamma_1$ . . . substituiren, wovon die eine Gruppe in der Ebene der xz liegt und deren einzelnen Kräfte die Abstände $2x$, $2x_1$ . . ., die andere in der Ebene der yz wirksam ist, und die Abstände $2y$, $2y_1$ . . . von dieser Achse der z haben.

Durch dieses Verfahren hat man aber anstatt der ursprünglichen Kräfte P, P_1 . . welche ganz willkürliche Richtungen im Raume haben können, durchaus Kräfte erhalten, welche lediglich in den 3 coordinirten Ebenen wirksam, und darin in je zwei, beziehungsweise mit den in diesen Ebenen liegenden Achsen parallelen Gruppen vertheilt sind; es ist klar, dafs wenn in jeder dieser 3 coordinirten Ebenen Gleichgewicht besteht, auch das ganze System im Gleichgewichte seyn mufs.

Nun sind aber die Bedingungen für das Gleichgewicht in den 3 genannten Ebenen der xy, xz, yz beziehungsweise (nach den vorigen Relationen (n) und (m), wenn man $\mathfrak{R} = 0$ setzt):

$\frac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \alpha)=0$, $\frac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \beta)=0$, $\frac{1}{2}\Sigma(P\,[2\,y\ Cos\ \alpha - 2\,x\ Cos\ \beta])=0$
$\frac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \alpha)=0$, $\frac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \gamma)=0$, $\frac{1}{2}\Sigma(P\,[2\,z\ Cos\ \alpha - 2\,x\ Cos\ \gamma])=0$
$\frac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \beta)=0$, $\frac{1}{2}\Sigma(P\ Cos\ \gamma)=0$, $\frac{1}{2}\Sigma(P\,[2\,z\ Cos\ \beta - 2\,y\ Cos\ \gamma])=0$

Da jedoch diese 9 Gleichungen nur 6 verschiedene ausmachen, so wird das angenommene freie System im Gleichgewichte seyn, wenn die Kräfte P, P_1 . . folgenden 6 Bedingungsgleichungen Genüge leisten:

$$(s)\ \begin{cases} \Sigma(P\ Cos\ \alpha)=0,\ \Sigma(P\ Cos\ \beta)=0,\ \Sigma(P\ Cos\ \gamma)=0 \\ \Sigma(P\,[y\ Cos\ \alpha - x\ Cos\ \beta])=0 \\ \Sigma(P\,[z\ Cos\ \alpha - x\ Cos\ \gamma])=0 \\ \Sigma(P\,[z\ Cos\ \beta - y\ Cos\ \gamma])=0 \end{cases}$$

Auch läfst sich leicht zeigen, dafs ohne Erfüllung dieser Gleichungen das Gleichgewicht nicht bestehen kann.

Ist das System nicht frei, sondern z. B. durch einen festen Punct gehalten, um welchen es rotiren kann; so ist es für das Gleichgewicht nicht mehr nothwendig, dafs die Resultirende Null sey, sondern es genügt, dafs diese durch den festen Punct geht. Nimmt man diesen Punct zum Ursprung der Coordinaten, so bilden die 3 letzten Gleichungen der vorigen Relationen (s) die hier nöthigen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht (weil jetzt r statt $\mathfrak{R}$ Null ist)

Wird das System durch zwei feste Puncte oder durch eine feste Achse gehalten, so werden alle zu dieser Achse parallelen und auf diese perpendiculären Kräfte durch ihren Widerstand aufgehoben. Nimmt man daher diese Achse zu einer der Coordinatenachsen, z. B. für jene der z, so werden alle in der Ebene der $x\,z$ und $y\,z$ liegenden Kräfte aufgehoben oder vernichtet und es wird also für das Gleichgewicht nur nöthig seyn, dafs die Resultante der in der Ebene der $x\,y$ wirksamen Kräfte nach der Achse der z gerichtet sey, d. h. dafs sie durch den Ursprung der Coordinaten gehe; dadurch wird die Bedingung des Gleichgewichtes auf die einzige Gleichung $\Sigma(P\,[y\ Cos\ \alpha - x\ Cos\ \beta])=0$ reducirt, so, dafs also in diesem Falle nur die Summe der stat. Momente in Beziehung auf diese feste Achse $=0$ zu seyn braucht.

Nimmt man an, dafs die sämmtlichen Kräfte z unter einander parallel sind, so darf man nur $\alpha=\alpha_1=\alpha_2=\ldots$, $\beta=\beta_1=\beta_2=\ldots$ und $\gamma=\gamma_1=\gamma_2=\ldots$ setzen, um für das Gleichgewicht aus den Relationen (s) die Bedingungsgleichungen zu erhalten:

$$Cos\ \alpha\ \Sigma(P)=0,\ Cos\ \beta\ \Sigma(P)=0,\ Cos\ \gamma\ \Sigma(P)=0,\ \text{d. i. } \Sigma(P)=0$$

und $$Cos\ \alpha\ \Sigma(Py) - Cos\ \beta\ \Sigma(Px)=0,\ Cos\ \alpha\ \Sigma(Pz) - Cos\ \gamma\ \Sigma(Px)=0$$
$$Cos\ \beta\ \Sigma(Pz) - Cos\ \gamma\ \Sigma(Py)=0$$

welchen letztern Gleichungen genügt wird, wenn

$$\Sigma(Px)=0,\ \Sigma Py)=0,\ \Sigma(Pz)=0 \text{ ist.}$$

Findet das Gleichgewicht nicht Statt und haben die Kräfte die Resultirende R, welche mit den Achsen der x, y, z beziehungsweise die Winkel a, b, c bildet; so darf man zur Herstellung des Gleichgewichtes offenbar zu den Kräften P, P_1 . . nur noch eine der R gleiche und gerade entgegengesetzt wirkende Kraft hinzufügen; dadurch gehen die vorigen Bedingungsgleichungen über in folgende:

$Cos\,\alpha\,\Sigma(P) - R\,Cos\,a = 0$, $Cos\,\beta\,\Sigma(P) - R\,Cos\,b = 0$, und
$Cos\,\gamma\,\Sigma(P) - R\,Cos\,c = 0$,
woraus zuerst $R = \Sigma(P)$ und $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$ folgt, und, wenn x', y', z' die Coordinaten irgend eines Punctes dieser Resultirenden R sind ferner:

$$Cos\,\alpha\,[\Sigma(Py) - y'\,\Sigma(P)] = Cos\,\beta\,[\Sigma(Px) - x'\,\Sigma(P)]$$
$$Cos\,\alpha\,[\Sigma(Pz) - z'\,\Sigma(P)] = Cos\,\gamma\,[\Sigma(Px) - x'\,\Sigma(P)]$$
$$Cos\,\beta\,[\Sigma(Pz) - z'\,\Sigma(P)] = Cos\,\gamma\,[\Sigma(Py) - y'\,\Sigma(P)]$$

welchen letztern 3 Gleichungen offenbar für

$$x' = \frac{\Sigma(Px)}{\Sigma(P)},\quad y' = \frac{\Sigma(Py)}{\Sigma(P)},\quad z' = \frac{\Sigma(Pz)}{\Sigma(P)}$$

Genüge geleistet wird, und welches sofort (Nr. 17, Relat. 3) die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte sind.

Auf gleiche Weise hätte man schon in dem allgemeinen, durch die Relationen (s) gegebenen Falle die Resultirende bestimmen können, wenn kein Gleichgewicht vorausgesetzt worden wäre.

Schwerpunct der Linien.

(§. 44.)

22. Soll allgemein für irgend eine Curve im Raume BB' (Fig. 10) der Schwerpunkt bestimmt werden, so beziehe man diese auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem AX, AY, AZ, bezeichne die Coordinaten irgend eines Punctes M dieser Curve mit x, y, z ($AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$), setze die Länge des variablen Bogens $BM = s$, so wie die des ganzen Bogens $BB' = l$; so stellt $d\,s$ das diesem Puncte M entsprechende Curvenelement und da man dieses (nach der in §. 44 gemachten Voraussetzung) gleich unmittelbar statt dem Gewichte des materiellen Punctes x, y, z setzen kann, $z\,d\,s$ das Moment dieses Gewichtes auf die Ebene der xy bezogen vor. Bezeichnet man ferner die Werthe von s auf die Endpunkte B, B' des Bogens $BB' = l$ bezogen, beziehungsweise mit s_0, s_1; so stellt das bestimmte Integral $\int_{s_0}^{s_1} z\,d\,s$ die algebraische Summe der Momente $\Sigma\,(Pz)$ in den Relationen (1) von **17.** vor, wobei P unendlich klein ist und statt $d\,s$ steht. Eben so sind die Integrale $\int_{s_0}^{s_1} y\,d\,s$ und $\int_{s_0}^{s_1} x\,d\,s$ die Summe der Momente dieser Gewichte auf die Ebenen xz und yz bezogen, so, daſs wegen $\mathfrak{R} = l$, die genannten Relationen (1) in **17.** zur Bestimmung des Schwerpunctes x, y, z (dort Mittelpunct der parallelen Kräfte genannt) einer krummen Linie im Raume, hier in folgende übergehen:

$$Xl = \int_{s_0}^{s_1} x \, ds, \quad Yl = \int_{s_0}^{s_1} y \, ds, \quad Zl = \int_{s_0}^{s_1} z \, ds \ldots (I)$$

wobei noch (Relat. 2 in **17.**) $l = \int_{s_0}^{s_1} ds \ldots (m)$ ist.

Anmerkung. Um in diesen Formeln nach der Variablen s integriren zu können, in welchem Falle die Grenzwerthe s_0, s_1 unmittelbar gelten, mufs man x, y, z als Functionen von s darstellen. Man mufs dagegen diese Grenzwerthe in die entsprechenden $x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1$ verwandeln, wenn man für ds den bekannten Werth $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ setzt und nach x, y, z integrirt. Welcher Vorgang von beiden der einfachere ist, hängt von Umständen ab, und es lassen sich hierüber gar keine bestimmten Regeln angeben.

23. Ist, um das Verfahren auf ein einfaches Beispiel anzuwenden, die gegebene Linie eine gerade Linie von der Länge $BB' = l$, bezeichnet man die Winkel, welche diese Gerade mit den Achsen der x, y, z bildet, beziehungsweise durch α, β, γ und die Coordinaten des Anfangspunctes B mit a, b, c; so sind jene irgend eines andern Punctes M dieser Geraden: $x = a + s \, Cos \, \alpha$, $y = b + s \, Cos \, \beta$, $z = c + s \, Cos \, \gamma$. Substituirt man diese Werthe in die vorigen Gleichungen (I) und führt die ganz einfachen Integrationen innerhalb der Grenzen von $s = 0$ bis $s = l$ aus; so erhält man, wenn man auch gleich mit l durchaus dividirt: $X = a + \frac{1}{2} l \, Cos \, \alpha$, $Y = b + \frac{1}{2} l \, Cos \, \beta$, $Z = c + \frac{1}{2} l \, Cos \, \gamma$, woraus sofort folgt, dafs der Schwerpunct dieser geraden Linie (wie es ohnehin bekannt) in ihrem Halbirungspuncte liegt.

Weniger einfach gelangt man zu diesem Resultate durch die zweite vorhin erwähnte Methode, nach welcher man die Gleichungen der Geraden BB' (d. i. $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$. Comp. S. 360) aufstellen, daraus die Differentialquotienten $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$ entwickeln und in die Gleichung $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = dz \sqrt{\left(1 + \frac{dx^2}{dz^2} + \frac{dy^2}{dz^2}\right)}$, so wie wieder diesen Werth in die obigen Relationen (I) substituiren und dann nach z innerhalb der Grenzen $x', x'', y', y'', z', z''$ integriren mufs, wenn x', y', z' und x'', y'', z'' die Coordinaten der Endpuncte B, B' dieser Geraden bezeichnen. Auf diesem Wege erhält man, mit Berücksichtigung der Relation $l = \sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}$ (Comp. S. 356) sofort $X = \frac{1}{2}(x' + x'')$, $Y = \frac{1}{2}(y' + y'')$, $Z = \frac{1}{2}(z' + z'')$, welches bekanntlich die Coordinaten des Halbirungspunktes dieser Geraden BB' sind.

24. Für eine ebene Curve fällt, wenn man die Ebene, in welcher sie liegt, zur Ebene der xy nimmt, von den 3 Relationen (I)

;n **22.** die dritte in z weg. Aufserdem fällt von diesen Relationen auch noch die zweite, nämlich die in y weg, wenn man einen Durchmesser der Schwere (§. 43) zur Abscissenachse nimmt.

25. Soll z. B. der Schwerpunkt eines Kreisbogens BAB' (Fig. 11), dessen Mittelpunct C ist, gefunden werden, so ziehe man an den Halbirungspunct A des Bogens den Halbmesser CA und nehme diesen, weil er eine Linie der Schwere ist (indem der Bogen BAB' durch CA in zwei gleiche symmetrische Theile getheilt wird) zur Abscissenachse, so wie den Punct C zum Anfang der rechtwinkeligen Coordinaten. Setzt man ferner den Halbmesser $CA = r$, Sehne $BB' = a$, Bogen $BAB' = l$, W. $ACB =$ W. $ACB' = i$ und endlich für einen beliebigen Punct M des Kreisbogens, Bog. $AM = s$, $CP = x$, $PM = y$ und W. $ACM = \alpha$; so ist wegen $\alpha = \frac{s}{r}$, sofort $x = r \, Cos \frac{s}{r}$ und nach der ersten der Relationen (I) in Nr. **22.**

$$Xl = \int_{-\frac{1}{2}l}^{+\frac{1}{2}l} r \, Cos \frac{s}{r} \, ds \; (= 2\int_0^{\frac{1}{2}l} r \, Cos \frac{s}{r} \, ds) = 2\, r^2 \, Sin \frac{l}{2r}$$

oder wegen $a = 2r \, Sin \, i = 2r \, Sin \frac{\frac{1}{2}l}{r} = 2r \, Sin \frac{l}{2r}$, auch

$$Xl = ra, \text{ woraus auch } l : a = r : X \text{ oder } X = \frac{ra}{l} \cdot \cdot \; (1)$$

folgt, wobei, wenn O den gesuchten Schwerpunct bezeichnet, sofort $X = CO$ ist.

Schwerpunct ebener Flächen.

(§. 47.)

26. Um den Schwerpunct der von der Abscissenachse AX, (Fig. 12), den beiden Ordinaten BN, $B'N'$ und dem entsprechenden Bogen der Curve AD eingeschlossenen ebenen Fläche BN' zu bestimmen, ziehe man zu den Abscissen $AP = x$ und $Ap = x + dx$ die rechtwinkeligen Ordinaten $PM = y$ und $pm = y + dy$, setze $AB = x'$, $AB' = x''$, Fläche $BN' = F$, also Fläche $Pm = dF$, und bemerke, dafs der Abstand des Schwerpunctes o des Flächenelementes Pm, welches als ein Rechteck anzusehen ist, von der Achse AX gleich $\frac{1}{2}y$ ist; so erhält man mit (l) und (m) in **22.** für den gegenwärtigen Fall die analogen Gleichungen:

$$XF = \int_{x'}^{x''} x \, dF, \quad YF = \int_{x'}^{x''} \tfrac{1}{2} y \, dF \quad \text{und} \quad F = \int_{x'}^{x''} dF. \quad (II)$$

(weil nämlich die 3te Relation in z hier wegfällt), wobei y und dF als unctionen von x auszudrücken sind, also die Gleichung der Curve AD, nämlich $y = f(x)$ gegeben seyn mufs.

Anmerkung. Die zweite dieser drei Gleichungen fällt wieder weg, wenn die Achse der x zugleich eine Linie der Schwere ist.

27. Um auf diesem Wege den Schwerpunct O eines geradlinigen Dreieckes ABC (Fig. 13) zu bestimmen, lege man dessen Spitze A in den Ursprung der rechtwinkeligen Coordinatenachsen und dessen Basis BC parallel mit der Ordinatenachse AY, halbire ferner BC in D und ziehe die Gerade AD; so ist diese Gerade (weil sie jedes mit BC parallele Flächenelement wie Nm in zwei gleiche Theile theilt, also durch dessen Schwerpunct geht) eine Linie der Schwere, in welcher sofort der Schwerpunct O des Dreieckes liegt. Setzt man daher die Abscisse dieses Punctes $AE = X$, ferner $AP = x$, $Pp = \mathrm{d}x$, $AF = h$, $NM = y$ und $BC = b$; so ist $dF = y\,\mathrm{d}x$ oder wegen $y : b = x : h$, nämlich $y = \frac{b}{h} x$, auch $dF = \frac{b}{h} x\,\mathrm{d}x$ und daher

$$F = \int_0^h \frac{b}{h}\,\mathrm{d}x = x\;\frac{b}{h}\frac{h^2}{2} = \tfrac{1}{2}\,b\,h,$$

endlich damit nach der ersten der vorigen Relationen (II):

$$\tfrac{1}{2}\,b\,h\,X = \int_0^h \frac{b}{h}\,x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b}{h}\frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{3}\,b\,h^2,$$

woraus endlich folgt:

$$X = \tfrac{2}{3}\,h.$$

Da also $AE = \frac{2}{3} AF$ ist, so folgt auch (wie in §. 48) $AO = \frac{2}{3} AD$.

28. Um den Schwerpunct der sogenannten parabolischen Fläche ANQ (Fig. 14) zu finden, seyen für einen beliebigen Punct M der Parabel die rechtw. Ordinaten $AP = x$, $PM = y$, so ist die Gleichung dieser Curve (Comp. §. 472) $y^2 = p\,x$.

Ist ferner $Pp = \mathrm{d}x$, so ist das Flächenelement $Pm = \mathrm{d}F = y\,\mathrm{d}x$ und die ganze Fläche $AMP = F = \int_0^x y\,\mathrm{d}x = \int_0 \mathrm{d}x \sqrt{p\,x} = \frac{2}{3}\,x\,y$. Nach der ersten der Relationen in (II) **26.** erhält man daher $\frac{2}{3}\,x\,y\,.\,X = \int_0^x x\,y\,\mathrm{d}x = \int_0 x\,\mathrm{d}x \sqrt{p\,x} = \sqrt{p}\int_0^x x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\,x^2\sqrt{p\,x} = \frac{2}{5}\,x^2\,y$ und daraus: $X = \frac{3}{5}\,x$.

Aus der zweiten dieser genannten Relationen:

$$\tfrac{2}{3}\,x\,y\,.\,Y = \int_0^x \tfrac{1}{2}\,y^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int_0^x p\,x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}\,p\,x^2 = \tfrac{1}{4}\,x\,y^2$$

und daraus: $Y = \frac{3}{8}\,y$.

Da nun für die bestimmte Fläche AQN die Abscisse x in AQ und die Ordinate y in NQ übergeht, so ist für den gesuchten Schwerpunct O sofort die Abscisse $AE = \frac{3}{5}\,AQ$ und die Ordinate $EO = \frac{3}{8}\,NQ$.

Für die ganze Fläche $NAN'N$ liegt der Schwerpunct offenbar in E.

Schwerpunct krummer Flächen.

(§. 52.)

29. Um den Schwerpunct einer Rotationsfläche zu finden, sey NN' (Fig. 12) der Bogen von bestimmter Länge einer ebenen Curve AD, welche sich um die Abscissenachse AX umdreht und dadurch eine sogenannte Rotationsfläche erzeigt, deren Schwerpunct in der Umdrehungsachse AX liegt und sofort bestimmt werden soll.

Bezeichnet man zu diesem Ende die rechtw. Coordinaten der Endpuncte N, N' dieses Bogens mit $x'\,y'$ und $x''\,y''$, so wie jene eines beliebigen Punctes M desselben mit x, y, setzt $Pp = \mathrm{d}x$, Bog. $AM = s$ und $Mm = \mathrm{d}s$; so erzeugt dieses Bogenelement $\mathrm{d}s$ bei der Umdrehung der Curve AD um die Achse AX die Oberfläche eines abgestutzten Kegels, welche (Comp. §. 863) durch $\mathrm{d}O = 2\,y\,\pi\,\mathrm{d}s = 2\,\pi\,y\,\mathrm{d}x\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)}$ ausgedrückt wird.

Die obigen Relationen (II) in **26.** gehen daher für den vorliegenden Fall in die folgenden über:

$$O\,X = 2\,\pi\int_{x'}^{x''} x\,y\,\mathrm{d}x\,\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)} \text{ und}$$

$$O = 2\,\pi\int_{x'}^{x''} y\,\mathrm{d}x\,\sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\right)},$$

in welchen Relationen man in bestimmten Fällen aus der Gleichung der gegebenen Curve $y = f(x)$ den Quotienten $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ bestimmen, ferner dessen Werth sammt jenen von y substituiren, und dann die Integrationen innerhalb der betreffenden Grenzen ausführen mufs, um die Abscisse X oder den Abstand AO des gesuchten Schwerpunctes O zu erhalten.

30. Ist, als einfachstes Beispiel, NN' eine mit der Achse AX parallele Gerade in dem Abstande r und von der Länge h, also die

Rotationsfläche die Mantelfläche eines gemeinen Cylinders vom Halbmesser r und von der Länge h; so ist wegen $y = r$, also $dy = 0$ sofort:

$$O = 2\pi \int_0^h r\,dx = 2r\pi h \text{ und } 2r\pi h\,X = 2\pi \int_0^h rx\,dx = 2r\pi \frac{h^2}{2}$$

folglich $X = \frac{1}{2} h$, wie sich von selbst versteht.

31. Eine durch den Ursprung A der Coordinaten gehende Gerade $AB = l$ (Fig. 15) erzeugt bei der erwähnten Rotation eine gewöhnliche Kegelfläche, wofür, wenn man die Ordinate $CB = r$ und die Abscisse $AC = h$ setzt, wegen $y = \frac{r}{h} x$, also $\frac{dy}{dx} = \frac{r}{h}$, sofort

$$O = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x\,dx \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right)} = \frac{2r\pi\sqrt{(h^2+r^2)}}{h^2} \int_0^h x\,dx$$

$$= \frac{2r\pi l}{h^2}\frac{h^2}{2} = r\pi l \text{ und damit}$$

$$r\pi l\,X = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x^2\,dx \sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{h^2}\right)} = \frac{2r\pi l}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \tfrac{2}{3} r\pi l h$$

folglich $X = \frac{2}{3} h$ wird.

32. Ist die erzeugende Curve ein Kreisbogen NN' (Fig. 16) vom Halbmesser $CA = r$, so entsteht durch die Umdrehung desselben um den Durchmesser AA' eine Kugelzone mit zwei Grundflächen, und da $y = \sqrt{(r^2 - x^2)}$ die Gleichung des Kreises ist, wenn man die Abscissen vom Mittelpuncte C aus zählt, folglich $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$ und $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = \frac{r}{\sqrt{(r^2-x^2)}}$ wird; so hat man nach den beiden Relationen in **29.**, wegen $CB = x'$ und $CB' = x''$ sofort:

$$O = 2\pi \int_{x'}^{x''} \sqrt{(r^2 - x^2)} \frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} = 2r\pi \int_{x'}^{x''} dx = 2r\pi\,(x'' - x')$$

und damit

$$2r\pi\,(x'' - x')\,X = 2\pi \int_{x'}^{x''} x\sqrt{(r^2 - x^2)} \frac{r\,dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}$$

$$= 2r\pi \int_{x'}^{x''} x\,dx = 2r\pi\left(\frac{x''^2 - x'^2}{2}\right)$$

woraus endlich folgt: $X = \frac{1}{2}(x' + x'')$,

so, daſs also der gesuchte Schwerpunct O in der halben Höhe der Zone liegt. (§. 54.)

Dasselbe Resultat erhält man offenbar auch für eine Zone mit einer Grundfläche, d. i. für eine Kugelhaube oder Kugelschale, indem man dafür nur $x'' = CA = r$ setzen darf. Auch wird für die Oberfläche der Halbkugel, wegen $x' = 0$ und $x'' = r$ ebenfalls nach dieser Regel $X = \frac{1}{2} r$.

Schwerpunct der Körper.

(§. 55.)

33. Da bei homogenen Körpern, wie sie hier immer vorausgesetzt werden, das Gewicht dem Volumen proportional ist, das Volumen daher zur gröfseren Einfachheit statt dem Gewichte gesetzt werden darf (indem der Factor, welcher das Gewicht der cubischen Einheit bezeichnet, zuletzt überall hinausfällt); so erhält man zur allgemeinen Bestimmung des Schwerpunctes eines Körpers, wenn man dessen Volumen mit V, also ein Element davon mit $\mathrm{d}V$ bezeichnet, die nachstehenden (mit jenen in **22.** analogen) Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} VX = \int x\,\mathrm{d}V, \quad VY = \int y\,\mathrm{d}V, \quad VZ = \int z\,\mathrm{d}V, \\ \qquad\qquad V = \int \mathrm{d}V. \end{array}\right\} \text{(III)}$$

wobei sich die Grenzen, innerhalb welcher die Integrationen ausgeführt werden müssen, in den einzelnen speciellen Fällen immer von selbst ergeben

34. Um z. B. den Schwerpunct einer Pyramide $ABCD$ (Fig. 17) von einer beliebigen Grundfläche zu bestimmen, verbinde man die Spitze der Pyramide A mit dem Schwerpunct E der Grundfläche, wodurch AE eine Linie der Schwere wird, in welcher sofort der gesuchte Schwerpunct 0 liegt. Fällt man ferner aus demselben Puncte A auf die Grundfläche der Pyramide das Perpendikel AF, nimmt dieses zur Abscissenachse, so wie den Punct A zum Ursprung der rechtw. Coordinaten, legt durch die Puncte P und p wofür $AP = x$ und $Pp = \mathrm{d}x$ ist, zwei Ebenen $b\,c\,d$ und $b'\,c'\,d'$ parallel mit der Grundfläche BCD, bezeichnet die Gröfse der Grundfläche $B\,C\,D$ mit f, so wie jene des ähnlichen Polygones $b\,c\,d$ mit z und endlich die Höhe der Pyramide AF mit h; so ist zuerst $\mathrm{d}V = z\,\mathrm{d}x$ oder wegen $f : z = h^2 : x^2$, woraus $z = \frac{f}{h^2} x^2$ folgt, auch $\mathrm{d}V = \frac{f}{h^2} x^2\,\mathrm{d}x$ und daraus

$$V = \int_0^h \frac{f}{h^2} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{f}{h^2} \frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{3} f h \text{ (wie ohnehin bekannt.)}$$

$\frac{1}{3}$

Mit diesen Werthen von V und dV erhält man aus der erstern der Relationen (III) in **33.**

$$\tfrac{1}{3} fh . X = \frac{f}{h^2}\int_0^h x^3 \, dx = \frac{f}{h^2}\frac{h^4}{4} = \tfrac{1}{4} fh^2$$

und daraus $X = \tfrac{3}{4} h,$

so, dafs also, wenn AN die Abscisse des gesuchten Schwerpunctes O ist, sofort $AN = \tfrac{3}{4} AF$, folglich auch $AO = \tfrac{3}{4} AE$ wird (§. 55).

35. Zur Bestimmung des Schwerpunctes einer mit der Grundfläche parallel abgestutzten Pyramide BCd (Fig. 18), in welcher die gröfsere Grundfläche $BCD = F$, die kleinere $bcd = f$, ihre Höhe $fF = h$, jene der Ergänzungspyramide $Af = h'$ und die Höhe der ergänzten Pyramide $AF = h''$ ist, mufs man die beiden vorigen Integrationen von $x = h'$ bis $x = h''$ ausführen. Dadurch findet man fürs Erste, nach einigen einfachen Reductionen (und wie ohnehin aus der Geometrie bekannt) $V = \tfrac{1}{3} h (F + f + \sqrt{Ff})$ und damit weiters

$$\tfrac{1}{3} h (F + f + \sqrt{Ff}) X = \frac{F}{h''^2}\int_{h'}^{h''} x^3 \, dx = \frac{F}{h''^2}\frac{(h''^4 - h'^4)}{4}$$

woraus $X = \frac{3}{4}\frac{F}{h''^2}\frac{(h''^4 - h'^4)}{h(F + f + \sqrt{Ff})} \ldots (a)$ folgt.

Nimmt man ferner zwei ähnlich liegende Seiten der Pyramide, z B. bc, BC und setzt $bc = a$, $BC = A$; so erhält man wegen $h' : h'' = a : A$ und $f : F = a^2 : A^2$, auch $h' : h = a : A - a$ und $h'' : h = A : A - a$, folglich $h' = \frac{a}{A-a} h$ und $h'' = \frac{A}{A-a} h$, so wie auch $f = \frac{a^2}{A^2} F$. Diese Werthe für h', h'' und f in die vorige Gleichung (a) substituirt und gehörig reducirt erhält man auch:

$$X = \tfrac{3}{4} h \frac{A^4 - a^4}{(A-a)^2 (A^2 + Aa + a^2)}$$

und wenn man den Abstand des gesuchten Schwerpunctes anstatt von der Spitze A abwärts, von der Grundfläche d. i. vom Puncte F aufwärts zählt und diesen Abstand mit X' bezeichnet, wodurch in der vorigen Relation $X = h'' - X'$ zu setzen ist, endlich auch nach allen Reductionen:

$$X' = \tfrac{1}{4} h \frac{A^2 + 2Aa + 3a^2}{A^2 + Aa + a^2} \ldots (b) \text{ (§. 57.)}$$

36. Zur Bestimmung des Schwerpunctes eines Rotationskörpers drehe sich die von der Curve NN' (Fig. 12) den beiden rechtwinkeligen Ordinaten BN, $B'N'$ und der Abscisse BB' begrenzte ebene Fläche um die Abscissenachse AX; so entsteht ein Rotationskörper, dessen Schwerpunct O offenbar in dieser Achse selbst liegt und wofür, wenn A der Ursprung der Coordinaten ist, $AO = X$ seyn soll.

Mit Beibehaltung der in Nummer **29.** gewählten Bezeichnung beschreibt bei dieser Rotation das Flächenelement Pm (welches bekanntlich als ein Rechteck anzusehen ist) einen Cylinder von kreisförmigen Grundflächen, dessen Inhalt $dV = y^2 \pi \, dx$ ist. Damit verwandeln sich die obigen Relationen (III) in **33.** in die folgenden:

$$V = \pi \int_{x'}^{x''} y^2 \, dx \quad \text{und} \quad VX = \pi \int_{x'}^{x''} x \, y^2 \, dx.$$

37. Dreht sich als einfachstes Beispiel das rechtwinkelige Dreieck ABC (Fig. 15) um die Cathete AC, so entsteht ein gerader Kegel von der Höhe $AC = h$ und der kreisförmigen Basis vom Halbmesser $BC = r$. Da nun $y = \frac{r}{h} x$ die Gleichung der Geraden AB ist, so folgt nach den beiden vorigen Relationen:

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 \, dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \tfrac{1}{3} r^2 \pi h, \text{ ferner}$$

$$\tfrac{1}{3} r^2 \pi h X = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^3 \, dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{h^4}{4} = \tfrac{1}{4} r^2 \pi h^2$$

und daraus wieder $\qquad X = \frac{3}{4} h.$

Anmerkung. Ist in dem genannten Dreiecke ABC (Fig. 15) bc parallel mit BC, und setzt man $bc = r$, $BC = R$, $Ac = h'$, $AC = h''$ und $Cc = h'' - h' = h$; so beschreibt bei der angenommenen Rotation die Fläche Cb einen mit der Grundfläche parallel abgestutzten Kegel, dessen Höhe $= h$ ist, und deren Grundflächen die Halbmesser R und r haben

Um nun dafür den Schwerpunct O zu bestimmen, darf man nur die beiden vorigen Relationen in die nachstehenden

$$V = \pi \int_{h'}^{h''} \frac{R^2}{h''^2} x^2 \, dx \quad \text{und} \quad VX = \pi \int_{h'}^{h''} \frac{R^2}{h''^2} x^3 \, dx \quad \text{verwandeln,}$$

woraus man $V = \frac{R^2 \pi}{h''^2} \cdot \frac{1}{3} (h''^3 - h'^3)$ und $VX = \frac{R^2 \pi}{h''^2} \cdot \frac{1}{4} (h''^4 - h'^4)$

folglich $\qquad X = \frac{3}{4} \frac{h''^4 - h'^4}{h''^3 - h'^3}$ erhält.

Nun ist $h' : h'' = r : R$ oder $h' : h = r : R - r$ und $h'' : h = R : R - r$, also

$h' = h \dfrac{r}{R-r}$ und $h'' = h \dfrac{R}{R-r}$, folglich auch, wenn man diese Werthe

substituirt: $$X = \tfrac{3}{4}\, h \frac{(R+r)\,(R^2+r^2)}{R^3 - r^3}$$

oder wenn man $CO = X'$ setzt, wodurch $X = AO = h'' - X' = h \dfrac{R}{R-r} - X'$

wird, nach gehöriger Substitution und Reduction, endlich:

$$X' = \tfrac{1}{4}\, h \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$$

(analog mit der Gleich. (b) in **35.**)

38. Ist die Begrenzungscurve NN' (Fig. 16) ein Kreisbogen, folglich der Rotationskörper ein Kugelabschnitt mit zwei Grundflächen, so ist, wenn man die Abscissen vom Mittelpunct C zählt und den Halbmesser mit r bezeichnet, $y^2 = r^2 - x^2$ und daher (Relationen in **36.**):

$$V = \pi \int_{x'}^{x''} dx\,(r^2 - x^2) = \pi\left[r^2(x'' - x') - \tfrac{1}{3}(x''^3 - x'^3)\right]$$
$$= \tfrac{1}{3}\pi\,(x'' - x')\,(3r^2 - x'^2 - x'x'' - x''^2)$$

und $$VX = \pi \int_{x'}^{x''} x\,dx\,(r^2 - x^2) = \pi\left[\tfrac{1}{2} r^2 (x''^2 - x'^2) - \right.$$
$$\left.\tfrac{1}{4}(x''^4 - x'^4)\right] = \tfrac{1}{4}\pi\,(x''^2 - x'^2)\,(2r^2 - x'^2 - x''^2)$$

woraus durch Division $\dfrac{VX}{V}$ und gehöriger Reduction, sofort

$$X = \frac{3}{4}\,\frac{(x' + x'')\,(2r^2 - x'^2 - x''^2)}{3r^2 - x'^2 - x'x'' - x''^2}$$

folgt.

Für einen Kugelabschnitt mit einer Grundfläche, folgt aus diesem Ausdrucke, wegen $x'' = r$ und wenn man die Höhe des Kugelsegmentes mit h bezeichnet, wodurch $x' = r - h$ wird, sofort

$$X = \frac{3}{4}\,\frac{(2r - h)^2}{3r - h}.$$

Endlich folgt noch aus dieser letztern Relation für den Schwerpunct der Halbkugel, wegen $h = r$, übereinstimmend mit dem Werthe CO in §. 58: $X = \tfrac{3}{8} r$.

39. Ist endlich die erzeugende Fläche von einem parabolischen Bogen AN' (Fig. 12) begrenzt, folglich der Rotationskörper ein parabolisches Conoid, so erhält man, wegen $y^2 = px$ (Gleich. der Parabel AN', die Abscissen vom Scheitel A gezählt):

$$V = \pi \int_0^x px\,\mathrm{d}x = \pi p \frac{x^2}{2} \quad \text{und} \quad VX = \pi \int_0^x px^2\,\mathrm{d}x = \pi p \frac{x^3}{3},$$

folglich: $$X = \tfrac{2}{3}x.$$

Guldins'che Regeln.

40. Stellt o (Fig. 12) den Schwerpunct der ebenen Curve $NN' = l$ vor, so ist für $Po = Y$ nach der zweiten der Relat. (I) in **22**:

$$Yl = \int_{s_0}^{s_1} y\,\mathrm{d}s$$ oder, wenn man mit 2π multiplicirt, auch

$$2Y\pi l = \int_{s_0}^{s_1} 2y\pi\,\mathrm{d}s.$$

Nun entsteht aber durch Umdrehung dieser Curve NN' um die Achse AX eine Rotationsfläche, deren Oberfläche durch den zweiten Theil dieser Gleichung ausgedrückt wird, während der erste Theil nichts anders als das Product aus dem Weg des Schwerpunctes o in die Länge l der Curve bezeichnet: die durch Umdrehung einer ebenen Curve um eine in ihrer Ebene liegende Achse erzeugte Rotationsfläche ist also gleich dem Producte aus der Länge der Curve in den Weg, welchen der Schwerpunct derselben bei dieser Umdrehung beschreibt.

41. Bezeichnet dagegen o den Schwerpunct der von der Curve NN' (Fig. 12) begrenzten ebenen Fläche $BN' = F$ und ist wieder $Po = Y$, so entsteht durch die Umdrehung dieser Fläche um die Achse AX ein Rotationskörper, dessen Inhalt durch $\int_{x'}^{x''} y^2 \pi\,\mathrm{d}x$ ausgedrückt wird. Es ist aber nach der zweiten Relation (II) in **26**.

$YF = \int_{x'}^{x''} \tfrac{1}{2} y\,\mathrm{d}F$ oder wegen $\mathrm{d}F = y\,\mathrm{d}x$ und wenn man auch gleich wieder mit 2π multiplicirt:

$$2Y\pi . F = \int_{x'}^{x''} y^2 \pi\,\mathrm{d}x,$$

d. h. der Inhalt des durch Umdrehung der ebenen Fläche F um die Achse AX erzeugten Körpers ist gleich dem Producte aus dieser Fläche in den Weg, welchen ihr Schwerpunct bei dieser Rotation zurücklegt.

Um diese beiden Regeln, welche mehr zur Darstellung einer interessanten Eigenschaft des Schwerpunctes als des Gebrauches wegen angeführt werden, auf ein ganz einfaches Beispiel anzuwenden, drehe sich die Gerade $AB = l$ (Fig. 15) um AC, wobei das auf AC gezogene Perpendikel $BC = r$ seyn soll, folglich der Abstand des Schwerpunctes o der Geraden AB von $AC = \frac{1}{2} r$ ist. Zufolge der erstern Regel (**40.**) ist daher die durch diese Rotation erzeugte Kegelfläche $O = 2 . \frac{1}{2} r \pi . l = r \pi l$.

Dreht sich dagegen das rechtwinkelige Dreieck ABC um diese Gerade $AC = h$, und ist m der Schwerpunct dieser Fläche, folglich wegen $Am = \frac{2}{3} Ad$ der Abstand $mn = \frac{2}{3} Cd = \frac{2}{3} . \frac{1}{2} r = \frac{1}{3} r$; so ist nach der zweiten dieser Regeln (**41.**) das Volumen des durch Rotation dieser Fläche $ABC = \frac{1}{2} rh$ erzeugten Kegels: $V = 2 . \frac{1}{3} r \pi . \frac{1}{2} rh = \frac{1}{3} r^2 \pi h$, Alles, wie es aus der Geometrie bekannt ist.

Anmerkung. Um schlüfslich noch eine bemerkenswerthe Eigenschaft des Schwerpunctes zu entwickeln, seyen p, p', p'' .. die Gewichte und M, M', M'' .. die Schwerpuncte von Körpern, welche zusammen ein unveränderliches System bilden, dessen Schwerpunct in O liegen soll. Bezieht man das System auf drei rechtwinkelige Coordinatenachsen, deren Ursprung in A liegt, bezeichnet die Entfernung der einzelnen Schwerpuncte M, M' .. von diesem Ursprunge A durch r, r', r'' .., den Abstand des gemeinschaftlichen Schwerpunctes O von A mit R, die Winkel welche R mit den Achsen der x, y, z bildet beziehungsweise mit a, b, c, jene der r mit diesen Achsen mit α, β, γ, der r' mit α', β', γ' u. s. w. und setzt endlich die Summe der Gewichte (als Resultirende, deren Angriffspunct O ist) $p + p' .. = \Sigma(p) = P$; so folgt nach den Relationen (1) in Nr. **17.** indem die von O, M, M' ... auf die Ebene der xy gefällten Perpendikel durch $R \cos c$, $r \cos \gamma$, $r' \cos \gamma'$ ... und eben so die Perpendikel auf die Ebene der xz durch $R \cos b$, $r \cos \beta$, $r' \cos \beta'$ .. und auf die Ebene der yz durch $R \cos a$, $r \cos \alpha$, $r' \cos \alpha'$ .. ausgedrückt werden, sofort:

$$PR \cos a = \Sigma(pr \cos \alpha)$$
$$PR \cos b = \Sigma(pr \cos \beta)$$
$$PR \cos c = \Sigma(pr \cos \gamma)$$

die Summe der Quadrate dieser drei Gleichungen gibt, mit Berücksichtigung dafs (Comp. §. 572) $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ u. s. w. ferner, wenn $(r.r')$ den Winkel bezeichnet, welchen die Geraden r und r' mit einander einschliefsen, und die übrigen Winkel damit analog bezeichnet werden, wegen (Comp. §. 572) $\cos(r.r') = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$ und so auch analog für die übrigen Winkel nach gehöriger Reduction:

$$P^2 R^2 = \Sigma(p^2 r^2) + \Sigma(2pp'rr' \cos[r.r'])$$

Sind ferner a, a', a'' .. die Abstände der Schwerpuncte M, M' .. untereinander, so ist bekanntlich $2rr' \cos(r.r') = r^2 + r'^2 - a^2$ und so auch für die Übrigen, folglich geht die vorige Relation über in folgende:

$$P^2 R^2 = \Sigma(p^2 r^2) + \Sigma(pp'[r^2 + r'^2 - a^2])$$

oder da alle r^2 enthaltenden Glieder die Form haben $pr^2(p + p' + .. =)$

Ppr^2 und das Ähnliche auch für die r'^2, r''^2... enthaltenden Glieder Statt findet, eben so $P^2R^2 = P\,\Sigma(pr^2) - \Sigma(pp'a^2)$ oder endlich:

$$P\,\Sigma(p\,r^2) = P^2R^2 + \Sigma(pp'a^2)$$

aus welcher Relation sofort der Satz folgt, dafs wenn der Abstand R des Schwerpunctes eines Systemes von schweren Puncten oder Körpern von irgend einem festen Puncte (A) constant bleibt, dagegen sich die Lage des in seiner Form unveränderlichen Systemes wie immer ändert (wodurch sich sofort die Winkel α, β, γ u. s. w. ändern) die Summe der Producte aus den einzelnen Gewichten in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpuncte von diesem festen Puncte ebenfalls eine constante Gröfse ist.

Da ferner, wie dieselbe Relation zeigt, $\Sigma(pr^2)$ für $R = 0$ am kleinsten ist, so folgt noch, dafs die Summe der Producte der Gewichte in die Quadrate der Abstände ihrer Schwerpuncte von diesem gemeinschaftlichen Schwerpunct ein Minimum ist.

Einige weitere wichtige Eigenschaften des Schwerpunctes werden noch in Nr. **61**, Anmerk. 2 unter 8., 9. und 10. angeführt werden.

Die Kettenlinie.

(§. 69.)

42. Um eine Gleichung der in den Puncten A und B (Fig. 19) aufgehängten vollkommen biegsamen Schnur oder Kette (von sehr feinen Gliedern) $AMCB$, wovon gleiche Längen auch ein gleiches Gewicht haben sollen, abzuleiten, nehme man den einen Aufhängpunct A zum Ursprung der rechtwinkeligen Coordinaten und die durch diesen Punct gezogene Horizontale AA' zur Abscissenachse, setze also für einen beliebigen Punct M der Curve $AP = x$, $PM = y$ und Bog. $AM = s$; setzt man ferner die Länge der Kette $ACB = l$, die Coordinaten des zweiten Aufhängpunctes B d. i. $AE = c$, $EB = d$ und ersetzt (wodurch nichts geändert wird) diesen festen Punct B durch eine nach der Tangente wirkenden Kraft S, welche der in diesem Puncte Statt findenden Spannung gleich ist, so kann man diese Kraft in zwei aufeinander senkrechte Seitenkräfte P und Q zerlegen, wovon die erstere vertical, dle letztere daher horizontal wirkt. Die im Puncte M nach der Richtung der Tangente MT Statt findende Spannung T, welche sofort dem Gewichte, also auch der Länge des Bogens MCB proportional ist, kann eben so in zwei Seitenkräfte P', Q' nach verticaler und horizontaler Richtung zerlegt werden, und zwar ist, wenn man W. $TMP = \varphi$ setzt, dafür:

$P' = T\,Cos\,\varphi$ und $Q' = T\,Sin\,\varphi$ oder wegen $Sin\,\varphi = \frac{mn}{Mm} = \frac{dx}{ds}$ und $Cos\,\varphi = \frac{Mn}{Mm} = \frac{dy}{ds}$ (wenn nämlich Mmn das sogenannte Differenzial-dreieck vorstellt) auch $P' = T\frac{dy}{ds}$ und $Q' = T\frac{dx}{ds}$.

Ist nun R die Resultirende aus dem Gewichte des Bogenstückes MCB, so müssen für das Gleichgewicht die beiden Gleichungen bestehen: $Q' = Q$ und $P + P' = R$, oder wenn man für Q' und P' die obigen Werthe setzt und berücksichtigt, dafs wenn p das Gewicht der Längeneinheit des Bogens s bezeichnet, sofort $R = \int_x^c p\,ds = -\int_c^x p\,ds$ ist, auch (1) $T\frac{dx}{ds} = Q$ und $T\frac{dy}{ds} = -P - \int_c^x p\,ds$ oder (mit Rücksicht auf diese Gleich. 1) $Q\frac{dy}{dx} = -P - \int_c^x p\,ds$ (2).

Differenziirt man diese letztere Gleichung, in welcher P, Q und dx constant sind, so erhält man $Q\frac{d^2y}{dx} = -p\,ds = -p\,dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$

oder $\dfrac{Q\,dy\,\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = -p\,dy$ und daraus durch Integration:

$$Q\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = C - py \quad (m)$$

Um die Constante C zu bestimmen berücksichtige man, dafs der Quotient $\frac{dy}{dx}$, welcher bekanntlich die trigon. Tangente des Winkels darstellt, welchen die in irgend einem Puncte (x, y) der Curve gezogene Tangente mit der Abscissenachse bildet, für $y = 0$ in $tang\,\alpha$ übergeht, wenn man den Winkel der Tangente der Curve im Anfangspuncte A mit α bezeichnet, so, dafs also $C = Q\sqrt{(1 + tang\,\alpha^2)} = Q\,Sec\,\alpha$ und damit in (m) $Q\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = Q\,Sec\,\alpha - py$ wird. Aus dieser Gleichung folgt aber $\frac{dy^2}{dx^2} = \frac{(Q\,Sec\,\alpha - py)^2 - Q^2}{Q^2}$, oder wenn man den constanten Quotient $\frac{Q}{p} = b \ldots (n)$ und $b\,Sec\,\alpha = \frac{b}{Cos\,\alpha} = a \ldots (r)$ setzt, auch $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\sqrt{[(b\,Sec\,\alpha - y)^2 - b^2]} \ldots (g)$ und

$$dx = \frac{b\,dy}{\sqrt{[(a-y)^2-b^2]}} \;.\;.\; (3)$$

durch die Integration dieser Differenzialgleichung erhält man (Compend. §. 777, wo $\alpha = a^2 - b^2$, $\beta = -2a$ und $\gamma = 1$ zu setzen ist):

$$x = b\,l\left\{a - y \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}\right\} + C$$

um die Constante C zu bestimmen, darf man nur berücksichtigen, dafs für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn mufs (und dafs für diesen Punct A von den doppelten Zeichen blofs das obere gilt), wodurch man erhält $C = -b\,l\,[(a - \sqrt{(a^2 - b^2)}]$ und womit endlich, wenn man diesen Werth substituirt und reducirt,

$$x = b\,l\left\{\frac{a - y \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right\} \; (I)$$

wird, welches sofort die gesuchte Gleichung der Kettenlinie ist.

Zur Bestimmung des Bogens s hat man $ds = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ oder wenn man für $\frac{dy}{dx}$ den Werth aus der obigen Gleichung (g) substituirt, auch $ds = \frac{(a-y)}{b}\,dx \;.\;.\; (h)$ oder wegen Gleich. (3):

$$ds = \frac{(a-y)\,dy}{\sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}}$$ und daraus durch Integration:

$$s = C - \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}.$$

Da nun für $y = 0$ auch $s = 0$ seyn mufs, so wird die Constante $C = \sqrt{(a^2 - b^2)} = b\sqrt{(Sec\,\alpha^2 - 1)} = b\,tang\,\alpha = a\,Sin\,\alpha$, folglich

$$s = a\,Sin\,\alpha \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]} \;.\;.\; (II).$$

Sind $AD = x'$ und $DC = y'$ die Coordinaten des tiefsten Punctes C der Curve, so ist für diesen Punct, wie bekannt $\frac{dy}{dx} = 0$, also aus Gleich (3) $a - y' = b$, oder $y' = a - b$; ferner folgt damit aus Gleich. (I): (i) $x' = b\,l\left[\frac{b}{a - \sqrt{(a^2 - b^2)}}\right]$ und aus jener (II): $s = AMC = l' = b\,tang\,\alpha = a\,Sin\,\alpha$ und damit auch allgemein:

$$s = l' \mp \sqrt{[(a-y)^2 - b^2]}.$$

43. Wie man aus der Gleichung (I) ersieht, so ist die Form der Curve von dem zweiten Aufhängpunct B oder $x = c$, $y = d$ ganz unabhängig. Nimmt man nun diesen ebenfalls in der Horizontalen oder in der Achse AA' in A' an, so ist dafür $c = AA'$ und $d = 0$, folglich aus (I) für $y = 0$:

$$c = b\,l\left[\frac{a + \sqrt{(a^2-b^2)}}{a - \sqrt{(a^2-b^2)}}\right] = b\,l\left[\frac{b^2}{[a-\sqrt{(a^2-b^2)}]^2}\right]$$

$$= 2\,b\,l\left[\frac{b}{a-\sqrt{(a^2-b^2)}}\right] = 2\,x'$$

(wegen Gleich. i), so dafs also die Ordinate des tiefsten Punctes C die Abscissenachse im Halbirungspuncte D von $A\,A'$ schneidet

Anmerkung 1. Zur Bestimmung der beiden constanten Gröfsen a und b wodurch auch (Gleich. r) der Winkel α gegeben ist, kann man, da c, d, l als bekannt anzusehen sind, in der Gleichung (I) $x = c$, $y = d$ und in jener (II) $s = l$ und $y = d$ setzen, durch welche beide Gleichungen (in deren letztern auch noch $Sec\,\alpha = \frac{a}{b}$ zu berücksichtigen kommt) dann, wenigstens im Principe, a und b gegeben sind.

Anmerkung 2. Die obige Gleichung (I) der Kettenlinie läfst sich durch folgende successive Transformirungen auf eine einfachere Form bringen. Zählt man nämlich zuerst die Abscissen auf der Ordinatenachse $A\,Y$ (Fig. 20), setzt nämlich $A\,p = x$, wofür sowohl $p\,M$ als auch $p\,M' = y$ ist; so mufs man in der Gleich. (I) x mit y verwechseln, wodurch man erhält

$$y = b\,l\left[\frac{a - x \mp \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}}{a - \sqrt{(a^2-b^2)}}\right].$$

Nimmt man CD zur Abscissenachse, setzt also $D\,P_1 = x$, $P_1\,M = P_1\,M' = y$, so mufs man in dieser letzten Gleichung statt y setzen $A\,D - y$, mit dem obern und $A\,D + y$ mit dem untern Zeichen; dadurch erhält man, wegen

$$A\,D = b\,l\left[\frac{b}{a-\sqrt{(a^2-b^2)}}\right]$$ (Gleich. i) für beide Fälle denselben

Werth: $$\pm\, y = b\,l\left[\frac{a - x + \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}}{b}\right]$$

oder es ist $$e^{+\frac{y}{b}} = \frac{1}{b}\left[a - x + \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}\right]$$

und $$e^{-\frac{y}{b}} = \frac{1}{b}\left[a - x - \sqrt{[(a-x)^2 - b^2]}\right]$$ (wo e die Basis der nat. Logarithmen bezeichnet)

folglich $$e^{+\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}} = \frac{2}{b}\,(a - x)$$

Zählt man die Abscissen vom Puncte C aus, setzt also $C\,P_1 = x$ und $P_1\,M = P_1\,M' = y$, so mufs man in dieser letzten Gleichung statt x schreiben $C\,D - x = y' - x = a - b - x$, wodurch das vorige Binom $a - x$ in $b + x$ und die Gleichung der Curve in jene $b + x = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}}\right)$ übergeht. Zieht man ferner in der Entfernung $C\,A'' = b$ mit $A\,A'$ eine Parallele, nimmt diese zur Abscissenachse und den Punct A'' zum Ursprung der Coordinaten, setzt nämlich $A'' P_1 = x$ und $A'' Q = A' Q' = y$; so erhält man aus dieser letzten Gleichung, da man darin $x - b$ statt x setzen mufs, $x = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{y}{b}} + e^{-\frac{y}{b}}\right)$, man erhält endlich durch Verwechslung der beiden Achsen, wodurch $A'' Q = A'' Q' = x$ und $QM = Q'M' = y$ wird, als einfachste Gleichung der Kettenlinie:

$$y = \frac{b}{2}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right).$$

44. Aus der obigen Gleichung (1) folgt für die Spannung der Kette in irgend einem Puncte M (Fig. 19) $T = Q \frac{ds}{dx} = Q \frac{a-y}{b}$ (Gleich. h). Da nun im Aufhängpuncte A die Ordinate $y = o$, so folgt, dafs diese Spannung in A am gröfsten und zwar $T = \frac{a}{b} Q$ ist. Für den tiefsten Punct C ist die Ordinate $y = y'$ am gröfsten, folglich die Spannung an diesem Puncte $T = \frac{a-y'}{b} Q = Q$ (wegen $y' = a - b$) am kleinsten.

45. Anstatt der Voraussetzung, dafs gleiche Bogenlängen der Curve ACB (Fig. 19) gleiche Gewichte haben, kann man auch, wie es bei Kettenbrücken der Fall ist, bei welchen das Gewicht der Ketten gegen die Belastung der horizontalen Fahrbahn vernachlässigt werden darf, annehmen, dafs gleiche Längen der Projectionen der Curve auf die horizontal gezogene Abscissenachse AA' gleiches Gewicht haben sollen, so, dafs also nicht mehr die Curve, sondern die Abscissenachse gleichförmig belastet erscheint.

Unter dieser Voraussetzung verwandelt sich, wenn jetzt p das Gewicht der Längeneinheit der Abscisse x bezeichnet, dagegen alle übrigen Bezeichnungen die nämlichen bleiben, die Gleichung (2) in Nr. **42.** in die folgende $T \frac{dy}{ds} = -P - \int_c^x p\, dx$, während jene (1), nämlich (α) . . $T \frac{dx}{ds} = Q$ ungeändert bleibt.

Die erstere dieser beiden Gleichungen integrirt, gibt $T \frac{dy}{ds} = -P + p\,(c - x)$ und wenn man diese so erhaltene Gleichung durch die vorige (α) dividirt:

$$(\beta)\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-P + p(c-x)}{Q}.$$

Da für $x = 0$ der Quotient $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = tang\,\alpha$, also $tang\,\alpha = \frac{-P+pc}{Q}$ wird, so hat man auch, diesen Werth in (β) substituirt:

$$(1)\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = tang\,\alpha - \frac{px}{Q} \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}y = tang\,\alpha\,\mathrm{d}x - \frac{p}{Q}\,x\,\mathrm{d}x.$$

Diese letzte Gleichung integrirt, gibt:

$$(2)\quad y = x\,tang\,\alpha - \frac{p}{2Q}\,x^2,$$

wozu keine Constante kommt, weil für $x = 0$ auch $y = 0$ seyn mufs. Da ferner für $x = c$, $y = d$ seyn soll, so folgt aus dieser letzten Gleichung $d = c\,tang\,\alpha - \frac{pc^2}{2Q}$

oder $$(3)\quad tang\,\alpha = \frac{d}{c} + \frac{pc}{2Q}.$$

Wird dieser Werth in der Gleichung (2) substituirt, so erhält man als Gleichung der gesuchten Curve:

$$(4)\quad y = \frac{d}{c}\,x + \frac{p}{2Q}\,(cx - x^2)$$

und zwar ist dieses (Compend. §. 493, wo nur x mit y verwechselt werden darf) die Gleichung der gemeinen Parabel.

Anmerkung 1. Um in dieser letztern Gleichung die Constante Q zu bestimmen, kann man für irgend einen Punct M die Abscisse $AP = x'$ und Ordinate $PM = y'$ messen und für x und y in dieser Gleichung substituiren. Am einfachsten ist es jedoch in der Curve einen Punct N anzunehmen, wofür die Abscisse $AF = \frac{c}{2}$ ist. Setzt man dann die gemessene Ordinate $FN = FO + ON = \frac{d}{2} + h$, wobei also auch h als bekannt anzusehen ist; so erhält man durch Substitution dieser Werthe für x und y in der Gleichung (4):

$$\frac{d}{2} + h = \frac{d}{c}\cdot\frac{c}{2} + \frac{p}{2Q}\left(\frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) \text{ d. i. } h = \frac{pc^2}{8Q} \text{ oder } Q = \frac{pc^2}{8h}.$$

Mit diesem letztern Werthe läfst sich nun auch leicht die zweite Constante $tang\,\alpha$ finden; denn es folgt aus Gleich. (3):

$$tang\,\alpha = \frac{d}{c} + \frac{pc}{2}\cdot\frac{8h}{pc^2} = \frac{d}{c} + \frac{4h}{c} = \frac{d+4h}{c}.$$

Auch lassen sich diese beiden Constanten Q und $tang\,\alpha$ durch die Coordinaten des tiefsten Punctes C ausdrücken.

Anmerkung 2. Liegt der zweite Befestigungspunct B mit dem erstern A in derselben horizontalen Linie AA' in A', so ist $d = 0$ und (aus Gleich 4)

$y = \frac{p}{2Q}(cx - x^2)$, wobei $Q = \frac{pc^2}{8h}$, $tang\,\alpha = \frac{4h}{c}$ und $h =$

$FN = ON = DC$ (wegen $AF = \frac{c}{2} = AD$) die größste Ordinate ist.

Setzt man in dieser Gleichung der Curve für Q den vorigen Werth, so wird auch $y = \frac{4h}{c^2}(cx - x^2)$, oder wenn man die Abscissen von D aus zählt, also $DP = x$ setzt, wodurch man in dieser letzten Gleichung $\frac{c}{2} - x$ statt x setzen muſs, nach gehöriger Reduction: $y = \frac{4h}{c^2}\left(\frac{c^2}{4} - x^2\right)$. Verwechselt man ferner x mit y, setzt nämlich (Fig. 20) $DP_1 = x$ und $P_1M = y$, so erhält man $x = \frac{4h}{c^2}\left(\frac{c^2}{4} - y^2\right)$, und wenn man endlich die Abscissen auf der Geraden CD vom Puncte C aus zählt, also $CP_1 = x$ setzt, wodurch in dieser letzten Gleichung $h - x$ statt x zu setzen ist auch:
$$x = \frac{4h}{c^2}y^2 \quad \text{oder} \quad y^2 = \frac{c^2}{4h}x,$$
als Gleichung der Curve ACA' und zwar als Gleichung einer gemeinen Parabel vom Parameter $\frac{c^2}{4h}$, deren Scheitel C und Achse CD ist.

46. Zur Bestimmung des Bogens s substituire man in der Gleichung $ds = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ für $\frac{dy}{dx}$ den Werth aus der obigen Gleichung (1), so erhält man

$$(\gamma) \quad ds = dx\sqrt{\left(1 + (tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)^2\right)}$$ oder wenn man Kürze halber $tang\,\alpha = m$ und $\frac{p}{Q} = n$ setzt, auch:
$$ds = dx\sqrt{(1 + m^2 - 2mnx + n^2x^2)} = dx\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)},$$
wenn man nämlich noch $1 + m^2 = \alpha$, $-2mn = \beta$ und $n^2 = \gamma$ setzt.

Aus dieser letztern Gleichung erhält man durch Integration (Compend. §. 809, Beisp.), Substitution und Reduction, wenn man noch Kürze halber $1 + \left(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x\right)^2 = A$ setzt:
$$s = C - \frac{Q}{2p}\left[(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)\sqrt{A} + logn.\,(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x + \sqrt{A})\right]$$
wobei die Constante, da für $x = 0$ auch $s = 0$ seyn soll, den Werth hat $C = \frac{Q}{2p}\left[tang\,\alpha\sqrt{A} + logn.\,(tang\,\alpha + \sqrt{A})\right]$.

47. Aus der obigen Gleichung (α) in **45.** folgt für die Spannung der Kette im Puncte M (Fig. 19) nach der Tangente:

$$T = Q\frac{ds}{dx} = Q\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)} = Q\sqrt{\left(1+(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)^2\right)} \ldots (\delta).$$

Da im tiefsten Puncte C der Curve $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so ist die Spannung an diesem Puncte $T = Q$ am kleinsten.

Im Aufhängpunct A ist die Spannung, wegen $x = 0$ sofort

$$T = Q\sqrt{(1 + tang\,\alpha^2)} = \frac{Q}{Cos\,\alpha} \text{ am gröfsten.}$$

Im zweiten Aufhängpunct B ist diese Tangentialspannung

$$T = Q\sqrt{\left(1 + (tang\,\alpha - \frac{pc}{Q})^2\right)}.$$

48. Was die Spannung der Kette nach lothrechter oder verticaler Richtung betrifft, so ist diese im Puncte M sofort:

$$S = T\,Cos\,m\,M\,n = T\frac{dy}{ds} = T\frac{dy}{dx}\,\frac{1}{\sqrt{\left(1+(tang\,\alpha - \frac{p}{Q}x)^2\right)}},$$

wenn man nämlich für ds den Werth aus (γ) in **46.** setzt, oder endlich, wegen $\frac{dy}{dx} = tang\,\alpha - \frac{px}{Q}$ (Gleich. 1 in **45.**) auch:

$$S = T\,\frac{(tang\,\alpha - \frac{px}{Q})}{\sqrt{\left(1+(tang\,\alpha - \frac{px}{Q})^2\right)}} = Q\,tang\,\alpha - px,$$

wenn man nämlich für T den obigen Werth aus (δ) in **47.** substituirt.

Im Aufhängepunct A ist wegen $x = 0$, diese Verticalspannung $S = Q\,tang\,\alpha$ am gröfsten.

Im tiefsten Puncte C dagegen ist diese Spannung wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ sofort $S = 0$ am kleinsten. *)

Bedingungen für die Empfindlichkeit der Krämerwage.

(§. 85)

49. Um die Bedingungen zu finden, unter welchen die gemeine Krämerwage empfindlich wird, d. h. die Eigenschaft erhält, dafs der

*) Ausführlicheres hierüber findet man in dem *Mémoire sur les Ponts suspendus* von *Navier*. Paris, 1824.

Wagbalken sogleich die horizontale Lage verläfst und eine schiefe Lage annimmt, wenn das Gleichgewicht durch ein kleines Zulaggewicht gestört wird, sey AB (Fig. 21) die horizontale Lage des in O aufgehängten Wagbalkens im Stande des Gleichgewichtes, nämlich für den Fall, dafs $AC = BC$ und $W = P$ ist (§. 83), ferner $A'B'$ die Lage dieses Balkens, welche er dadurch annimmt, dafs in die Wagschale B zu dem Gewichte P noch jenes p zugelegt wird, wodurch im Stande der Ruhe sofort der Punct C nach C' kommt.

Setzt man $AC = BC = a$, $OC = OC' = b$ und wenn D den Schwerpunct des Wagbalkens bezeichnet, $OD = c$, ferner das Gewicht dieses Balkens $= q$; so kann man die in den Puncten A', B' D lothrecht wirkenden Gewichte oder Kräfte W, $P + p$ und q jede in zwei aufeinander senkrechte Kräfte zerlegen, wovon die eine (w, r, s) perpendikulär, die andere (w', r', s') parallel zu dem Balken wirkt. Setzt man nämlich den Ausschlagwinkel $COC' = \alpha$, so ist (Nr. **9.**) $w = W \operatorname{Cos} \alpha$, $w' = W \operatorname{Sin} \alpha$, $r = (P + p) \operatorname{Cos} \alpha$, $r' = (P + p) \operatorname{Sin} \alpha$ $s = q \operatorname{Cos} \alpha$ und $s' = q \operatorname{Sin} \alpha$.

Da ferner angenommen wird, dafs diese auf den um O drehbaren Hebel $A'B'$ wirkenden 6 Seitenkräfte im Gleichgewichte stehen; so mufs nach dem Satze der statischen Momente (Nr. **20.** Anmerk. 2) sofort die Bedingungsgleichung bestehen: $wa + w'b + s'c + r'b = ra$ oder wenn man für w, w' . . die vorigen Werthe setzt: $aW \operatorname{Cos} \alpha + bW \operatorname{Sin} \alpha + cq \operatorname{Sin} \alpha + b(P + p) \operatorname{Sin} \alpha = a(P + p) \operatorname{Cos} \alpha$ und wenn man durchaus mit $\operatorname{Cos} \alpha$ dividirt und aus der entstehenden Gleichung, nachdem man im ersten Theil aW, gegen jenen aP, im zweiten ausgelassen (wegen $aW = aP$) und $W = P$ gesetzt hat (Bedingungen für das Gleichgewicht in der Lage AB), $\operatorname{tang} \alpha$ bestimmt, sofort:

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{ap}{(2P + p)b + qc}.$$

50. Da nun die Wage um so empfindlicher ist, je gröfser bei demselben Zulaggewicht p der Ausschlagwinkel α, folglich auch $\operatorname{tang} \alpha$ wird; so folgt aus dem vorigen Ausdrucke von $\operatorname{tang} \alpha$, dafs diese Empfindlichkeit um so gröfser ist, je gröfser a (Länge der Arme), je kleiner q (Gewicht des Balkens), je kleiner P (aufgelegtes Gewicht), je kleiner $b (= OC)$ und je kleiner c (Entfernung des Schwerpunctes des Balkens vom Aufhängpunct) ist. (Vergleiche §. 85.)

Anmerkung. Die Wage wird am empfindlichsten, wenn es gelingt $b = OC = 0$ zu machen, in welchem Falle $\operatorname{tang} \alpha = \frac{ap}{cq}$ zugleich von den aufgelegten Gewichte P ganz unabhängig wird. Geht der Winkel α für ein anderes Zulaggewicht p' in α' über, so ist eben so $tang\,\alpha' = \frac{ap'}{cq}$, folglich $tang\,\alpha : tang\,\alpha' = p : p'$.

Wäre unter dieser Voraussetzung von $b = 0$ gleichzeitig auch $c = 0$, so würde $tang\,\alpha = \frac{ap}{0} = \infty$, also $\alpha = 90^0$, zum Beweis, daſs in diesem Falle, in welchen nämlich die Wage in ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunct aufgehängt ist, der Balken bei dem kleinsten Übergewicht p sogleich aus der horizontalen in die verticale Lage übergeht. Auſserdem wäre dabei für jede richtige Abwägung, d. i. für $W = P$ und $p = 0$, sofort $tang\,\alpha = \frac{0}{0}$, zum Zeichen, daſs dabei der Balken in jeder Lage ruhen kann und nicht nothwendig, wie es die zweite Bedingung (§. 84) fordert, horizontal stehen muſs.

Wollte man endlich den Schwerpunct des Balkens, bei der Voraussetzung von $b = 0$ über den Punct C legen, so müſste c negativ genommen werden, wodurch dann auch $tang\,\alpha$ negativ würde, also der Winkel α in den 2ten oder 4ten Quadranten fiele, zum Beweis, daſs der Balken bei dem kleinsten Zulaggewicht p umschlagen würde.