Betriebskraft auf keinen Fall durch blofse (und auch noch so weit getriebene) Erweiterung des Windcanales herabbringen.

Viertes Kapitel.

Von dem Widerstande und Stofse der Luft.

§. 465. Die Beobachtungen und Versuche zeigen, dafs die für den Widerstand des Wassers gefundenen Gesetze und Verhältnisse genau auch für die Luft gelten, nur unterscheidet sich der absolute Widerstand der atmosphärischen Luft von jenem des Wassers wesentlich dadurch, dafs die Dichte der Luft nicht nur mit dem Barometer- und Thermometerstande veränderlich, sondern zugleich auch noch wegen der leichten Zusammendrückbarkeit der Luft, was beim Wasser durchaus nicht der Fall, im Stande der Ruhe eine andere als in der Bewegung ist. Bezeichnet man die Dichte der ruhigen Luft bei irgend einem Barometer- und Thermometerstande mit δ, jene der unter gleichen Umständen mit dem bewegten Körper in Berührung stehenden Luft mit δ', die Geschwindigkeit, mit welcher die erstere (von der Dichte δ) in den leeren Raum strömen würde, mit c, so wie die Geschwindigkeit, mit welcher sich der Körper in der ruhigen Luft, oder die Luft gegen den ruhenden Körper bewegt, durch v; so kann man mit *Duchemin* für Geschwindigkeiten von $v < c$ sofort $\delta' = \delta\left(1 + \frac{v}{c}\right)$ und für alle Geschwindigkeiten von $v > c$, $\delta' = 2\,\delta$ setzen.

Da nun der Widerstand, welchen ein prismatischer Körper in einer ruhigen Flüssigkeit erfährt (§. 359, Formel r), durch $P = k\gamma A\frac{v^2}{2g}$, oder wenn man die Dichte (d. i. die in der Volumeinheit enthaltene Masse, was $\delta' = \gamma$ gibt) einführt, durch $P = k\,\delta' A\,\frac{v^2}{2g}$ ausgedrückt wird, so folgt, mit Rücksicht auf den erstern Werth von δ', dafs der Widerstand der Luft in einem etwas gröfsern Verhältnisse als dem Quadrat der Geschwindigkeit zunimmt.

Aus diesem Grunde war *Hutton* genöthigt, um die Resultate seiner zahlreichen Versuche in einer Formel auszudrücken, darin zwei Glieder, das eine mit der zweiten und das andere mit der ersten Potenz der Geschwindigkeit anzunehmen. (Noch mehr Übereinstimmung fand er bei weiterer Hinzufügung eines constanten Gliedes.)

Für mäfsige Geschwindigkeiten jedoch hat das Glied mit der ersten Potenz weniger Einflufs, wefshalb man sich dabei mit dem gewöhnlichen Ausdrucke, welcher nur v^2 enthält, begnügt.

§. 466. Da man bei den ballistischen Untersuchungen fast allgemein das Verhältnifs der Dichte der Luft zu der des Wassers bei 18^0 *C.* und der Barometerhöhe von $\cdot 76^m$ gleich $\frac{1}{850}$ (§. 439) und die Ausdehnung derselben für jeden Grad der Centesimalscala zu $\cdot 004$ annimmt; so hat man für eine beliebige Temperatur t und Barometerhöhe b, wenn D die Dichte des Wassers bezeichnet,

$$\frac{\delta}{D} = \frac{b}{850 \times \cdot 76}\left(\frac{1 + \cdot 004.18}{1 + \cdot 004\, t}\right) = \frac{\cdot 001659\, b}{1 + \cdot 004\, t},$$

oder wenn man die Barometerhöhe nicht in Meter, sondern in Wiener Fufs ausdrückt:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{\cdot 000525\, b}{1 + \cdot 004\, t} \ldots (m.$$

Geht man, was für die Anwendung bequemer ist, auf die Gewichte über und bezeichnet das Gewicht von 1 Kubikfufs Wasser wie bisher mit γ, jenes von 1 Kubikfufs atmosphärischer (gewöhnlicher) Luft unter dem Barometerstande b und der Temperatur t mit q; so ist auch wegen $\frac{\delta}{D} = \frac{q}{\gamma}$:

$$q = \frac{\cdot 000525\, b}{1 + \cdot 004\, t}\gamma \ldots (n.$$

Für die oben eingeführte Geschwindigkeit c, mit welcher die Luft bei der Dichte δ in den leeren Raum strömen würde, setzt man gewöhnlich [für einen mittlern Barometer- und Thermometerstand, und da mit der $\cdot 76^m$ hohen Quecksilbersäule eine Wassersäule von $10 \cdot 395^m$ im Gleichgewichte steht, daher $c = \sqrt{\left(2g \times 10 \cdot 395 \frac{D}{\delta}\right.}$ und $g = 9 \cdot 809$, ferner $\frac{D}{\delta} = 850$ ist] $c = 416 \cdot 34$ Meter $=$ 1282 französische Fufs $=$ 1366 Londoner Fufs $=$ 1317 Wiener Fufs.

Setzt man in der obigen Formel von P (in welcher man δ' mit q', d. i. dem Gewichte der Luft verwechseln kann) nämlich in:

$$P = k q' A \frac{v^2}{2g} \ldots (1$$

für $v < 1317$ Fufs:

$$q' = q\left(1 + \frac{v}{1317}\right) \ldots (\omega$$

und bei Geschwindigkeiten von $v > 1317$ Fufs $q' = 2q$, wobei q aus der Gleichung n) zu nehmen ist, so wie endlich je nach dem Verhältnifs der Länge des Körpers zu seinem Durchmesser aus der Tafel des §. 359

für den Widerstandscoefficienten k den entsprechenden Werth aus der letzten oder vorletzten Rubrik; so erhält man beziehungsweise die Grösse des Widerstandes, welchen der bewegte Körper in der ruhigen Luft, oder der ruhende Körper durch die normal anstossende Luft erfährt, in Pfunden ausgedrückt, wenn man A und v in Fussen und q' in Pfunden ausdrückt.

Sowohl für die kreisförmige, als auch für die Bewegung in schiefer Richtung gelten die analogen Formeln der Bewegung im Wasser (§. 359, x und y), in welchen man nur γ mit q' zu vertauschen hat.

Aubuisson glaubt einem Versuche von *Hutton* zufolge für den Widerstand und Stoss der Luft folgende Ausdrücke aufstellen zu können, und zwar bei der geradlinigen normalen Bewegung wäre:

$$P = {}^{\cdot}02764\, q\, A^{1\cdot 1}\, v^2 \quad \ldots \quad (r,$$

bei der geradlinigen schiefen Bewegung wäre:

$$P = {}^{\cdot}02764\, q\, A^{1\cdot 1}\, v^2\, (Sin\,\alpha)^{1\cdot 84\, Cos\,\alpha} \quad \ldots \quad (s,$$

wenn α den Neigungswinkel des Luftstromes mit der Tafel oder gestossenen Fläche bildet.

Beispiel 1. Um die Wirkung der Luft auf eine Tafel von 30 Quadratfuss zu finden, wenn sich diese in einer auf die Fläche normalen Richtung mit 25 Fuss Geschwindigkeit in der ruhigen Luft, oder im zweiten Falle die Luft mit gleicher Geschwindigkeit gegen die ruhende Tafel bewegt, und wenn dabei ein Barometerstand von 2·4 Fuss und eine Temperatur von $9^1/_2{}^0$ *R.* vorausgesetzt wird, hat man ($9^1/_2{}^0$ *R.* $= 12^0$ *C.* $= t$, $v = 25$, $\gamma = 56{\cdot}4$ und $b = 2{\cdot}4$ gesetzt) aus Gleichung u: $q = {}^{\cdot}06781$, damit aus Gleichung ω) $q' = {}^{\cdot}06909$, und daher wegen $A = 30$, $\frac{v^2}{2g} = \frac{\overline{25}^2}{62} = 10{\cdot}08$, aus Gleichung 1) für $k = 1{\cdot}254$ (den ersten Fall) sofort $P = 26{\cdot}2$ Pfund,

und für $k = 1{\cdot}8636$ (den zweiten Fall) „ $P = 38{\cdot}9$ Pfund.

Nach der *Aubuisson*'schen Formel fände man für beide Fälle $P = 50{\cdot}7$ Pfund, dagegen wenn man dabei den Widerstand bloss der ersten Potenz der Fläche proportional (also A statt $A^{1\cdot 1}$ setzt) $P = 36$ Pfund, was zwischen den vorigen beiden Werthen liegt.

Beispiel 2. Welche Kraft übt der Wind gegen ein Segel von 200 Quadratfuss Fläche aus, wenn derselbe mit einer Geschwindigkeit von 32 Fuss unter einem Winkel von 70 Grad gegen dasselbe stösst oder weht?

Lässt man auch hier den vorigen Werth von $q = {}^{\cdot}06768$ gelten, so ist wegen $v = 32$ aus Gleichung ω) sofort $q' = {}^{\cdot}0693$; ferner folgt aus der oben erwähnten Formel y) in §. 359, wegen $A = 200$, $\frac{v^2}{2g} = 16{\cdot}516$, $\gamma = q'$, $k = 1{\cdot}8636$ und $\alpha = 70^0$, wofür $\frac{2\,Sin\,\alpha}{1 + Sin\,\alpha^2} = {}^{\cdot}998$ ist, sofort $P = 425{\cdot}9$ Pfund.

Nach der Formel s) wäre $P = 625{\cdot}8$ Pfund, was leicht erklärlich ist, weil dabei die Stosskraft nicht der einfachen Fläche, sondern einer höhern Potenz derselben proportional angenommen wird.

§. 467. Was die Widerstände der Luft für kugel- oder kegelförmige Körper betrifft, so gelten genau wieder die in §. 360 gemachten Bemerkungen. Da wir unter den verschiedenen Angaben den Formeln von *Duchemin* den Vorzug geben, so ist der Widerstand, welchen eine Kugel (oder Halbkugel, wenn der convexe Theil vorausgeht), deren gröfste Kreisfläche $= A$ ist, in der ruhigen Luft erfährt,

$$P = \tfrac{2}{5} k A q' \frac{v^2}{2g},$$

wo k aus der Tabelle in §. 359 zu nehmen und hier $= 1{\cdot}2824$, also auch:

$$P = {\cdot}513\, A q' \frac{v^2}{2g} = {\cdot}00826\, A q' v^2 \quad \ldots (2$$

ist.

Eben so erhält man für einen mit der Spitze vorausgehenden Kegel, dessen Seite mit der Achse (als Richtung der Bewegung) den Winkel α bildet, $P = k A q' \frac{v^2}{2g} \operatorname{Sin} \alpha$, wo k aus der genannten Tabelle $\left(\text{mit Rücksicht auf das Verhältnifs von } \frac{l}{d}\right)$ zu nehmen ist.

Dasselbe gilt auch für ein mit einer Kante vorausgehendes Prisma.

Aubuisson multiplicirt in den hier betrachteten Fällen den obigen Ausdruck r) des vorigen Paragraphes mit einem Zahlencoefficienten $m < 1$; er setzt nämlich den Widerstand $P = {\cdot}02764\, m\, q\, A\, r^2$ und nimmt für ein Prisma, wobei der Durchschnitt (die Kante) der beiden Flächen vorausgeht, die

einen Winkel einschliefsen von	90^0 .	$m = {\cdot}728$,
»	60^0 .	$m = {\cdot}520$,
für einen Halbcylinder (dessen krumme Fläche vorausgeht)	. . .	$m = {\cdot}570$,
für einen Kegel (mit der Spitze voran), wobei der Winkel an der Spitze	90^0 . .	$m = {\cdot}691$,
»	60^0 . .	$m = {\cdot}543$,
»	$51\tfrac{1}{2}{}^0$.	$m = {\cdot}433$,
für eine halbe oder ganze Kugel	. . . . . .	$m = {\cdot}410 - {\cdot}413$.

Nach *Hutton* erhält man den in Wiener Pfunden ausgedrückten Widerstand, welchen eine Kugel vom Durchmesser $= D$ (in Fufsen) bei einer Geschwindigkeit $= v$ (in Fufsen) in der ruhigen Luft erleidet, durch die Formel:

$$P = D^2 ({\cdot}001018\, v^2 - {\cdot}23252\, v + {\cdot}9393).$$

Anmerkung. Eine interessante und nützliche Anwendung finden diese Formeln beim freien Falle der Körper, z. B. von Kugeln in der Luft oder auch im Wasser. Fällt nämlich eine Kugel vom Halbmesser r und einer Materie, wovon 1 Kubikfufs im leeren Raume p Pfunde wiegt, in einem Mittel, wovon 1 Kubikfufs q Pfunde wiegt, so ist $a = \frac{4}{3} r^3 \pi$ das Volumen dieser Kugel und $a(p - q) = p'$, wenn man $p - q = p'$ setzt, das Gewicht derselben in diesem Mittel genommen; bezeichnet man den Widerstand, welchen die

Kugel in diesem Mittel erfährt, einfach durch $n v^2$, wo v die variable Geschwindigkeit und, wenn z. B. die Bewegung in der Luft geschieht, n aus der vorigen Gleichung 2) $= \cdot 00826\, A q' = \cdot 00826\, r^2 \pi q'$ ist, wobei für q' das arithmetische Mittel aus der Dichte der Luft beim Anfang (wo $q'=q$) und am Ende der Bewegung $\left[\text{wo } q' = q\left(1 + \frac{V}{1317}\right)\right.$ ist, wenn V die Endgeschwindigkeit bezeichnet$\left.\right]$ zu nehmen ist; so findet man, wenn V die gröſste Geschwindigkeit ist, welche die Kugel bei ihrem Fallen in diesem Mittel annehmen kann, da die Beschleunigung (§. 146) $G = \frac{a p' - n v^2}{a p}$ dafür (d. i. für $v = V$) Null seyn muſs, 3) $V = \sqrt{\frac{a p'}{n}}$ und durch Differential- und Integralrechnung für die Fallzeit:

$$t = \frac{p}{p'} \frac{V}{2g} \, Logn \left(\frac{V+v}{V-v}\right),$$

so wie für den Fallraum:

$$s = \frac{p}{p'} \frac{V^2}{2g} \, Logn \left(\frac{V^2}{V^2 - v^2}\right),$$

oder auch (besonders wenn t groſs ist) näherungsweise:

$$s = Vt - \frac{p}{p'} \frac{V^2}{g} \, Logn\, 2;$$

endlich ist, wenn man $\frac{2 g t p'}{V p} = x$ setzt, $v = V \sqrt{\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)}$, wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Unter den Glaskugeln, welche *Newton* in der St. Paulskirche 220 Fuſs hoch herabfallen lieſs, waren auch solche, welche 5 Zoll im Durchmesser, und (in der Luft gewogen) 483 und 515 Gran (englisches Maſs und Gewicht) im Gewichte hatten; diese brauchten sehr nahe 8 Secunden, um von dieser Höhe herabzufallen.

Sucht man dagegen die gröſste Höhe, welche eine mit der Geschwindigkeit v vertical aufwärts geworfene Kugel von der Masse oder dem Gewichte p erreichen kann, so findet man für diese Höhe:

$$4)\quad h = \frac{p}{2ng} \, Logn \left(\frac{p + n v^2}{p}\right) = \cdot 0371384 \frac{p}{n} \, Logv \left(1 + \frac{n}{p} v^2\right),$$

wobei n wieder die vorige Bedeutung hat. Die hiezu nöthige Zeit ist:

$$5)\quad t = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{p}{n}} \, . \, arc\, Tang \left(v \sqrt{\frac{n}{p}}\right).$$

Die Gröſse der Kugel hat natürlich auf die Gröſse des Widerstandes Einfluſs und macht sich in dem Factor n geltend.

Beispiel 1. Welche Geschwindigkeit kann eine $3^7/_{10}$ Zoll im Durchmesser haltende eiserne Kugel beim freien Falle in der ruhigen Luft bei mittlerem Baro- und Thermometerstande annehmen?

Da für diesen Zustand der Luft $q = \frac{56 \cdot 4}{850} = \cdot 06635$ gesetzt werden kann und bei einer Geschwindigkeit von 370 Fuſs (welche Zahl man durch eine vorläufige Rechnung für die gröſste Geschwindigkeit erhält):

$$q' = q\left(1 + \frac{370}{1317}\right) = \cdot 08499,$$

also das Mittel $\frac{1}{2}(q + q') = \cdot 07567$ wird, welchen Werth man für q' in $n = \cdot 00826\, A\, q'$, so wie $A = r^2\pi = (\cdot 15417)^2 \times 3\cdot 1416 = \cdot 0746$ zu setzen hat, wodurch $n = \cdot 00004662$, und da ferner $a = \frac{4}{3} r^3 \pi = \cdot 01534$, so wie $p = p'$ (da man q gegen p auslassen kann) $= 7\cdot 2 \times 56\cdot 4 = 406$ (das specifische Gewicht des Eisens zu $7\cdot 2$ angenommen) ist; so folgt aus der obigen Gleichung 3) für diese gröſste Geschwindigkeit nahe $V = 365$ Fuſs.

Nimmt man den Widerstandscoefficienten n unter übrigens gleichen Umständen den Dichten der Mittel, in welchen sich die Körper bewegen, proportional, und setzt für das Wasser $n = 850 \times \cdot 00004662$, so wird die gröſste Geschwindigkeit V', welche die Kugel durch das Fallen im Wasser erlangen kann (Gleich. 3), $V' = \dfrac{V}{\sqrt{850}} = 12\frac{1}{2}$ Fuſs, und mit dieser Geschwindigkeit würde die Kugel im Wasser gleichförmig fortfallen.

Für eine eben so groſse Kugel aus Lindenholz z. B., welches 12 Mal leichter als Eisen ist, würde man (wenn wieder $p' = p$ gesetzt werden darf) als gröſste Geschwindigkeit in der Luft $\dfrac{365}{\sqrt{12}} = 105$ Fuſs, und im Wasser, wegen $p' = 33\cdot 83 - 56\cdot 4 = -22\cdot 57$, wobei das negative Zeichen anzeigt, daſs die Kugel nicht abwärts fällt, sondern im Wasser aufwärts steigt, diese gröſste Geschwindigkeit nahe 3 Fuſs finden.

Aus diesen Erörterungen erklärt sich auch, warum man z. B. mit einer Platinkugel viel weiter (bei einer 2zölligen Kugel nahe doppelt so weit) als mit einer gleich groſsen eisernen Kugel schieſsen kann.

Beispiel 2. Wie hoch wird eine 4zöllige 10 Pfund schwere eiserne Kanonenkugel steigen, wenn sie bei einem Barometerstande von $28\frac{1}{2}$ Zoll und einer Temperatur von $20°$ C. mit einer Geschwindigkeit von 1800 Fuſs vertical aufwärts geworfen wird?

Hier ist nach der Formel n (§. 466) $q = \cdot 065114$ und $q' = 2q$ (wegen $v > 1317$ Fuſs), folglich das Mittel zwischen beiden Werthen $\frac{3}{2} q = \cdot 097671$, welchen Werth man in der Formel 2 (§. 467) für q' zu setzen hat; es ist daher aus dieser Formel, da noch $A = \frac{1}{4} d^2 \pi = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3\cdot 1416 = \cdot 08727$ ist, die obige Gröſse $n = \cdot 00826 \times \cdot 08727 \times \cdot 097671 = \cdot 00007041$ und wegen $p = 10$ die gesuchte gröſste Höhe aus 4) $h = 7262$ Fuſs, wozu die Kugel (Formel 5) etwas über $16\frac{1}{2}$ Secunden braucht, während dieselbe Kugel im luftleeren Raume bei dieser Geschwindigkeit durch nahe 58 Secunden, und dabei 52258 Fuſs hoch steigen würde.