Vierter Abschnitt.

Aërodynamik.

Erstes Kapitel.

Von dem Ausflusse der Luft aus Behältern.

§. 447. Einleitung. Befindet sich in einem Behälter Luft in gewöhnlichem Zustande, also unter dem Drucke der Barometerhöhe $b = 28 \cdot 8$ Z. (§. 436), so wird durch eine z. B. in der Seitenwand angebrachte Öffnung die Luft weder aus dem Behälter heraus, noch die äufsere hinein treten, weil die vor der Öffnung liegenden Lufttheilchen von innen und aufsen gleich stark gedrückt werden, und daher unter sich im Gleichgewichte stehen. Wird dagegen die Luft im Behälter, wie z. B. durch einen genau passenden Kolben dergestalt zusammengedrückt, dafs ein damit in Verbindung gebrachtes Manometer (§. 440) die Höhe h und dadurch also auch den Überdruck über den Druck der Atmosphäre anzeigt; so wird der Druck gegen die Öffnung von innen nach aufsen $= b + h$ und von aufsen nach innen $= b$, folglich der Unterschied der Pressungen $= b + h - b = h$ seyn (d. h. durch diese Manometersäulenhöhe gemessen oder ausgedrückt), mit welcher die Luft nun aus dem Behälter (eben so, als ob sie unter dem Drucke h in den leeren Raum strömte) ausfliefsen wird.

§. 448. Da aber nach §. 321 die (theoretische) Geschwindigkeit, mit welcher irgend eine tropfbare Flüssigkeit aus einer Öffnung ausfliefst, der Höhe der über der Öffnung stehenden Flüssigkeitssäule entspricht; so darf man im gegenwärtigen Falle (da die Luft- und Gasarten demselben Gesetze folgen) nur die Höhe h der manometrischen Flüssigkeit in eine dem Gewichte nach gleichgeltende Luftsäule h' von durchaus gleicher Dichte verwandeln, um für die theoretische Ausflufsgeschwindigkeit v der Luft den Ausdruck $v = \sqrt{2\,g\,h'}$ zu erhalten. Ist D die Dichte oder das specifische Gewicht der manometrischen Flüssigkeit, und d jene der unter dem Drucke $b + h$ in die freie Luft ausfliessenden Luft- oder Gasart, so ist $\frac{h'}{h} = \frac{D}{d}$ oder $h' = h\,\frac{D}{d}$, folglich, wenn m den entsprechenden Contractions- oder Reductionscoefficienten bezeichnet (indem hier eine ähnliche Erscheinung wie beim Ausfluſs des Wassers §. 321 Statt findet), so ist in Fuſsmaſs, indem h ebenfalls so genommen werden muſs:

$$v = m\sqrt{\left(2gh\,\frac{D}{d}\right)} = 7{\cdot}874\,m\sqrt{h\,\frac{D}{d}} \;\ldots\; (1$$

Ist ferner a der Querschnitt der Öffnung in Quadratfuſs, so ist, wenn h constant bleibt, die per Secunde ausflieſsende Luftmenge in Kubikfuſs:

$$M = 7{\cdot}874\,m\,a\sqrt{h\,\frac{D}{d}} \;\ldots\; (2$$

§. 449. Was nun den Contractionscoefficienten m betrifft, so ist dieser nach den neuesten Versuchen hierüber für

Öffnungen in dünnen Wänden . . . . $m = {\cdot}65$,
„ mit cylindrischen Ansatzröhren $= {\cdot}93$,
für wenig conische Ansatzröhren . . . $= {\cdot}94$.

Ist das Manometer mit Quecksilber gefüllt und flieſst die Luft (welche also unter dem Drucke $b + h$ austritt) bei einer Temperatur von t Grad (des 100theiligen Thermometers) aus; so ist für atmosphärische Luft [§. 439, r)] $\frac{D}{d} = 25209\,\frac{1 + {\cdot}004\,t}{b + h}$, also gehen, wenn man Kürze halber $1 + {\cdot}004\,t = T$ setzt, die beiden vorigen Formeln 1) und 2) für die atmosphärische Luft in folgende über:

$$v = 1250\,m\sqrt{\left(h\,\frac{T}{b+h}\right)} \;\ldots\; (1'$$

und $$M = 1250\,m\,a\sqrt{\left(h\,\frac{T}{b+h}\right)} \;\ldots\; (2'$$

§. 450. In der Anwendung sind die Ansatzstücke, wie z. B. die Düsen bei Blasbälgen, Windleitungen u. s. w. längere, verjüngte Röhren, wofür man indessen der gröſsern Sicherheit wegen m auch nur mit ${\cdot}93$ in Rechnung bringt. Ist d der Durchmesser einer solchen Düsenöffnung, so ist $ma = {\cdot}93 \times \frac{1}{4}\,d^2\pi = {\cdot}7305\,d^2$, folglich ist, wenn d in Fuſsen ausgedrückt wird:

$$M = 913\,d^2\sqrt{\left(h\,\frac{T}{b+h}\right)} \;\ldots\; (3 \quad \text{Kubikfuſs.}$$

Das nach dieser Formel berechnete Luftvolumen M besitzt die dem Drucke $b+h$ entsprechende Dichte; will man aber daraus jenes Volumen M' bestimmen, welches dieses Luftquantum unter irgend einem andern, z. B. unter dem Drucke h' annehmen würde, so hat man nach dem *Mariotte*'schen Gesetze $\frac{M'}{M} = \frac{b+h}{h'}$, woraus $M' = M\frac{b+h}{h'}$, d. i.

$$M' = 913\,\frac{d^2}{h'}\sqrt{[h(b+h)\,T]}\ \ldots\ (4$$

folgt.

§. 451. Um ferner das Gewicht Q der in 1 Secunde ausfliessenden Luftmenge zu bestimmen, muſs man den Werth M mit dem Gewichte von 1 Kubikfuſs Luft unter dem Drucke von $b+h$ und der Temperatur t, d. i. (§. 439, a) mit $\cdot 03042\,\frac{b+h}{1+\cdot 004\,t}$ multipliciren, wodurch man, wenn für M der Werth aus 3) und wieder $1+\cdot 004\,t = T$ gesetzt wird:

$$Q = 27\cdot 77\,d^2\sqrt{\left[\frac{h\,(b+h)}{T}\right]}\ \ldots\ (5 \text{ Pfunde}$$

erhält, wenn wieder d, b und h in Fuſsen ausgedrückt werden.

§. 452. Flieſst anstatt atmosphärischer Luft irgend eine andere Gasart unter dem Drucke der Manometersäule h aus, und hat dieses Gas gegen die manometrische Flüssigkeit die Dichte e; so hängt die Ausfluſsgeschwindigkeit von der Höhe $\frac{h}{e}$ ab, und es ist die per Secunde ausfliesende Gasmenge $M = m\,a\sqrt{2\,g\,\frac{h}{e}}$. Für ein anderes unter demselben Drucke und aus derselben Öffnung ausflieſsendes Gas, welches gegen die nämliche manometrische Flüssigkeit die Dichte e' besitzt, ist eben so $M' = m\,a\sqrt{2\,g\,\frac{h}{e'}}$, folglich $M : M' = \sqrt{e'} : \sqrt{e}$, d. h. die Volumina zweier Gasarten, welche unter demselben Drucke aus der nämlichen Öffnung ausflieſsen, verhalten sich verkehrt wie die Quadratwurzeln aus ihren Dichten (diese letztern mögen nun auf die atmosphärische Luft, die manometrische, oder eine sonstige Flüssigkeit bezogen werden).

Ist also eines der beiden Gase die atmosphärische Luft und n das specifische Gewicht des andern Gases (jenes der Luft $= 1$ gesetzt), so beträgt die Ausfluſsmenge des letztern Gases per Secunde, wenn der Druck constant bleibt, $M = M' \sqrt{\frac{1}{u}}$, d. i. (Form. 4)

$$M = 913 \frac{d^2}{h' \sqrt{u}} \sqrt{[h(b+h)T]} \ldots (6$$

Anmerkung. Die Ableitung der obigen Formeln für den Ausfluſs der Luft gilt eigentlich streng genommen mehr oder weniger nur für den Fall, als der Unterschied zwischen dem Druck der Luft innerhalb und auſserhalb des Gefäſses nicht bedeutend ist, und dieser etwa nur (wie es in der Regel bei Gebläsen der Fall) bis $^1/_5$ beträgt. Im Allgemeinen genommen werden diese Formeln, indem dabei logarithmische Gröſsen vorkommen, complicirter, obschon sie auch dann noch, der eigenthümlichen Schwierigkeiten wegen, welche dieser Theil der Wissenschaft darbietet, nicht alle in der Wirklichkeit vorhandenen Umstände genau wieder geben.

Bezeichnet A den Querschnitt des Gefäſses, aus welchem das Gas ausflieſst, a jenen der Ausfluſsöffnung, p den Druck der äuſsern, P jenen der innern Luft auf die Flächeneinheit, so wie q das Gewicht der cubischen Einheit der innern Luft oder des Gases unter diesem Drucke P, und m den Contractionscoefficienten; so findet man nach der Theorie von *Navier* für die Ausfluſsgeschwindigkeit, wenn l natürliche Logarithmen bezeichnet:

$$v = m \sqrt{\left\{ \frac{2P}{q} g \frac{l \cdot \frac{P}{p}}{1 - \left(\frac{pa}{PA}\right)^2} \right\}} \ldots (7$$

also das Volumen des in der Zeiteinheit unter dem äuſseren Drucke p gemessenen ausflieſsenden Gass:

$$M = av \ldots (8$$

und unter einem andern Drucke p' gemessen:

$$M' = av \frac{p}{p'} \ldots (9$$

Ist die Ausfluſsöffnung a gegen den Querschnitt A so klein, daſs man den Bruch $\left(\frac{pa}{PA}\right)^2$ gegen die Einheit auslassen kann, so hat man einfacher:

$$v = m \sqrt{\left[\frac{2P}{q} g l \cdot \frac{P}{p}\right]} \ldots (6'$$

und wenn der Unterschied $P - p = z$ so klein wird, daſs man die höhern Potenzen von $\frac{z}{P}$ gegen die erste vernachläſsigen, also

$$l \cdot \frac{P}{p} = l \cdot \frac{P}{P - z} = - l\left(1 - \frac{z}{P}\right)$$

$$= - \left[- \frac{z}{P} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{P}\right)^2 - \text{etc.} \right] = \frac{z}{P} = \frac{P - p}{P}$$

setzen kann, auch:

$$v = m \sqrt{\left(2g \frac{P-p}{q}\right)},$$

welches sofort unsere obige Formel 1), nur in einer andern Form ist; denn bezeichnet h die Höhe der Manometersäule, welche den Druck $P-p$ anzeigt, ferner D die Dichte oder das specifische Gewicht dieser Flüssigkeitsäule, so wie d jene des Gases unter dem Drucke P, so ist $\frac{P-p}{q} = h \frac{D}{d}$, wodurch diese letztere Formel genau auch die Form der obigen 1) erhält.

Wäre $P < p$, so würde umgekehrt die äufsere Luft in das Gefäfs, und zwar mit einer Geschwindigkeit

$$v = m \sqrt{\left(2g \,.\, \frac{p-P}{q'}\right)} \ldots (10$$

hineinfliefsen, wenn q' das Gewicht der cubischen Einheit der äufsern Luft unter dem Drucke p bezeichnet.

§. 453. Um diese abgeleiteten Formeln noch verständlicher und practischer zu machen, mögen folgende Beispiele und Aufgaben dienen:

1. Mit welcher Geschwindigkeit strömt die atmosphärische Luft bei 10° C. Temperatur in einen absolut leeren Raum ein, wenn dabei keine Contraction Statt hat?

Setzt man in der Formel 1') (§. 449) $b = 0$, $t = 10$, also $T = 1{\cdot}04$ und $m = 1$, so erhält man $v = 1250 \sqrt{1{\cdot}04} = 1274\tfrac{3}{4}$ Fufs, während man bei 0 Grad Temperatur nur 1250 F. findet; ein Körper also, welcher sich im letztern Falle mit einer Geschwindigkeit von mehr als 1250 Fufs per Secunde in der Atmosphäre bewegen würde, müfste schon einen leeren Raum hinter sich zurücklassen.

Wollte man die vorige Formel 10) benützen, so müfste man darin $P = 0$, $p = 766{\cdot}87\, b$, $g = 31$ und $q' = {\cdot}03042 \frac{b}{1{\cdot}04}$ setzen, wodurch man $v = 1274{\cdot}95$ F. findet; da b aus der Rechnung ganz hinausfällt, so hat hier der Barometerstand auf die Geschwindigkeit v keinen Einflufs.

2. Aus einem Behälter fliefst atmosphärische Luft unter einem Drucke, für welchen die Quecksilbersäule des oben offenen Manometers constant 1·14 Zoll zeigt, durch eine Düsenöffnung von 2·85 Zoll Durchmesser und bei einer Temperatur von 13° C. in einen Raum aus, in welchem das Barometer 28 Zoll hoch steht; es soll die per Secunde ausfliefsende Luftmenge berechnet, und diese zugleich auf den mittlern Barometerstand von 28·8 Zoll reducirt werden.

Setzt man in der Formel 6) $h = \frac{1{\cdot}14}{12} = {\cdot}095$, $b = \frac{28}{12} = 2{\cdot}333$, also $b + h = 2{\cdot}428$, $h' = \frac{28{\cdot}8}{12} = 2{\cdot}4$, $d = \frac{2{\cdot}85}{12} = {\cdot}2375$ und $t = 13$, also $T = 1{\cdot}052$; so findet man $M' = 10{\cdot}57$ Kubikfufs, daher per Minute

634 Kubikfuſs, ein Quantum, welches zur Speisung von etwa 4 Frisch feuer hinreichen würde.

Nach der schärfern Formel 6′) gerechnet, findet man wegen $P = 1861{\cdot}96$, $p = 1789{\cdot}11$ Pf., $l \cdot \frac{P}{p} = {\cdot}0399131$, $q = {\cdot}07015$ sofort $r = 256{\cdot}28$, so wie damit aus 9) $M' = 11{\cdot}04$ Kubikfuſs, woraus in solchen Fällen die geringe Abweichung der beiden Formeln hinlänglich hervorgeht.

3. Wenn bei einer Windleitung das Manometer mit Wasser gesperrt ist, so ist die Frage, wie hoch in demselben die Wassersäule steigen müsse, wenn aus einer 2·28 Zoll im Durchmesser haltenden Düsenöffnung per Secunde 8 Kubikfuſs atmosphärische Luft in einen Raum ausströmen sollen, in welchem der Barometer $28\frac{1}{2}$ Zoll hoch steht, und die Temperatur 12° C. beträgt?

Bestimmt man aus der Formel 3) die Gröſse h, so hat man die Höhe der Quecksilbersäule, mit welcher die gesuchte Wassersäulenhöhe des Manometers gleichgeltend seyn muſs; ist daher H diese gesuchte Höhe, so muſs $H = 13{\cdot}597\, h$ seyn. Aus der genannten Gleichung 3) folgt aber $h = \frac{b\, M^2}{833569\, d^4\, T - M^2}$, und wenn man $b = 2{\cdot}375$, $M = 8$, $d = {\cdot}19$ und $t = 12$, also $T = 1{\cdot}048$ setzt, erhält man daraus $h = {\cdot}1414$, folglich $H = 1{\cdot}923$ Fuſs $= 23{\cdot}2$ Zoll.

4. Wie groſs muſs in einem zur Beleuchtung dienenden Gasometer die Öffnung seyn, damit stündlich 31660 Kubikfuſs Leuchtgas unter einem Drucke von 1·8 Zoll Wassersäule ausströmen, wenn die Öffnung mit keiner Röhre in Verbindung steht, und der mittlere Barometerstand zu 28·2 Zoll, so wie die Temperatur zu 15° C. angenommen wird?

Hier ist die Wassersäule im Manometer von $\frac{1{\cdot}8}{12} = {\cdot}15$ Fuſs mit einer Quecksilbersäule von $\frac{{\cdot}15}{13{\cdot}597} = {\cdot}01103$ F. gleichgeltend, daher $h =$ 01103, $b = 2{\cdot}35$, $t = 15$, also $T = 1{\cdot}06$, $M = \frac{31660}{3600} = 8{\cdot}7945$ (für die Secunde), $m = {\cdot}65$, und das specifische Gewicht des Leuchtgases (§. 39) $u = {\cdot}556$, also aus der obigen Gleichung 2′)

$$a = \frac{M\sqrt{u}}{1250\, m \sqrt{\left(h \frac{T}{b+h}\right)}} = {\cdot}114692 \text{ Quadratfuſs.}$$

Für eine quadratförmige Öffnung müſste daher die Seite $= {\cdot}3387$, oder für eine kreisförmige der Durchmesser $= {\cdot}3821$ Fuſs betragen.