$p = \frac{r}{R} f Q$; da man aber denselben Widerstand auch auf der andern Seite, um die Glieder wieder aufzubiegen, annehmen kann, so läſst sich der gesammte Widerstand durch $F = \frac{2r}{R} f Q$ ausdrücken.

Zehntes Kapitel.

Von der Festigkeit der Materialien.

§. **250. Erklärung.** Unter der Festigkeit eines Körpers versteht man diejenige Kraft, mit welcher er dem Zerreiſsen, Zerbrechen, Zerdrücken oder Verdrehen, also überhaupt der Trennung seiner Theilchen widersteht, und zwar heiſst diese in den genannten Fällen beziehungsweise seine absolute, relative, rückwirkende und Drehungs- oder Torsionsfestigkeit.

Es ist für die Anwendung von groſser Wichtigkeit, die Festigkeit der Maschinenbestandtheile oder der Materialien, woraus sie hergestellt werden, bestimmen zu können, um ihnen, ohne einen unnützen Aufwand an Materiale herbeizuführen, die nöthige Stärke zu geben.

In der Regel erleiden die Körper vor der Trennung ihrer Theilchen eine mehr oder weniger merkbare Formänderung, nämlich eine Drehung, Biegung u. s. w. Wären die Körper vollkommen elastisch, so würde jede solche Formänderung, nach Beseitigung der äuſsern Einwirkung sogleich wieder verschwinden; allein dieses findet bei allen uns bekannten Körpern nur bis zu einer gewissen Grenze (der Elasticitätsgrenze) Statt. Das Maſs der gröſsten Kraft, welche ein Körper auszuhalten vermag, ohne daſs dadurch noch eine bleibende Ausdehnung, Biegung u. s. w. hervorgebracht wird, bezeichnet seine Elasticitätsgrenze; diejenige Kraft hingegen, welche um den kleinsten Theil vermehrt, eine Trennung der Theile bewirkt, also gleichsam mit der Festigkeit des Körpers im Gleichgewichte steht, gibt das Maſs für die Festigkeit desselben an.

Absolute Festigkeit.

§. **251. Maſs dieser Festigkeit.** Nach den zahlreich angestellten Versuchen, steht unter übrigens gleichen Umständen und der Voraussetzung, daſs die zerreiſsenden Kräfte nach der Längenrichtung, also z. B. bei Holzarten mit den Fasern parallel wirken, die absolute Festigkeit mit dem Querschnitt des Körpers im geraden Verhältnifs. Sind nämlich a und a' die Querschnitte zweier Prismen aus derselben Materie, und p, p' ihre absoluten Festigkeiten, so ist

$$p : p' = a : a', \text{ also } p = \frac{p'}{a'} a = ma \ldots (1,$$

wenn man nämlich den aus Versuchen zu bestimmenden, und als constant anzunehmenden Quotienten $\frac{p'}{a'} = m$ setzt; es wird also die absolute Festigkeit irgend eines Körpers gefunden, wenn man dessen kleinsten Querschnitt mit dem seiner Materie entsprechenden Coefficienten m, welchen man für das Mafs der absoluten Festigkeit, oder auch der Cohäsion nimmt, multiplicirt.

Da es sich jedoch in der Anwendung weniger um die Kraft, bei welcher ein Körper wirklich abgerissen wird, als um die Bestimmung jener Last handelt, welche er noch mit Sicherheit tragen kann; so nimmt man für die gröfste Belastung im Durchschnitte bei Metallen die Hälfte, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$, bei Hölzern und Seilen aber höchstens den dritten Theil von der entsprechenden absoluten Festigkeit, man setzt also, wenn Q diese Belastung ist, $Q = \frac{1}{2} ma$ bis $\frac{1}{4} ma$.

§. 252. Modul der Elasticität. Um sich jedoch nicht auf das Grerathewohl zu verlassen, so soll die Belastung Q noch innerhalb der Elasticitätsgrenze des betreffenden Körpers liegen, d. h. es soll durch diese Last noch keine bleibende Ausdehnung entstehen. Liegen aber die Belastungen innerhalb dieser Grenze, so verhalten sich die dadurch bewirkten Ausdehnungen gerade wie die Lasten, wie die Längen der Prismen, und verkehrt wie ihre Querschnitte, so, dafs wenn l, L die Längen, a, A die Querschnitte, p, P die (innerhalb der genannten Grenze liegenden) Belastungen, und d, D die dadurch bewirkten Ausdehnungen in zwei aus derselben Materie bestehenden Prismen sind, sofort $d : D = \frac{lp}{a} : \frac{LP}{A}$ Statt findet.

Bezeichnet man die Ausdehnung D, welche das Gewicht von $P = 1$ Pfund in einem Prisma von $A = 1$ Quadratzoll Querschnitt, und der Länge von $L = 1$ Fufs hervorbringt, mit $\frac{1}{M}$ (wo M immer eine grofse Zahl seyn wird), so ist auch nach der vorigen Proportion $d : \frac{1}{M} = \frac{lp}{a} : 1$, und daraus $d = \frac{lp}{Ma}$, oder wenn man $\frac{p}{a}$, d. i. das

Gewicht oder die Belastung, welche auf einen Quadratzoll kommt, $= q$ setzt, auch: $d = \frac{lq}{M} \ldots (1.$

Könnte die Ausdehnung innerhalb der Elasticitätsgrenze $d = l$ werden, so müfste dafür $q = M$ seyn; diese Gröfse M aber, welche die in Pfunden ausgedrückte Belastung bezeichnet, für welche ein Prisma bei dem Querschnitte von 1 Quadratzoll um seine eigene Länge (dieses als möglich gedacht) ausgedehnt wird, heifst Modul der Elasticität; ist dieser für die einzelnen Materien bekannt, so ist man im Stande, nach der vorigen Formel (1 die durch irgend eine, jedenfalls aber noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende, auf den Querschnitt von 1 Quadratzoll kommende Belastung, in einem Körper von der Länge l entstehende Ausdehnung d zu berechnen, dabei erhält man d in demselben Mafse (in Fufs, Zolle u. s. w.), in welchen man l ausgedrückt hat.

§. 253. Werthe für die absolute Festigkeit *m und den* **Modul der Elasticität** *M mehrerer in der Anwendung am häufigsten vorkommenden Materialien.* Wird der Querschnitt a des Prisma in Quadratzollen, die Länge l und Ausdehnung d desselben gleichzeitig in Fufsen oder Zollen, und P und Q in Pfunden, Alles in Wiener Mafs und Gewicht ausgedrückt; so ist nach den beiden vorhergehenden Paragraphen die absolute Festigkeit

$$Q = ma \ldots (1,$$

und, wenn P die noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Belastung des Prisma, folglich $\frac{P}{a} = p$ jene auf den Quadratzoll ist, die dabei bewirkte Längen-Ausdehnung

$$d = \frac{lp}{M} \ldots (2,$$

wobei die Werthe von m und M für die betreffenden Körper aus der nachstehenden Tabelle, in welcher die angegebenen Zahlen aus ganz natürlichen Gründen oft zwischen sehr weiten Grenzen variiren müssen, zu nehmen sind.

Benennung der Körper.	Absolute Festigkeit m.	Modul der Elasticität M.
Hölzer.		
Buchen (Roth-)	10000 — 16000	1240000 — 1360000
Eichen	9000 — 18000	1300000 — 1480000
Eschen	14000 — 17000	1240000 — 1400000
Fichten	8600 — 12000	1600000 — 2000000
Kiefer	12000 — 17000	1500000 — 1700000
Lärchen	7000 — 9000	930000 — 1280000
Tannen (Weifs-)	10000 — 13000	1250000 — 1850000
Ulmen	12000 — 13500	1150000 — 2310000
Weifsbuchen (Hornb.) . .	17000 — 17600	— —
Metalle.		
Eisen (geschmiedet) . . .	40000 — 60000	22000000 — 25000000
dto. Blech (gewalzt) . .	45000 — 50000	22000000
dto. Draht	80000 — 83000	20000000 — 30000000
dto. Clavierdraht . . .	110000 — 160000	18600000 — 24800000
dto. (Gufs-)	15000 — 20000	11400000 — 16000000
Kupfer (gehämmert) . . .	25000 — 34000	— —
dto. (gewalzt)	26000 — 32000	— —
dto. (Draht)	34000 — 65000	— —
Stahl	96000 — 124000	25000000 — 26000000
Andere Substanzen.		
Marmor	1580	2195000
Stein (Portland)	750	1335000
Seile (Hanf-) trocken . .	6000 — 7500	
dto. dto. nafs . . .	4600 — 5500	
Ziegel (Mauer-)	245	— —

Anmerkung. In der Anwendung nimmt man für die Last, welche die Körper mit Sicherheit tragen sollen, von diesen Zahlen bei Holz gewöhnlich $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$, ja sogar, wenn es sich um die gröfste Sicherheit und längere Dauer handelt, oft nur $\frac{1}{10}$, und bei Metallen $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{6}$. Der ausgeglühte Draht besitzt nur $\frac{3}{5}$ von der Stärke oder Festigkeit des nicht geglühten. Seile sollen durch die Drehung ihrer Litzen nicht mehr als um $\frac{1}{5}$ verkürzt werden, weil sie sonst an Festigkeit verlieren.

Setzt man das Gewicht, mit welchem das Schmiedeisen bleibend belastet werden darf = 10000 Pfund, so ist die gröfste Ausdehnung, die es dabei und auf diese Weise erlangen dürfte, nach der obigen Formel (2, wenn man $p = 10000$ und $M = 23500000$ setzt: $d = \cdot 0004\, l$. Nach Duleau darf diese Ausdehnung noch ohne Nachtheil $\cdot 00066$ oder $\frac{1}{1500}\, l$ betragen, wonach also die bleibende Belastung $p = 15660$ Pfund seyn dürfte.

Für das Gufseisen kann nach Tredgold die gröfste Ausdehnung $\frac{1}{1200}$ der Länge betragen, diefs gibt also, wenn man $M = 13700000$ setzt, für die gröfste bleibende Belastung auf den Quadratzoll $p = 12000$ Pfund.

Nimmt man für Eichenholz als gröfste Belastung 1000 Pfund auf den Quadratzoll, wenn es nämlich jedem Wetter ausgesetzt ist, und lange dauern soll, so erhält man, $M = 1390000$ gesetzt, für die gröfste Ausdehnung, die es annehmen darf $d = \cdot 0007$, oder nahe $\frac{1}{1400} l$.

§. 254. Beispiele. 1. Wie stark mufs eine schmiedeiserne Tragstange, deren Querschnitt quadratförmig ist, seyn, wenn sie eine Last von 50 Centnern mit Sicherheit tragen soll?

Soll die Stange a Zolle im Gevierte halten, und nimmt man nach der obigen Bemerkung die Tragfähigkeit des Schmiedeisens zu 15000 Pfund an, so ist $15000 a^2 = 5000$, also

$$a^2 = \tfrac{1}{3} \text{ und } a = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \cdot 58 \text{ Zoll.}$$

2. Welche Dicke soll man dem Eisenbleche eines cylinderischen Dampfkessels von 5 Fufs Durchmesser geben, wenn in demselben der Dampf eine absolute Spannung von 4 Atmosphären erreicht?

Für den Durchmesser D des Kessels in Zollen, und den Druck des Dampfes auf jeden Quadratzoll $= q$ gesetzt, und in Pfunden ausgedrückt, findet man (§. 276), wenn p das Tragvermögen des Materiales ist, die Dicke des Kesselbleches in Zollen $d = \frac{D q}{2 p} + f$. Setzt man nun für gewalztes Eisenblech $p = 20000$, nimmt aber davon aus mehreren Ursachen (weil der Kessel nicht aus einem Stück besteht, die Cohäsion des im Feuer liegenden Theils um die Hälfte vermindert wird, die Erhitzung und Ausdehnung nicht ganz gleichmäfsig ist, dann wegen der Abweichung von der genauen Cylinderform, so wie endlich der möglichen Stöfse oder Erschütterungen wegen), davon nur den sechsten Theil, rechnet ferner den Druck einer Atmosphäre zu $12\frac{3}{4}$ Wiener Pfund auf den Wiener Quadratzoll, so wird für eine absolute Dampfspannung von n Atmosphären im Kessel, welcher eine Atmosphäre entgegen wirkt, die genannte Blechdicke in Zollen:

$$d = \frac{(n-1) D}{555} + \cdot 114,$$

wobei $\cdot 114$ die nöthige Stärke des Kessels für $n = 1$ ist. Für das gegebene Beispiel ist also, wegen $D = 60$ und $n = 4$, sofort

$$d = \tfrac{180}{555} + \cdot 114 = \cdot 438 \text{ Zoll} = 5\tfrac{1}{5} \text{ Linie.}$$

Relative Festigkeit.

§. 255. Theorie derselben. Wird ein prismatischer Körper, z. B. ein hölzerner Balken aB' (Fig. 186) in horizontaler Richtung mit dem einen Ende AB' unveränderlich befestigt, z. B. in eine verticale Wand MN eingemauert, und derselbe am andern Ende O so lange belastet, bis der Balken abbricht, was immer an der Wurzel oder dem befestigten Ende AB' geschieht; so heifst das auf diese Weise wirkende kleinste Gewicht P, bei welchem der Bruch erfolgt, die relative, öfter auch die respective Festigkeit des Balkens. Bei der vor dem Bruche eintretenden Biegung behält eine Schichte Cc', die sogenannte neutrale, ihre ursprüngliche Länge, während die über derselben liegenden, in demselben Verhältnifs, als sie der obersten Bb' näher liegen, immer mehr ausgedehnt, die unter dieser neutralen Schichte liegenden dagegen in demselben Verhältnifs gegen die unterste Aa' zu, zusammen gedrückt oder verkürzt werden.

Es sey nun hier insbesondere der Querschnitt des Balkens ein Rechteck von der Breite $AA' = b$ und Höhe, welche hier vertical angenommen wird, $AB = h$, so wie die Länge $Cc = l$. Da der Bruch in der Ebene AB' um die neutrale Achse CC', welche man in der halben Höhe liegend annehmen kann, weil die Fasern sowohl oberhalb gegen die Ausdehnung als unterhalb gegen die Zusammendrückung denselben Widerstand leisten, Statt findet; so sey im Augenblicke des Bruches $Be = d$ (Fig. 186, a) die Gröfse der Ausdehnung der obersten Fasern, und p ihre absolute Festigkeit, folglich widersteht in der verticalen unendlich dünnen Schichte An die oberste Faser von der unendlich kleinen Höhe $er = s$ dem Zerreifsen mit der Kraft ps, und irgend eine andere mn von derselben Höhe mit jener $p's$, wobei jedoch, da der Widerstand der Ausdehnung der Fasern proportional, also $p' : p = mn : d$, sofort $p' = p\,\frac{mn}{d}$ ist. Die Summe der Widerstände von Seite aller ausgedehnten Fasern von C bis B ist demnach $= \frac{p}{d}(s.mn + s.m'n' + \ldots) = \frac{p}{d}.\frac{1}{2}CB.Be$, weil der eingeklammerte Theil die Fläche des Dreieckes BCe bildet. Da man sich diesen gesammten Widerstand $R = \frac{p}{d}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}h.d = \frac{1}{4}ph$ im Schwerpuncte des Dreieckes, also in der Entfernung von $\frac{2}{3}CB$ vom Drehungspuncte C denken kann, so ist das statische Moment von R auf diesen Punct C bezogen $= \frac{1}{4}ph \times \frac{2}{3}.\frac{1}{2}h = \frac{1}{12}ph^2$, und wenn man, da dasselbe in allen verticalen Schichten, welche zusammen die Breite b des Balkens ausmachen, Statt findet, diese Momente summirt, so hat man das gesammte Moment von Seite der ausgedehnten Fasern auf die Achse CC' bezogen $= \frac{1}{12} p b h^2$.

Da man nun, wie bereits bemerkt, die Widerstände von Seite der zusammen gedrückten Fasern jenen der ausgedehnten, folglich auch ihr Moment dem vorigen gleich zu setzen hat (das Repulsionsmoment ist nämlich, wenigstens theoretisch genommen, dem Cohäsionsmoment gleich), so wird das Moment der gesammten Widerstände

$$= 2 \cdot \tfrac{1}{12} p b h^2 = \tfrac{1}{6} p b h^2,$$

und da dieses dem Momente der Kraft P, welche diesen Bruch bewirkt, gleich seyn mufs, so hat man $Pl = \frac{1}{6} p b h^2$, und daraus die relative Festigkeit dieses Balkens, wenn man wieder wie oben die absolute Festigkeit durch m bezeichnet, also $p = m$ setzt:

$$P = \tfrac{1}{6} m \frac{b h^2}{l} \; . \; . \; . \; (1,$$

die relativen Festigkeiten zweier parallelepipedischer Balken von einerlei Materie verhalten sich also wie die Breiten, die Quadraten ihrer Höhen, und verkehrt wie ihre Längen.

Wäre die Last P über die ganze Länge des Balkens gleichförmig vertheilt, so könnte man diese im Schwerpuncte, also in der halben Länge vereinigt annehmen, wodurch sie am freien Ende O oder in der Entfernung l von der Brechungsachse CC' nur mit der Hälfte oder mit $\frac{1}{2} P$ wirksam, also

$$\tfrac{1}{2} P = \tfrac{1}{6} m \frac{b h^2}{l} \quad \text{oder} \quad P = \tfrac{2}{6} m \frac{b h^2}{l} \; . \; . \; . \; (2 \text{ wird;}$$

ein Balken kann also eine doppelt so grofse Last tragen, wenn diese anstatt an dem freien Ende angebracht, über die ganze Länge gleich vertheilt wird.

Will man daher im erstern Falle auch auf das eigene Gewicht G des Balkens Rücksicht nehmen, so mufs man in der Formel (1 statt P setzen $P + \frac{1}{2} G$,

$$\text{wodurch } P = \tfrac{1}{6} m \frac{b h^2}{l} - \tfrac{1}{2} G \; . \; . \; . \; (1'$$

wird; im letztern Falle kann G sogleich unter P mitbegriffen werden, obschon man in den wenigsten Fällen von diesem unbedeutenden Gewichte G Notiz zu nehmen hat.

Wird der Balken einmal die breite Seite h, und das andere Mal die schmälere b vertical gerichtet befestigt, so verhält sich seine Festigkeit in diesen beiden Lagen wie $h : b$.

§. **256.** Ist der Querschnitt des Balkens ein Kreis vom Halbmesser r, so ist, wenn die übrigen Bezeichnungen dieselben bleiben, die relative Festigkeit des an einem Ende horizontal befestigten, und am andern belasteten Cylinders:

$$P = \tfrac{1}{4} m \frac{r^3 \pi}{l} \; . \; . \; . \; (3.$$

Ist der Cylinder hohl, dabei der äufsere Halbmesser $= R$ und der innere $= r$, so ist

$$P = \tfrac{1}{4} m \frac{(R^4 - r^4)\,\pi}{R\,l} \; . \; . \; . \; (4.$$

Ist die Last gleichförmig über die ganze Länge vertheilt, so geht auch hier, wie beim rechteckigen Querschnitt, der Coefficient $\frac{1}{4}$ in das Doppelte, d. i. $\frac{1}{2}$ über. Soll das Gewicht des Cylinders berücksichtigt werden; so gilt das im vorigen Paragraphe hierüber Bemerkte auch hier wieder, d. h. man mufs $P + \frac{1}{2} G$ statt P setzen.

§. **257.** Wird der Balken von der Länge $AB = d$ (Fig. 187) anstatt in B eingemauert, um eine beliebige Länge $BA' = d'$ verlängert, an dem Ende A' mit P' belastet, welche Last aus der Gleichgewichtsbedingung $P'd' = Pd$ bestimmt wird, und der Balken in B unterstützt, oder eine aufwärts wirkende Kraft $Q = P + P'$ angebracht; so bleibt noch Alles, auch, wenn man den Balken, wie in Fig. 187, a, umkehrt, im Gleichgewichte, und jede Hälfte AB und $A'B$ befindet sich genau in der Lage wie in §. 255, so, dafs also, wenn der Querschnitt ein Rechteck von den bezeichneten Dimensionen ist, nach der Formel (1 des genannten Paragraphes $P = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{d}$ und $P' = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{d'}$, folglich $Q = P + P' = \frac{1}{6} m b h^2 \left(\frac{d + d'}{d\,d'}\right)$ ist. Ist die ganze Länge des Balkens, oder die Entfernung der beiden Stützen $d + d' = l$, so ist die r e l a t i v e F e s t i g k e i t d e s a n b e i d e n E n d e n f r e i, h o r i z o n t a l a u f l i e g e n d e n, u n d i m P u n c t e B b e l a s t e t e n B a l k e n s vom genannten Querschnitt:

$$Q = \tfrac{1}{6} m b h^2 \cdot \frac{l}{d\,d'} \; . \; . \; . \; (5,$$

wobei $d' = l - d$ ist. Da nun Q die kleinste Last ist, welche den Balken an diesem Puncte B bricht, der Bruch $\frac{l}{d\,d'}$ aber für $d = d' = \frac{1}{2} l$ am kleinsten wird, so erhält auch diese Last Q für den Halbirungspunct O der Länge AA' den kleinsten Werth, d. h. der Balken ist in diesem Puncte O am schwächsten, und die Last, welche ihn hier zu brechen vermag, ist $Q = \frac{1}{6} m b h^2 \frac{l}{\frac{1}{4} l^2}$ oder $Q = \frac{4}{6} m \frac{b h^2}{l}$ . . . (6.

also (§. 255, Gl. 1) dabei vier Mal so stark, als wenn er an dem einen Ende eingemauert und an dem andern belastet wäre.

Haben die beiden Stücke AB und $A'B$ des Balkens die Gewichte k und k', und ist das ganze Gewicht $k + k' = G$, so wirkt von dem Gewichte k, welches man sich im Schwerpuncte, also in der halben Länge von AB wirksam denken kann, $\frac{1}{2} k$ auf die Stütze A und $\frac{1}{2} k$ auf B; eben so wirkt von k' die Hälfte auf A' und $\frac{1}{2} k'$ auf B, folglich kommt auf den Belastungspunct B noch $\frac{1}{2} k + \frac{1}{2} k' = \frac{1}{2} G$, so, daſs also Q in den vorigen Formeln (5 und (6 noch um diese Gröſse $\frac{1}{2} G$ vermehrt werden müſste.

Soll der Balken durch das eigene Gewicht G, oder eine über die ganze Länge gleich vertheilte Last Q gebrochen werden, so müſste man in den vorigen Formeln $\frac{1}{2} G$ oder $\frac{1}{2} Q$ statt Q setzen; thut man dieses in der Formel (6, so erhält man für die brechende Last oder die relative Festigkeit des Balkens:

$$Q = \frac{8}{6} m \frac{b h^2}{l} \quad . . . (7,$$

d. h. der Balken ist in diesem Falle doppelt so stark, als wenn er bloſs in der Mitte belastet wird, und acht Mal so stark, als wenn er an einem Ende befestigt, und am andern belastet wird.

Anmerkung, 1. Alle diese Beziehungen zwischen den an beiden Enden frei aufliegenden, gegen den an einem Ende befestigten Balken gelten natürlich auch für die übrigen Querschnitte der Balken; ist dieser z. B. ein Kreis, so hat man in allen diesen Formeln (§. 256) $\frac{1}{4} m r^3 \pi$ anstatt $\frac{1}{6} m b h^2$ zu setzen u. s. w.

Derselbe in (7 ausgedrückte Werth für Q gilt auch für den Fall, in welchem der Balken an beiden Enden eingemauert und in der Mitte belastet wird, wodurch ein dreifacher Bruch entstehen muſs.

Liegt der Balken nicht horizontal, sondern schief, und ist l' die Horizontalprojection seiner Länge l; so gelten dieselben Formeln, wenn man in diesen l' statt l schreibt.

Anmerkung 2. Soll aus einem runden Baume der stärkste vierkantige Balken gehauen werden, so ist es keineswegs jener vom gröſsten, d. i. quadratischen, sondern von jenem Querschnitte $b h$, für welchen $b h^2$, wenn man b und h als veränderlich ansieht, in den Formeln (1, (5, (6, (7 den gröſsten Werth erhält, und wofür man $b : h = 1 : \sqrt{2} = 1 : 1{\cdot}414$ findet; vorausgesetzt jedoch, daſs man den Balken dann hochkantig stellt, d. i. h zur verticalen Höhe, und b zur horizontalen Breite nimmt.

Man erhält diesen gröfsten Querschnitt ganz einfach durch Construction, indem man den Durchmesser AB (Fig. 188) des runden Baumes in drei gleiche Theile theilt, darauf in den Theilungspuncten a und b bis zum Umfange des Kreises die Perpendikel aC, bD errichtet, und aus den Puncten C und D das Rechteck $ACBD$ construirt, in welchem dann $AC = BD = b$ die Breite, und $AD = BC = h$ die Höhe des Balkens bildet. Bei diesem Querschnitt und der hochkantigen Lage ist der Balken gegen jenen, dessen Querschnitt ein in den Kreis AB eingeschriebenes Quadrat bildet, im Verhältnifs von 2·83 : 3·1 stärker.

§. 258. Besitzen ein massiver und hohler Cylinder von gleicher Länge dieselbe Masse, und bestehen sie aus derselben Materie, ist ferner die Wanddicke des letztern $R - r = \frac{1}{n} R$, und sind P und P' ihre relativen Festigkeiten, so findet man (durch Vergleichung der correspondirenden Formeln in §. 256 oder 257)

$$P : P = n\sqrt{(2n - 1)} : 2n^2 - 2n + 1 \ldots (p.$$

So ist z. B., wenn die Dicke des hohlen Cylinders $\frac{2}{5} R$, also $n = \frac{5}{2}$ ist, $P : P' = 5 : \frac{17}{2} = 10 : 17$. Ist die Wanddicke nur $\frac{1}{5} R$, also $n = 5$, so ist $P : P' = 15 : 41 = 10 : 27$. Für die Dicke $= \frac{1}{10} R$ ist $P : P' = 10 : 42$ u. s. w., so, dafs also die relative Festigkeit des aus demselben Materiale bestehenden hohlen Cylinders verhältnifsmäfsig immer gröfser wird, je dünner der Cylinder oder die Röhre ist. Ähnliches gilt auch für andere als kreisförmige Querschnitte.

Aus diesem Grunde vertheilt man oft die gegebene Masse (z. B. Gufseisen) nach dem sogenannten T, oder doppelt T förmigen Querschnitt, wie in Fig. 189, um die Tragfähigkeit der Körper zu vermehren. Die Rippen, welche man bei gufseisernen Rädern, Balanciers u. s. w. anbringt, haben denselben Zweck.

§. 259. Körper von gleichem Widerstande. Der in §. 255 betrachtete Balken wird unter sonst gleichen Umständen immer an der Stelle AB', wo er aus der Wand hervorragt, brechen, indem für diesen Querschnitt das Moment der Belastung am gröfsten ist. Es haben daher die übrigen Querschnitte eine unnütze Stärke, und diese können also um so kleiner seyn, je weiter sie von der Brechungsebene AB' entfernt sind. Stellt man sich daher die Aufgabe, diese Querschnitte von AB' gegen ab' so abnehmen zu lassen, dafs alle Querschnitte die nämliche Festigkeit besitzen, der Bruch also eben so gut in dem einen als dem andern erfolgen kann; so heifst ein solcher Balken ein Körper von gleichem Widerstande.

Für den eben erwähnten Fall der horizontalen Befestigung des Balkens an dem einen, und Belastung an dem andern Ende, und in der Voraussetzung, dafs die Breite desselben durchaus dieselbe seyn soll, findet man, dafs entweder die obere oder untere Fläche nach einer Parabel gekrümmt seyn mufs, wenn die untere oder obere eine horizontale Ebene ist; im letztern Falle erhalten nämlich die verticalen Seitenflächen des Balkens die Form *abc* in Fig. 190. Ist dagegen die Last (wie es z. B. für Balkone angenommen wird) über die Länge gleichförmig vertheilt, so ist die untere Fläche, wenn die obere horizontal seyn soll, eine schiefe Ebene, und die verticalen Seitenflächen des Balkens bilden das in Fig. 190, *a* dargestellte Profil *abc*.

Liegt der Balken an beiden Enden frei auf, und wird er in der Mitte *c* (Fig. 190, *b*) belastet, so wird, wenn die obere Fläche horizontal, eben und von gleicher Breite ist, die untere Fläche von zwei in *cd* zusammenstofsenden Parabeln, dagegen wenn die Last über die Länge gleich vertheilt ist, von einer Ellipse *adb* begrenzt, deren Halbachsen *ac* und *cd* sind, u. s. w.

§. 260. Werthe der Brechungscoefficienten. Nennt man in den obigen Formeln, z. B. in $P = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{l}$ für einen rechteckigen, oder in $P = \frac{1}{4} m \frac{r^3 \pi}{l}$ (§§. 255, 256) für einen kreisförmigen Querschnitt, den aus Versuchen zu bestimmenden Factor m den Brechungscoefficienten (man könnte auch eben so gut $\frac{1}{6} m$ in der ersten, und $\frac{1}{4} m$ in der zweiten Formel so nennen), so kann man, directen Versuchen zu Folge, wodurch man der Wahrheit näher kommt, als wenn man, wie es theoretisch richtig wäre (§. 255), für m die absolute Festigkeit aus der Tabelle in §. 253 nimmt, dafür die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten, immer wieder, wie es in der Natur der Sache liegt, zwischen ziemlich weiten Grenzen liegenden Werthe nehmen, welche sich wieder auf das Wiener Mafs und Gewicht beziehen, und wobei insbesondere in den obigen Formeln die Gröfsen b, h, r, l in Zollen ausgedrückt werden müssen.

Benennung der Körper.	Brechungscoefficient m.	Benennung der Körper.	Brechungscoefficient m.
Buchen (Roth-) .	8000 — 20000	Tannen . .	5800 — 12000
Eichen	7000 — 20000	Ulmen . . .	5000 — 10000
Eschen	9500 — 12000	Gufseisen .	20000 — 47000
Fichten	7000 — 11000	Kalksteine .	600 — 1400
Kiefer	6000 — 14000	Sandsteine .	500 — 700
Lärchen	4500 — 9500	Ziegel . . .	150 — 280

Anmerkung. Im grofsen Durchschnitt wäre also für Holz $m = 10000$, und für Gufseisen $m = 30000$, also ungefähr drei Mal so grofs.

Für jene Körper, die in dieser Tabelle nicht vorkommen, kann man die Werthe von m aus der Tabelle der absoluten Festigkeit in §. 253 nehmen, wenn man es nicht vorzicht, mit dem betreffenden Körper, d. i. mit demselben Materiale directe Versuche, die immer sicherer sind, vorzunehmen. Um hinsichtlich des Tragvermögens ganz sicher zu gehen, so nimmt man für die wirkliche Belastung bei Hölzern nur den zehnten, und bei Metallen den dritten oder vierten Theil dieser Brechungscoefficienten in Rechnung.

§. 261. Beispiele. 1. Ein gufseiserner Tragbalken von 3 Zoll Breite, 6 Zoll Höhe und 12 Fufs Länge liegt horizontal an beiden Enden frei auf; wie grofs darf die in der Mitte aufzuhängende Last Q seyn, damit er diese noch mit Sicherheit tragen kann?

Nach der obigen Formel (6 in §. 257, in welcher für das vorliegende Beispiel $b = 3$, $h = 6$, $l = 144$, und als Mittelwerth aus der vorigen Tabelle $m = 33500$ zu setzen ist, hat man

$$Q' = \frac{2}{3} . 33500 . \frac{3 \times 36}{144} = 16750 \text{ Pfund.}$$

Soll das eigene Gewicht des Balkens abgeschlagen werden, so bleiben, da der laufende Fufs eines gufseisernen Prisma von 1 Quadratzoll Querschnitt 2·9, also von 18 Quadratzoll 52·2 Pfund wiegt, demnach das Gewicht $G = 12 \times 52{\cdot}2 = 626$ Pfund ist, sofort

$$16750 - \tfrac{1}{2} . 626 = 16437 \text{ Pfund.}$$

Da aber bei dieser Belastung der Bruch erfolgen würde, so nimmt man davon nur den vierten Theil, also $Q = 4100$ Pfund.

Würde der Balken nicht hochkantig, sondern auf die breite Seite gelegt, so würde, da sich (wenn man in der Formel (7 oder (1 b mit h verwechselt) in diesen beiden Fällen allgemein $Q : Q' = bh^2 : b^2h = h : b$ verhält, diese Belastung im Verhältnifs von $6 : 3 = 2 : 1$ geringer, also nur halb so grofs seyn dürfen.

2. Es soll mit Rücksicht auf das eigene Gewicht der Durchmesser einer gufseisernen cylinderischen Welle gefunden werden, welche in Zapfenlager liegt, die um 18 Fufs von einander abstehen, und in der halben Länge mit einem 16 Centner schweren Rade belastet ist.

Man hat zuerst, ohne Rücksicht auf das eigene Gewicht, aus der Formel (§. 256, 3, und §. 257 Anmerk. 1) $Q = \frac{4}{4} m \frac{r^3 \pi}{l}$, sofort

$$r^3 = \frac{lQ}{m\pi} = \frac{12 \times 18 \times 1600}{3{\cdot}14159 \times \frac{1}{4} . 33500} = \frac{345600}{26311},$$

woraus $r = 2{\cdot}35$ Zoll.

Berechnet man nun mit diesem genäherten Werthe das Gewicht der Welle, deren Querschnitt 17·35 Quadratzoll beträgt, so erhält man $G = 906$ Pfund, folglich die eigentliche Belastung

$$Q = 1600 + 453 = 2053 \text{ Pfund},$$

und wenn mit diesem neuen Werthe die Rechnung noch einmal eben so geführt wird, für den gesuchten Halbmesser der Welle $r = 2·77$ Zoll.

Wäre das Rad nicht in der Mitte angebracht, sondern von dem einen Lager um 6, also vom andern um 12 Fufs entfernt, so würde die Stärke der Welle, wie die Formel (5, §. 257 zeigt, im Verhältnifs von $\frac{1}{9 \times 9} : \frac{1}{6 \times 12} = 8 : 9$ zunehmen, also in der vorigen Gleichung $r^3 = \frac{lQ}{m\pi}$ statt Q, $\frac{8}{9}Q$ zu setzen seyn, wodurch der vorige Werth von r nur mit $\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = ·962$ multiplicirt werden darf, um für diesen letztern Fall den entsprechenden Halbmesser der Welle zu erhalten; es wäre dafür $r = 2·65$ Zoll.

§. 262. Stärke der Wellzapfen. Da jeder Zapfen einer horizontalen Welle als ein an einem Ende befestigter, und über seine Länge gleichförmig belasteter Cylinder angesehen werden kann, so hat man aus der betreffenden Formel (§. 256) $P = \frac{1}{2} m \frac{r^3 \pi}{l}$, sofort $r^3 = \frac{2}{\pi} \frac{lP}{m} = ·6366 \frac{lP}{m}$, woraus sich der Halbmesser r bestimmen läfst. Besteht der Zapfen aus Gufseisen, und nimmt man als mittlern Werth und in runder Zahl den Brechungscoefficienten (aus der Tafel in §. 260) m zu 30000 Pfund, davon aber, weil ein solcher Zapfen viel zu leiden, und ein Bruch sehr nachtheilige Folgen hat, nur den zehnten Theil als Tragvermögen, also 3000 Pfund; so wird

$$r^3 = ·0002122\, Pl \; . \; . \; (1.$$

Buchanan, welcher die gufseisernen Zapfen der Wasserräder-Wellen etwas stärker annimmt, gibt dafür eine einfache Regel, wofür (Alles auf das Wiener Mafs und Gewicht reducirt) der Durchmesser jedes der beiden Zapfen

$$D = 1·11 \sqrt[3]{P} \; . \; . \; (2$$

zu nehmen ist, wenn P das Gewicht des Rades sammt der Welle in Centnern, also der Druck auf jeden Zapfen zu $\frac{1}{2} P$ angenommen wird.

Da sich ferner nach ihm die Tragkraft des Gufs- zu jenem des Schmiedeisens wie 9 : 14, also der Durchmesser eines gufseisernen zu jenem eines schmiedeisernen Zapfens wie $\sqrt[3]{14} : \sqrt[3]{9}$ verhält, so erhält man nach Buchanan den Durchmesser eines schmiedeisernen Zapfens aus der Formel

$$D = \cdot 96 \sqrt[3]{P} \ldots (3.$$

Nach Gerstner ist dieses Verhältniss der Tragkraft zwischen unserm Guss- und Schmiedeisen, wie $9:17\cdot 5$, folglich für schmiedeiserne Zapfen

$$D = \cdot 889 \sqrt[3]{P} \ldots (4,$$

wobei, wie bereits bemerkt, P die doppelte Last in Centnern bezeichnet, welche der Zapfen zu tragen hat. Auch wird dabei für gewöhnlich angenommen, dass die Länge des Zapfens seinem Durchmesser ziemlich gleich sey.

Beispiel. Um die Dicke der gusseiernen 4 Zoll langen Zapfen einer horizontalen Wasserradwelle zu finden, wenn jeder Zapfen einen Druck von 25 Centnern zu erleiden hat, so folgt aus der vorigen Formel (1, in welcher $P = 2500$ und $l = 4$ ist: $r^3 = 2\cdot 122$, also $r = \sqrt[3]{(2\cdot 122)} = 1\cdot 285$ oder $D = 2\cdot 57$ Zoll.

Nach Buchanan's Regel wäre (Form. 2) $D = 1\cdot 11 \sqrt[3]{50} = 4$ Zoll. Sollen die Zapfen aus Schmiedeisen hergestellt werden, so erhält man nach der Formel (3 $D = \cdot 96 \sqrt[3]{50} = 3\frac{1}{2}$, dagegen nach jener (4 nur 3·3 Zoll.

Nimmt man für die Tragkraft des Gusseisens anstatt (wie es in der Formel 1 geschehen) 3000 nur 2000 (den Brechungscoefficient m also nur mit seinem kleinsten Werthe der Tabelle in Rechnung), so fällt der erste Werth von r oder D im Verhältniss von $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{3} = 1 : 1\cdot 145$ grösser aus, oder es wird $D = 2\cdot 57 \times 1\cdot 145 = 2\cdot 94$ oder 3 Zoll.

§. 263. Stärke der Zähne und Kämme. Für hölzerne Zähne oder Kämme, welche bei Stirnrädern auf den äussern Umfang des Radkranzes, bei Kron- und Kammrädern auf der Kranzebene eingesetzt werden, hat man, je nachdem der Kammstiel vierkantig oder rund ist, die Formel (§§. 255, 256) $P = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{l}$ oder

$P = \frac{1}{4} m \frac{r^3 \pi}{l} = \cdot 785 m \frac{r^3}{l}$ anzuwenden, und dabei unter b die Breite nach der Richtung der Achse, unter h die Dicke des Zahns, im Theilriss gemessen, und unter l den Abstand dieses Theilkreises von der Wurzel des Zahnes (wo dieser am Radkranze aufsitzt) zu verstehen, und endlich für m nur den zehnten Theil des Brechungscoefficienten (aus §. 260) zu nehmen.

Nach Morin ist, wenn b die Breite der Zähne (bei Stirnrädern in der Richtung der Radachse), d die Dicke (im Theilkreis gemessen), l die Länge oder Höhe derselben (radialer Vorsprung über den Radkranz) alles in Wiener Zollen bezeichnet, für eine Geschwindigkeit des Theilkreises, welche unter 5 Fufs ist, $b = 4\,d$, für eine gröfsere Geschwindigkeit $b = 5\,d$, und wenn die Zähne dem beständigen Nafswerden ausgesetzt sind, $b = 6\,d$, wobei noch als äufserste Grenze für die Höhe $l = 1{\cdot}5\,d$ gesetzt wird. Um aber diesen Factor oder die Dicke d der Zähne zu bestimmen, hat man

für gufseiserne Zähne $d = {\cdot}03\sqrt{P}$,

„ kupferne u. broncene $d = {\cdot}036\sqrt{P}$,

für Zähne aus sehr hartem Holze (wie Weifsbuchen)

$$d = {\cdot}04\sqrt{P}.$$

Tredgold nimmt $d = {\cdot}029\sqrt{P}$ für die Dicke der gufseisernen Zähne, und ihre Breite b so, dafs auf je 100 Pfund Druck (auf das Wiener Mafs und Gewicht bezogen) $\frac{3}{10}$ Zoll kommen, für den Druck P also $b = {\cdot}003\,P$ wird. Nach dieser Regel ist die folgende Tabelle berechnet.

Druck auf die Zähne in Pfunden P	Dicke d. (in Zollen)	Breite b. (in Zollen)	Druck auf die Zähne in Pfunden P.	Dicke d. (in Zollen)	Breite b. (in Zollen)	Druck auf die Zähne in Pfunden P.	Dicke d. (in Zollen)	Breite b. (in Zollen)
100	0·29	0·3	2100	1·33	6·3	4100	1·86	12·3
200	0·41	0·6	2200	1·36	6·6	4200	1·88	12·6
300	0·50	0·9	2300	1·39	6·9	4300	1·91	12·9
400	0·58	1·2	2400	1·42	7·2	4400	1·93	13·2
500	0·56	1·5	2500	1·45	7·5	4500	1·95	13·5
600	0·71	1·8	2600	1·48	7·8	4600	1·97	13·8
700	0·77	2·1	2700	1·51	8·1	4700	1·90	14·1
800	0·82	2·4	2800	1·54	8·4	4800	2·02	14·4
900	0·87	2·7	2900	1·57	8·7	4900	2·04	14·7
1000	0·92	3·0	3000	1·59	9·0	5000	2·06	15·0
1100	0·96	3·3	3100	1·62	9·3	5100	2·08	15·3
1200	1·01	3·6	3200	1·64	9·6	5200	2·10	15·6
1300	1·05	3·9	3300	1·67	9·9	5300	2·12	15·9
1400	1·09	4·2	3400	1·70	10·2	5400	2·14	16·2
1500	1·13	4·5	3500	1·72	10·5	5500	2·16	16·5
1600	1·16	4·8	3600	1·75	10·8	5600	2·18	16·8
1700	1·20	5·1	3700	1·77	11·1	5700	2·20	17·1
1800	1·23	5·4	3800	1·79	11·4	5800	2·21	17·4
1900	1·27	5·7	3900	1·82	11·7	5900	2·23	17·7
2000	1·30	6·0	4000	1·84	12·0	6000	2·25	18·0

Anmerkung. Buchanan gibt die Dimensionen der Radzähne nach dem in Pferdekräften ausgedrückten Widerstande, welchen sie bei verschiedenen Geschwindigkeiten zu erleiden haben, in einer eigenen Tabelle an, welche man u. A. auch in Gerstner's Handbuch der Mechanik, im dritten Bande auf Seite 80 findet.

Beispiel. Bei einem in einer Spinnfabrik seit mehr als 10 Jahren im Gange befindlichen Stirnrade, welches eine Kraft von 25 Pferden fortzupflanzen hat, und wobei der Theilkreis eine Geschwindigkeit von nahe 4 Fufs besitzt, sind die gufseisernen Zähne 1·4 Zoll dick und 9·8 Zoll breit. Um nun zu sehen, wie dieses Factum mit den obigen Regeln übereinstimmt, hat man zuerst zur Bestimmung des Druckes P zwischen den Zähnen, das statische Moment $4\,P = 430 \times 25$ (die Pferdekraft §. 178 zu 430 F. Pf. gerechnet), und daraus $P = 2688$ Pfund; es ist also nach Morin $d = 1·35$ und $b = 6\,d = 9·3$ Zoll (weil die Zähne dem Nafswerden ausgesetzt sind); nach Tredgold (obige Tabelle) $d = 1·5$ und $b = 8·1$ Zoll.

Über die Stärke der übrigen Bestandtheile der Kamm- und Stirnräder findet man sowohl in Morin's Aide-Mémoire (übersetzt von Holtzmann), als auch im dritten Bande von Gerstner's Mechanik, mehrere Regeln angegeben.

Über die absolute und relative Festigkeit der Körper überhaupt sind von uns zwei ausführliche Abhandlungen in den Jahrb. des k. k. polyt. Institutes im 19ten und 20sten Bande abgedruckt.

§. 264. Biegung elastischer Körper. Stellt AB (Fig. 191) die neutrale Schichte oder Achse eines an dem einen Ende eingemauerten und am andern mit dem Gewichte P belasteten Balkens von rechteckigem Querschnitte, wie in §. 255, vor, wobei jedoch diese Belastung noch innerhalb der vollkommenen Elasticitätsgrenze liegen soll, so, dafs die Biegung BC nach Wegnahme dieses Gewichtes P wieder gänzlich verschwindet; so findet man, wenn b die horizontale Breite, h die Höhe, l die Länge, und $BC = d$ die durch die Belastung P erzeugte Biegung (der Pfeil) des Balkens, so wie endlich M der Modul der Elasticität (§. 252) der Materie ist, woraus derselbe besteht, durch höhere Rechnung:

$$P = \tfrac{1}{4}\, d\, \frac{M\,b\,h^3}{l^3} \;\ldots\; (1, \text{ also daraus } d = \frac{4\,P}{M\,b\,h^3}\, l^3 \;\ldots\; (2, \text{ und}$$

$$M = \frac{4\,P}{d\,b\,h^3}\, l^3 \;\ldots\; (3.$$

Soll dabei das eigene Gewicht G des Balkens mit berücksichtiget werden, so wirkt dieses so, als ob im Puncte A ein Gewicht von $\frac{3}{8}\,G$ aufgehängt wäre; man mufs also in diesen drei Formeln $P + \frac{3}{8}\,G$ statt P setzen.

§. **265.** Liegt derselbe Balken vom rechteckigen Querschnitte horizontal an beiden Enden frei auf (Fig. 192), und wirkt die Last Q in der Mitte oder halben Länge C, so findet man für die Biegung oder den Pfeil aC: $d = \frac{Q l^3}{4 M b h^3} \ldots$ (4, und daraus auch:

$$Q = \frac{4 M d b h^3}{l^3} \ldots (5 \text{ und } M = \frac{Q l^3}{4 d b h^3} \ldots (6.$$

Für einen Cylinder, dessen Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r ist, erhält man die analogen Gleichungen:

$$d = \frac{Q l^3}{12 \pi M r^4} \ldots (4', \quad Q = \frac{12 \pi M d r^4}{l^3} \ldots (5', \quad M = \frac{Q l^3}{12 \pi d r^4} \ldots (6';$$

es verhalten sich also bei Balken aus einerlei Materie und von rechteckigem Querschnitte die Biegungen, wie die Belastungen, wie die dritten Potenzen der Längen, und verkehrt wie die Breiten und dritten Potenzen der Höhen; dagegen bei Cylindern wieder wie die Belastungen und dritten Potenzen der Längen, aber verkehrt wie die vierten Potenzen ihrer Halbmesser.

Ist die Last Q nicht in der Mitte angebracht, sondern über die ganze Länge l gleichförmig vertheilt, so mufs man in diesen 6 Formeln $\frac{5}{8} Q$ statt Q setzen, weil diese vertheilte Last Q auf das Biegen genau so, wie ein in der halben Länge angebrachtes Gewicht von $\frac{5}{8} Q$ wirkt, oder eine im Verhältnifs von 8 : 5 gröfsere, aber gleich vertheilte Last dieselbe Biegung, als die erstere in der Mitte angebrachte kleinere Last hervorbringt.

Soll daher auch das eigene Gewicht G des Balkens oder Cylinders mit berücksichtigt werden, so mufs man in diesen Formeln $Q + \frac{5}{8} G$ anstatt Q setzen.

Anmerkung. Beim Gebrauche dieser, so wie der Formeln des vorhergehenden Paragraphes, mufs man l, b, h, d, r in Wiener Zollen und Q in Wiener Pfunden nehmen und verstehen.

§. **266. Bestimmung des Moduls der Elasticität.** Die vorigen Formeln (6 und (6′ können am bequemsten zur Bestimmung des Elasticitätsmoduls M der verschiedenen Körper dienen; man legt nämlich den betreffenden Körper in Form einer Schiene oder Latte von rechteckigem Querschnitte, oder eines Cylinders von bekannten Dimensionen auf zwei um die Länge l von einander entfernten Stützen frei auf, und beobachtet die entweder durch das eigene Gewicht

G allein, oder mit Hinzufügung eines in der Mitte aufgehängten Gewichtes Q (wobei jedoch die ganze Belastung noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegen mufs) in der Mitte entstehende Biegung d, wobei alles in Zollen und Pfunden ausgedrückt werden mufs.

Da nach einem grofsen Durchschnitte aus der Tabelle in §. 253 für Holz $M = 1400000$, für Gufseisen $M = 13700000$, und für Schmiedeisen $M = 2350000$ in runden Zahlen hervorgeht, diese Gröfsen sich also nahe wie 1 : 9·8 : 16·8 verhalten; so bestimmen diese Verhältnisse (wie die Formeln (5 und (5′ zeigen) zugleich auch die Gröfse der Belastung, welche drei Balken von denselben Dimensionen, aber beziehungsweise aus Holz, Gufs- und Schmiedeisen bis zu einer gleichen Biegung (vorausgesetzt, dafs diese noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt) ertragen können.

§. 267. Nimmt man mit Gerstner, durch seine Versuche dazu geführt, an, dafs die gröfste Biegung, welche noch ohne Nachtheil Statt finden kann und darf, bei Holz $\frac{1}{288}$, und bei Gufs- und Schmiedeisen $\frac{1}{480}$ der Länge oder Entfernung der beiden Stützen beträgt; setzt man nämlich in den Form. (5 und (5′ (§. 265) beziehungsweise $d = \frac{l}{288}$ und $d = \frac{l}{480}$ und berechnet sogleich den Zahlencoefficient $4Md$ in (5 und $12\pi Md$ in (5′, und zwar mit den mittlern Werthen von M (aus §. 253), und nur in runden Zahlen; so kann man die Formeln für die gröfste, nach dieser Annahme noch gestattete Belastung Q, welche man in der Mitte der auf beiden Enden horizontal frei aufliegen Balken oder Schäfte von rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitte anbringen darf, für den Gebrauch sehr bequem auf folgende Weise einrichten:

	Rechteckiger Querschnitt:	Kreisförmiger Querschnitt:
für Eichenholz	$Q = 19000 \frac{bh^3}{l^2}$	$Q = 179000 \frac{r^4}{l^2}$
„ Buchen	$Q = 18000 \frac{bh^3}{l^2}$	$Q = 169600 \frac{r^4}{l^2}$
„ Fichten	$Q = 25000 \frac{bh^3}{l^2}$	$Q = 235600 \frac{r^4}{l^2}$
„ Tannen	$Q = 21500 \frac{bh^3}{l^2}$	$Q = 202600 \frac{r^4}{l^2}$
„ Gufseisen	$Q = 114000 \frac{bh^3}{l^2}$	$Q = 1075000 \frac{r^4}{l^2}$
„ Schmiedeisen	$Q = 196000 \frac{bh^3}{l^2}$.	$Q = 1847000 \frac{r^4}{l^2}$.

Will man für Holz überhaupt nur einen Mittelwerth von M annehmen, so kann man wohl auch

$$Q = 19400 \frac{b h^3}{l^2} \ldots (m \quad \text{oder} \quad Q = 182800 \frac{r^4}{l^2} \ldots (m',$$

d. i. für Q nahe den zehnten Theil von jenem für Schmiedeisen setzen. Bei dieser Annahme würden sich also die Belastungen, welche man dreien Balken von gleichen Dimensionen von Holz, Gufs- und Schmiedeisen auflegen dürfte, nahe wie 1 : 6 : 10 verhalten.

Anmerkung 1. In allen diesen Formeln sind die Dimensionen in Zollen und die Belastungen in Pfunden zu nehmen.

Soll das eigene Gewicht der Balken oder Schäfte mit berücksichtigt werden, so mufs man überall $Q + \frac{5}{8} G$ statt Q schreiben; im Falle aber die Last Q über die Länge gleich vertheilt wird, ist $\frac{5}{8} Q$ statt Q zu setzen.

Anmerkung 2. Soll die Biegung eine andere seyn, und z. B. nur den n ten Theil von der hier angenommenen $\left(\frac{l}{288} \text{ für Holz und } \frac{l}{480} \text{ für Eisen}\right)$ betragen, so fallen die obigen Zahlencoefficienten ($4\,M\,d$ und $12\,\pi\,M\,d$) auch n Mal kleiner aus, und man darf daher in diesen Formeln nur überall $n\,Q$ statt Q setzen. Soll z. B. die Biegung des Eisens nur $\frac{1}{960}$ der Länge, also die Hälfte von der diesen Formeln zum Grunde liegenden betragen, so wird man in den vier letztern auf Gufs- und Schmiedeisen sich beziehenden Formeln, die Zahlencoefficienten mit 2 dividiren, oder, was auf dasselbe herauskommt, $2\,Q$ statt Q setzen.

§. 268. Da im Maschinenwesen viele Bestandtheile, wie z. B. Radachsen, Wellen u. s. w. so stark genommen werden müssen, dafs sie keine fur den Gang der Maschine nachtheilige Biegung annehmen; so wird man sich zur Bestimmung der Querschnitte dieser Bestandtheile nicht an die Formeln für die relative Festigkeit, sondern an die im vorigen Paragraphe (welche sich auch leicht mit Rücksicht auf §. 264 für den Fall, als die Körper nur an einem Ende befestigt sind, modificiren lassen) für die Biegung entwickelten Formeln halten.

Da es sich in der Anwendung gewöhnlich um die einer gegebenen Belastung entsprechenden Querschnitte handelt, so kann man diese aus den Gleichungen des vorigen Paragraphes, wobei man sich für Holz mit dem in (m und (m' angegebenen Durchschnittswerth begnügen kann, bestimmen, und die Werthe nur in runden Zahlen annehmen.

Liegen also die Balken oder Schäfte an beiden Enden horizontal frei auf, und drückt man Q in Pfunden, b, h, r in Zollen, dagegen die Länge in Fufsen aus, so hat man bei einer gestatteten Biegung von $\frac{l}{288}$ für Holz und $\frac{l}{480}$ für Gufs- und Schmiedeisen, sofort

	für rechteckige Querschnitte	für kreisförmige Querschnitte
bei Holz	$b h^3 = \frac{Q l^2}{135}$	$r^4 = \frac{Q l^2}{1270}$
„ Gufseisen	$b h^3 = \frac{Q l^2}{800}$	$r^4 = \frac{Q l^2}{7500}$
„ Schmiedeisen	$b h^3 = \frac{Q l^2}{1360}$.	$r^4 = \frac{Q l^2}{12800}$.*)

Soll aufser der in der Mitte angebrachten Last Q auch das eigene Gewicht G des Balkens oder Schaftes berücksichtigt werden, so mufs man in diesen Formeln $Q + \frac{5}{8} G$, soll aber die Last Q über die ganze Länge gleich vertheilt werden, $\frac{5}{8} Q$ statt Q setzen.

Anmerkung. Soll die Biegung nur den n ten Theil von der hier zum Grunde liegenden betragen, so darf man in der entsprechenden Formel (vergl. vorigen Paragraph Anmerk. 2) nur $n\,Q$ statt Q setzen.

Beispiele.

1. Wie stark wird sich ein 12 Fufs langes, 1 Fufs breites und 1 Zoll dickes tannenes Bret biegen, wenn es flach auf zwei um 12 Fufs von einander entfernte Stützen (Länge l des Bretes) horizontal aufgelegt, und in der Mitte mit 50 Pfund belastet wird?

   Nimmt man das specifische Gewicht dieser Holzgattung (§. 39) zu ·5 an, so ist das Gewicht des Bretes $G = 28$ Pfund, folglich, wenn man in der Formel (4 (§. 265) $Q = 50 + \frac{5}{8} . 28 = 67{\cdot}5$, $l = 12 \times 12 = 144$, $b = 12$, $h = 1$, und (aus §. 253 als Mittelwerth) $M = 1500000$ setzt, sofort die gesuchte Biegung oder der Pfeil $d = 2{\cdot}8$ Zoll.

   Dieselbe Biegung würde auch durch eine über die ganze Länge gleich vertheilte Last von $\frac{8}{5} . 50 = 80$ Pfund erfolgen.

2. Es soll für den im §. 261, Beispiel 1, angenommenen gufseisernen Tragbalken die Last gefunden werden, welche er mit Rücksicht auf die Biegung mit Sicherheit tragen kann.

   Da für diesen Balken $b = 3$, $h = 6$ und $l = 144$ ist, so hat man aus der betreffenden Formel (§. 267) $Q = 114000 \frac{b h^3}{l^2}$, sofort $Q = 3562{\cdot}5$ Pfund, als die gesammte Belastung. Bringt man das eigene Gewicht des Balkens $G = 626$ Pfund in Abschlag, so bleiben noch $3562{\cdot}5 - \frac{5}{8} . 626 = 3171$ Pfund für die gesuchte in der Mitte aufzulegende Last, während diese ohne Rücksicht auf Biegung im angezogenen Paragraphe bis nahe 4000 Pfund gefunden wurde.

3. Berechnet man die in §. 261, Beispiel 2, bestimmte Dicke der gufseisernen Welle mit Rücksicht auf Biegung, und nimmt gleich als genäherten Werth das dort berechnete Gewicht der Welle mit 906 Pfund an, so hat man in der obigen Formel $r^4 = \frac{Q l^2}{7500}$, sofort $Q = 1600 + \frac{5}{8} . 906 = 2166$

*) Bei den von Morin angegebenen ähnlichen Formeln scheint Gufs- und Schmiedeisen verwechselt worden zu seyn.

und $l = 18$ zu setzen; dadurch erhält man $r^4 = 94{\cdot}051$, also $r = 3{\cdot}114$ Zoll, während wir im genannten Paragraphe blofs nach der relativen Festigkeit gerechnet, nur $r = 2{\cdot}77$ Zoll fanden. (Der nun entstehende geringe Unterschied im Gewichte der Welle, das etwas gröfser als 906 Pfund ist, hat hier keinen weitern Einflufs.)

Soll die Welle, welche an dieser Stelle ein Stirnrad trägt, das genau eingreifen mufs, in der Mitte nur eine Biegung von $\frac{1}{4}$ Zoll, welche also den $4 \times 18 \times 12 = 864$sten Theil der Länge beträgt, erhalten, so mufs dieser nun, da hier eine Biegung von dem 480sten Theil der Länge zum Grunde liegt $n = \frac{864}{480} = 1{\cdot}8$ Mal kleiner werden, folglich mufs man (vorige Anmerk.) in der vorigen Formel $1{\cdot}8\,Q$ statt Q setzen, wodurch der vorhin für r gefundene Werth noch mit $\sqrt[4]{1{\cdot}8} = 1{\cdot}158$ zu multipliciren kommt, wodurch man $r = 3{\cdot}6$ Zoll erhält.

Nach der Annahme von Tredgold, welcher für gufseiserne Schäfte nur eine Biegung von $\frac{1}{1200}$ der Länge zulassen will, müfste man, wegen $n = \frac{1200}{480} = 2{\cdot}5$, den obigen Werth von r mit $\sqrt[4]{2{\cdot}5} = 1{\cdot}257$ multipliciren, wodurch man für den Halbmesser des Schaftes 3·9, also für dessen Durchmesser 7·8 Zoll erhielte.

Rückwirkende Festigkeit.

§. 269. Wird bei einem Körper (wie z. B. bei Bausteinen, Pfeilern u. s. w.) die rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen, und geht man dabei, wie es die Sicherheit erfordert, wieder nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus, so, dafs also die durch die aufgelegte Last entstehende Zusammendrückung, nach Wegnahme derselben wieder gänzlich verschwindet; so sind diese Verkürzungen (so wie bei der absoluten Festigkeit die Verlängerungen oder Ausdehnungen) wieder den aufgelegten Gewichten oder Lasten proportional. Die Versuche hierüber beschränken sich jedoch mehr auf die Bestimmung jener Last, bei welcher die Körper zerquetscht oder zersplittert werden, so, dafs man dann davon für die Tragkraft einen gewissen Bruchtheil zu nehmen hat. Nach diesen Versuchen ist bei Körpern von ähnlicher Form und demselben Materiale die rückwirkende Festigkeit den Querschnittsflächen proportional, auf welche die Kraft oder Belastung senkrecht wirkt, und sie ist dabei um so gröfser, je mehr sich die Fläche der Kreisform und die Dicke der Höhe nähert.

Die nachstehende Tabelle gibt die Werthe der rückwirkenden Festigkeit für einige der am meisten vorkommenden Körper, auf das Wiener Mafs und Gewicht bezogen.

Benennung der Körper.	Rückwirkende Festigkeit in Pfunden auf 1 Quadratzoll.	Benennung der Körper.	Rückwirkende Festigkeit in Pfunden auf 1 Quadratzoll.
Basalt	20000 — 25000	Sandstein . .	1200 — 11000
Granit	5000 — 9500	Ziegelstein . .	490 — 2100
Kalkstein . .	1200 — 4950	Eichenholz .	3350 — 5700
Marmor . . .	3700 — 9900	Tannenholz .	5700 — 6700
Mörtel	372* — 750	Gufseisen . .	62000 — 124000

§. 270. Bei einer Säule oder einem Pfeiler von beträchtlicher Höhe tritt bei fortgesetzter Belastung eine Biegung ein, wodurch endlich der Bruch (also kein eigentliches Zerdrücken) erfolgt; diefs geschieht z. B. beim Eisen schon, wenn das Prisma beiläufig drei Mal so hoch als dick ist. Ist der Querschnitt ein Rechteck, so tritt in der Regel die Biegung in der Art ein, dafs von den beiden breiten Seitenflächen des Prisma, die eine concav und die andere convex ausgebogen wird, wie es in Fig. 193 dargestellt ist.

Ist b die breite und h die dicke oder schmale Seite des rechteckigen Querschnitts eines prismatischen Körpers von der Länge l, und wird dieser mit dem Gewichte P belastet, so findet man nach der Theorie der elastischen Körper (wenn P innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt): $$P = \pi^2 M \frac{b\,h^3}{12\,l^2} \ldots (1,$$ wo π die bekannte Zahl 3·14, und M den Modul der Elasticität des betreffenden Körpers bezeichnet; es verhalten sich also die rückwirkenden Festigkeiten (eigentlich die Tragvermögen) zweier vierkantiger Balken aus einerlei Materiale, wie die Breiten, Cubi der Dicken, und verkehrt wie die Quadrate der Längen.

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, so ist $P = \pi^3 M \frac{r^4}{4\,l^2}$, so, dafs sich bei runden Säulen von derselben Materie die Festigkeiten wie die vierten Potenzen ihrer Halb- oder Durchmesser, und umgekehrt wie die Quadrate ihrer Höhen verhalten.

Für einen hohlen Cylinder, dessen äufserer Halbmesser $= R$ und innerer $= r$ ist, wird $P = \pi^3 M \left(\frac{R^4 - r^4}{4\,l^2}\right)$.

§. 271. Diese im vorigen Paragraphe aufgestellten Formeln geben in jenen Fällen, in welchen die Prismen oder Säulen nicht wenigstens 20 Mal so hoch als dick sind, folglich in den meisten vorkommenden Fällen, zu grofse Resultate, und in diesem Falle kommt man der Wahrheit näher, wenn man ihre Stärke nicht nach diesen aus der Biegung abgeleiteten Formeln, sondern nach jenen Zahlen bestimmt, welche durch Versuche für das Zerdrücken oder Zerquetschen der Körper gefunden sind. Man kann dabei im grofsen Durchschnitte für die Kraft oder Belastung, durch welche eine Säule von der halben oder gleichen Dicke ihrer Höhe zerdrückt wird, auf jeden Quadratzoll der Querschnittfläche

für Eichen und Tannenholz	zu	3700 Pfund
„ Schmiedeisen	„	49560 „
„ Gufseisen	„	124000 „

annehmen. Bei hölzernen Säulen oder Stützen mufs man die vorige Zahl 3700 auf $\frac{5}{6}$ reduciren, d. i. mit $\frac{5}{6}$ multipliciren, wenn die Höhe beiläufig der 12fachen, dagegen $\frac{1}{2}$ Mal nehmen, wenn die Höhe nahe der 24fachen Dicke gleich ist.

Bei Schmiedeisen wird die vorige Zahl 49560 in den genannten beiden Fällen beziehungweise mit $\frac{5}{8}$ und $\frac{1}{2}$ multiplicirt, so wie endlich bei Gufseisen die entsprechende Zahl 124000 mit den Zahlen $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{15}$ multiplicirt werden mufs, wenn die Höhe beziehungsweise beiläufig der 4, 8 und 36fachen Dicke gleich kommt.

Da aber dadurch immer nur jene Zahlen bestimmt werden, bei welchen der Bruch erfolgt, so nimmt man davon für die sichere Belastung bei Holz und Steinen nur den zehnten, und bei Eisen den vierten bis sechsten Theil.

Beispiel. Eine vierkantige hölzerne Säule von 15 Fufs Höhe hat eine Last von 200 Centnern zu tragen, welchen Querschnitt mufs man derselben geben, wenn derselbe quadratförmig seyn soll?

Rechnet man nach der Formel (1 in §. 270, und setzt als Mittelwerth $M = 1500000$, nimmt $b = h$, und von der entstehenden Festigkeit nur den zehnten Theil; so erhält man

$$P = 10 \times 150000 \frac{b^4}{12(12 \times 15)^2} = 3{\cdot}858\, b^4,$$

und da $P = 20000$ seyn soll, so ist $b^4 = \frac{20000}{3{\cdot}858} = 5184$, also

$$b = 8\tfrac{1}{2} \text{ Zoll.}$$

Benimmt man sich dagegen nach der obigen (im gegenwärtigen Paragraphe) gegebenen Regel, so kann man, da die Höhe nach der bereits geführten Rechnung beiläufig der 18fachen Dicke gleichkommt, was zwischen der 12- und 24fachen in der Mitte liegt, auch von den entsprechenden Factoren $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{6}$ das Mittel, nämlich $\frac{4}{6}$ oder $\frac{2}{3}$ nehmen, womit man die dem Holz entsprechende Zahl 3700, oder, wenn man gleich davon den zehnten Theil nimmt, jene 370 multiplicirt, was sofort 247 als Belastung auf 1 Quadratzoll gibt; da nun die gegebene Last 20000 Pfund beträgt, so muſs der Querschnitt $b^2 = \frac{20000}{247} = 81$, also $b = 9$ Zoll seyn, was sehr gut mit dem vorigen Resultate übereinstimmt.

Torsions-Festigkeit.

§. **272.** Wird ein prismatischer Körper oder ein cylinderischer Schaft AE (Fig. 193) horizontal oder vertical an dem einen Ende DE unveränderlich befestigt, z. B. eingemauert, und an dem andern durch eine Kraft P, welche in einer auf der Achse senkrechten Ebene AB an einem Hebel CF wirkt, um seine Achse CO umzudrehen versucht, so wird dadurch der Halbmesser CB um einen gewissen Winkel $BCB' = i$ verdreht, und die auf der Oberfläche gezogene Gerade EB die Lage EB' annehmen. Findet diese Torsion oder Verdrehung nur innerhalb der Elasticitätsgrenze Statt, so wird, sobald die Kraft P zu wirken aufhört, auch die Verdrehung sammt dem Winkel i verschwinden, und es werden CB' und EB' wieder ihre ursprünglichen Lagen CB und EB annehmen.

Ist l die Länge des Cylinders, r dessen Halbmesser und R jener des Rades an dessen Umfange, oder die Länge des Hebels, an dessen Endpunct die Kraft P wirkt; so findet man durch höhere Rechnung für das Torsionsmoment des massiven Cylinders:

$$PR = \tfrac{1}{2} w \pi \frac{i}{l} r^4 \ . \ . \ . \ (1,$$

wo w ein durch Versuche zu bestimmender Zahlencoefficient (Torsionscoefficient) ist.

Für einen hohlen Cylinder, dessen äuſserer Halbmesser r und innerer r' ist, hat man

$$PR = \tfrac{1}{2} w \pi \frac{i}{l} (r^4 - r'^4) \ . \ . \ . \ (2.$$

Für eine Welle von quadratförmigem Querschnitt und der Seite a:

$$PR = \tfrac{1}{6} w \frac{i}{l} a^4 \ . \ . \ . \ (3,$$

und bei einem rechteckigen Querschnitte von den Dimensionen a und b:

$$PR = \tfrac{1}{3} w \frac{i}{l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \ . \ . \ . \ (4.$$

Was nun die Torsionscoefficienten betrifft, so sind diese für einige der wichtigsten Körper in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt; dabei ist wieder der Wiener Zoll und das Wiener Pfund zur Einheit genommen, so dafs man in den vorigen Formeln a, b, r, R und l in Zollen, P in Pfunden, und den Drehungswinkel i in Graden ausdrücken und verstehen mufs.

Benennung der Körper.	Torsionscoefficient w.	Benennung der Körper.	Torsionscoefficient w.
Buchen . . .	1900	Tannen . . .	1000 — 1800
Eichen . . .	1000 — 1800	Weifsbuchen	2400
Eschen . . .	1800	Gufseisen . .	86000 — 88000
Fichten . . .	900 — 1360	Schmiedeisen	124000 — 178000
Kiefer	1250	Stahl	148000 — 181000
Lärchen . . .	1700		

§. **273.** Für die Halbmesser der cylinderischen Wellen erhält man aus der obigen Gleichung (1: $r = \sqrt[4]{\left(\frac{2PRl}{\pi w i}\right)}$, oder, wenn man den noch als unschädlich zuläfsigen Drehungswinkel i für hölzerne und eiserne Wellen nach Gerstner zu ·117 Grad annimmt,

$$r = \sqrt[4]{\left(\frac{5·45\,PRl}{w}\right)} \ldots (1,$$

und für quadratische Querschnitte, für die Seite:

$$a = \sqrt[4]{\left(\frac{51·92\,PRl}{w}\right)} \ldots (2,$$

wobei w aus der vorigen Tabelle, P, R und l aber in Zollen zu nehmen und zu verstehen ist.

Bei Röhren oder hohlen Cylindern ist auch die Torsions-Festigkeit, bei gleichen Massen nämlich (auf ähnliche Weise wie bei der relativen Festigkeit, §. 258) wieder gröfser als bei massiven Cylindern. Ist z. B. d der lichte Durchmesser eines hohlen Cylinders, und besitzt er dieselbe Masse wie ein massiver Cylinder von dem nämlichen Durchmesser d, welcher aus derselben Materie besteht; so ist die Torsions-Festigkeit des erstern schon drei Mal so grofs, als jene des massiven Cylinders (wie man leicht aus den beiden Gleichungen 1 und 2 in §. 271 findet.)

§. **274.** Buchanan gibt für die Stärke gufseiserner Wellen und Schäfte, bei welchen der Torsionswiderstand mehr als jener gegen die

Biegung in Anspruch genommen wird, folgende Regel: Bezeichnet N die Anzahl der Pferdekräfte (jede zu 430 F.Pf. angenommen, §. 178), welche die Welle fortzupflanzen hat, und n die Anzahl ihrer Umdrehungen per Minute; so ist der für die gufseiserne massive Welle nöthige Durchmesser in Wiener Zollen ausgedrückt:

$$d = 5{\cdot}4 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots (1.$$

Für schmiedeiserne Wellen ist:

$$d = 5{\cdot}4 \times {\cdot}963 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 5{\cdot}2 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots (2.$$

Für solche aus Eichenholz:

$$d = 5{\cdot}4 \times 2{\cdot}238 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 12{\cdot}1 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots (3.$$

Für solche aus Tannenholz:

$$d = 5{\cdot}4 \times 2{\cdot}06 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 11{\cdot}1 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \ldots (4.$$

Die Durchmesser von schmiedeisernen, eichenen und tannenen Wellen müssen nämlich nach dieser Regel beziehungsweise ·963, 2·238 und 2·06 Mal so stark, als eine gufseiserne Welle unter gleichen Umständen seyn.

Anmerkung. Wir führen diese Regel von Buchanan, nach welcher eigene Tabellen für die Wellenstärke berechnet, und in viele Werke aufgenommen wurden, mehr geschichtlich an, als dafs wir einen grofsen Werth darauf legten; im Gegentheile halten wir diese Formeln, in welchen die Länge der Welle, die nach Buchanan (übereinstimmend mit Prof. Robison) auf die Torsions-Festigkeit keinen Einflufs haben soll, unberücksichtigt geblieben ist, nur für ganz kurze Wellen für zuläfsig, indem sie sonst immer, wie die nachstehenden Beispiele zeigen, zu kleine Resultate geben, und zwar um so mehr zu klein, je länger die Wellen sind.

Beispiele.

1. Um die Stärke einer Wasserradwelle aus Tannenholz, welche in 15 Fufs Entfernung vom Wasserrad einen Daumenkranz trägt, mittelst welchen ein Hammer, der auf die Daumen oder Hebköpfe mit 100 Pfund drückt, und wobei der Abstand der Daumen von der Achse der Welle 12 Zoll betragen soll, in Beziehung auf die Torsions-Festigkeit zu finden, hat man nach der Formel (1 in §. 273, wenn man $P = 100$, $R = 12$, $l = 15 \times 12 = 180$, und als mittlern Werth aus der Tabelle (§. 272) $w = 1400$ setzt: $r^4 = \frac{5{\cdot}45 \times 100 \times 12 \times 180}{1400} = 840{\cdot}86$, also $r = \sqrt[4]{(840{\cdot}86)} = 5{\cdot}385$, also der Durchmesser $d = 10{\cdot}8$ Zoll.

2. Soll dieselbe Welle cylinderisch aus Gufseisen hergestellt werden, so kann man in der genannten Formel (1 $w = 87000$ setzen, wodurch man nahe $r = 2$, also den Durchmesser $d = 4$ Zoll findet.

Macht die Welle, um die Regel von Buchanan anwenden zu können, per Minute n Umdrehungen, so ist, wenn man den Widerstand von 100 Pfund als fortwährend auf der Kreisperipherie von 1 Fufs Halbmesser wirkend ansieht, der Weg der Last per Secunde $= \dfrac{2 \times 3{\cdot}14\, n}{60}$, also die Arbeit des Widerstandes in Pferdekraft $N = \dfrac{2 \times 3{\cdot}14 \times 100\, n}{60 \times 430}$,

daher $\dfrac{N}{n} = {\cdot}0244$ und $\sqrt[3]{\dfrac{N}{n}} = \sqrt[3]{{\cdot}0244} = {\cdot}29$, und endlich nach der obigen Formel (1 sofort $d = 5{\cdot}4 \times {\cdot}29 = 1{\cdot}6$ Zoll, wornach aber die Welle offenbar zu schwach, wenigstens in Beziehung auf die Biegung und relative Festigkeit ausfiele, so, dafs man ihren Durchmesser nicht nach dem Torsionswiderstande, sondern nach jenem gegen die Biegung bestimmen müfste, wofür man nach Buchanan nahe 6 Zoll erhalten würde.

3. Soll eine schmiedeiserne runde Welle, welche in einer Minute 30 Umdrehungen macht, auf eine Länge von 12 Fufs, einen auf den Umfang eines 12 Fufs hohen Ruderrades wirkenden Widerstand von 1140 Pfund (durch den Krummzapfen, welcher vom Rade um 12 Fufs absteht) überwinden; so findet man nach der genannten Formel (1 in §. 273, wenn man $P = 1140$, $R = 72$, $l = 144$, und als Mittelwerth aus der Tabelle $w = 150000$ setzt: $r^4 = 429{\cdot}44$, und daraus $r = 4{\cdot}55$ oder $d = 9$ Zoll.

Da nach diesen Angaben die Arbeit des Widerstandes 50 Pferdekräfte beträgt, so ist nach der Regel von Buchanan (Formel 2, des gegenwärtigen Paragraphes)

$$\frac{N}{n} = \frac{50}{30},\ \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = \sqrt[3]{1{\cdot}667},\ \text{folglich } d = 5{\cdot}2 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 6{\cdot}2 \text{ Zoll},$$

demnach wieder bedeutend geringer als nach der erstern Rechnungsart.

Wäre die Welle statt 12 Fufs nur 2 Fufs lang, so würde diefs auf die letztere Rechnungsart keinen, wohl aber auf die erstere einen Einflufs haben, und der obige Werth von 9 Zoll im Verhältnifs von $\sqrt[4]{6} : 1$ (da die Länge der Welle jetzt nur den sechsten Theil beträgt) kleiner, also die Dicke der Welle nahe $= 6$ Zoll werden, in welchem Falle auch in der That eher eine Übereinstimmung mit der Buchanan'schen Regel Statt fände. (Vergl. die vorige Anmerkung.)

Schlufsbemerkung. Soll eine Welle nicht blofs mit ihrer Torsions-, sondern auch mit ihrer relativen Festigkeit Widerstand leisten, und zugleich nur eine innerhalb einer gegebenen Grenze liegende Biegung annehmen, so wird man die Stärke der Welle, d. i. ihren Durchmesser nach allen drei Beziehungen bestimmen oder berechnen und davon die gröfste der drei erhaltenen Dimensionen beibehalten, indem diese dann auch den beiden übrigen Bedingungen um so mehr entsprechen wird.

Röhrenstärke.

§. 275. Werden die Röhren zu Wasserleitungen, oder wie manchmal die eisernen zur Entwicklung von Dämpfen benützt, so haben sie einen von ihrer Achse aus, nach radialen Richtungen, also senkrecht gegen die innere Wand- oder Umfläche Statt findenden Druck auszuhalten, welchem sie nur bei einer gehörigen Wand oder Röhrendicke, die hier bestimmt werden soll, widerstehen können.

Ist der lichte oder innere Durchmesser einer cylinderischen Röhre $AB = 2r$ (Fig. 194), und wird jeder Punct der innern Mantelfläche von der Achse, oder wenn man bei der gegenwärtigen Entwicklung blofs einen einzelnen Querschnitt senkrecht auf die Achse betrachtet, jeder Punct der Kreisperipherie $ANBN'$ vom Mittelpuncte C aus radial oder normal mit einer Kraft gedrückt, welche auf die Flächeneinheit bezogen, den Werth p hat; so kann man sich die genannte Kreisperipherie in unendlich kleine Bögen oder Theile von der Gröfse $am = s$ zerlegt denken, wodurch, wenn wir Kürze halber den Bogen s selbst für die Fläche nehmen (diese ist eigentlich ls, wenn l die Länge des Cylinders nach seiner Achse ist; man kann aber vorläufig diesen constanten Factor l auslassen und nur zuletzt erst in Rechnung bringen), der Bogen s den Druck ps normal auf am oder in der Richtung Ca erleidet. Zerlegt man aber diese Kraft $ad = ps$ in zwei auf einander senkrechte ac und ab, wovon die erstere mit irgend einem Durchmesser AB parallel, folglich die zweite darauf senkrecht ist, so erhält man, weil die beiden Dreiecke amn und abd (deren Seiten auf einander senkrecht stehen) ähnlich sind, also $ab : ad = mn : am$ Statt findet, für die letztere $ab = ps . \frac{mn}{s} = p . fg$, wenn nämlich mf und ag auf AB senkrecht gezogen werden.

Soll nun die Röhre (weil diese, im Falle sie berstet, immer nach irgend einem Durchmesser reifsen wird) in der Richtung des Durchmessers AB in zwei Hälften abgerissen werden, so gehen die mit AB parallelen Kräfte, von welchen einer jeden, wie ac an einem ähnlich liegenden Puncte a' (wofür W. ACa' = W. BCa) eine eben so grofse Kraft $a'c'$ entgegenwirkt, diese sich also gegenseitig aufheben, für diese Wirkung verloren, und es bleibt dafür nur die Summe der auf AB senkrechten Kräfte wie ab, deren in der andern Röhrenhälfte oder hier im zweiten Halbkreis $AN'B$ eine eben so grofse Summe entgegenwirkt, und dadurch eben das Abreifsen (wie bei einem Prisma oder Seile, welches der Länge nach von zwei gleichen Kräften nach entgegengesetzten Richtungen gezogen wird) der einen Röhrenhälfte von der andern bewirkt wird. Diese Summe ist aber, wenn wir sie S nennen,

$$S = p.fg + p.gh + \ldots = p(fg + gh + \ldots),$$

und zwar durch den ganzen Halbkreis BNA genommen, wodurch die Summe der in der Klammer stehenden Projectionen der Bogenelemente in die Projection des ganzen Halbkreises auf AB, nämlich in diesen Durchmesser $AB = 2r$ selbst übergeht, so, dafs man hat: $S = 2rp$, folglich auch $Sl = p.2rl$, wo l, wie bereits bemerkt, die Länge der Röhre bezeichnet; der Druck also, welcher senkrecht auf AB zum Losreifsen der beiden Röhrenhälften ANB und $AN'B$ wirkt, ist gerade so grofs, als der Druck auf die diametrale Ebene AB, d. i. auf die Projection der Cylinderfläche auf diese Ebene wäre.

Eben so findet man ganz analog den Druck auf die innere Kugelfläche, um diese in zwei Halbkugeln nach einem gröfsten Kreise zu trennen, gleich dem Druck auf eine gröfste Kreisebene $r^2\pi$, folglich wenn wieder p der radiale Druck auf die Flächeneinheit ist, diesen auf Trennung wirkenden Druck $= pr^2\pi$.

§. 276. Ist nun e die Dicke der Röhrenwand, so wird beim Zerreifsen derselben die Fläche $2le$ los- oder abgerissen; ist demnach m die absolute Festigkeit (§. 251) des Stoffes oder der Materie, woraus die Röhre besteht, so ist für das Gleichgewicht der zerreifsenden Kraft mit dieser Festigkeit $2lem = 2prl$, und daraus $e = \frac{pr}{m}$, wobei man jedoch, da man das Zerreifsen der Röhre in der Anwendung vermeiden will, von der Zahl m nur einen gewissen, z. B. den vierten oder fünften Theil, nehmen darf, oder überhaupt das Tragvermögen des Materiales zu setzen hat.

Da indefs, selbst wenn der Druck $p = o$ ist (wofür $e = o$ würde) die Röhre zu ihrer eigenen Stabilität schon eine gewisse Stärke besitzen mufs, so fügt man zu jener e noch eine gewisse (die additionelle) Dicke f hinzu, wodurch man endlich für die gesuchte Röhrendicke

$$e = \frac{pr}{m} + f \ldots (1$$

erhält.

Eben so würde für eine hohle Kugel die Wanddicke

$$e = \frac{pr}{2m} + f \text{ seyn.}$$

§. **277.** Bringt man statt des Halbmessers den lichten Durchmesser $d = 2r$ der Röhren in Rechnung, und drückt, wie es für die Anwendung am bequemsten ist, den auf die Flächeneinheit (wofür wir den Wiener Quadratzoll nehmen) der Röhrenwand Statt findenden Druck in Atmosphären $= n$ aus (wobei wir den Druck einer Atmosphäre zu $12\frac{3}{4}$ Pfund, oder nahe dem Drucke einer 32 Fufs hohen Wassersäule annehmen); so kann man nach den von Geniey über die Röhrendicken der Wasserleitungsröhren gemachten Versuchen und Beobachtungen, für die Wanddicke e, wobei e und d in Zollen zu verstehen und zu nehmen sind, folgende Werthe annehmen:

Für bleierne Röhren . . $e = \cdot 005\,nd + \cdot 17$
„ gufseiserne „ . . $e = \cdot 0007\,nd + \cdot 38$
„ Eisenblech „ . . $e = \cdot 0005\,nd + \cdot 114$
„ hölzerne „ . . $e = \cdot 833\,nd + 1\cdot 02.$

Für gegossene hohle Kugeln, Halbkugeln oder Segmente ist die Wanddicke (S. die vorige Anmerk.) mit der Hälfte von jener, welche einem Cylinder von demselben lichten Durchmesser entspricht, hinreichend. Bestehen diese aber (wie manchmal bei Dampfkesseln) aus zusammen genieteten Blechen, so nimmt man $\frac{2}{3}$ von dieser Cylinderstärke.

Anmerkung. In der Voraussetzung, dafs alle gufseisernen Leitungsröhren auf einen Druck von 10 Atmosphären probirt werden, kann man in der betreffenden Formel $n = 10$ setzen. Aubisson nimmt für solche Röhren $e = \cdot 01\,d + \cdot 38$.

Beispiel. Eine horizontale Wasserleitung, aus gufseisernen Röhren bestehend, hat den Druck einer 100 Fufs hohen Wassersäule auszuhalten; welche Wanddicke mufs man den Röhren geben, wenn sie 6 Zoll im lichten Durchmesser halten?

Hier ist $n = \frac{100}{32} = 3\cdot 125$ und $d = 6$, folglich nach der obigen Formel für Gufseisen die gesuchte Wanddicke $e = \cdot 013 + \cdot 38 = \cdot 393$ Zoll oder $4\cdot 7$ Linien, wofür man die Zahl 5 nehmen wird.