Neuntes Kapitel.

Von den Hindernissen der Bewegung.

§. **226. Reibung.** Alle Körper, selbst die best geglätteten und polirten, besitzen auf ihrer Oberfläche noch gewisse Unebenheiten und Rauhigkeiten, wodurch, wenn ein Körper über einen andern hin bewegt wird, die Erhöhungen des einen in die Vertiefungen des andern eingreifen, und die Bewegung nur dadurch möglich wird, daſs diese Erhöhungen umgebogen, abgebrochen oder über einander weggehoben werden. Der dadurch in der Bewegung erzeugte Widerstand heiſst Reibung oder Friction, und dieser kann immer als eine hemmende, der Bewegung entgegen wirkende Kraft angesehen werden.

Dieser Widerstand besteht streng genommen aus zwei verschiedenen Theilen: der Adhäsion der sich berührenden Flächen und der eigentlichen Reibung, und er ist verschieden, je nach der materiellen Beschaffenheit der Körper, der gröſsern oder geringern Rauhigkeit der reibenden Flächen, dem Drucke derselben gegen einander, dem dazwischen gebrachten Schmiermittel, der obwaltenden Temperatur, und endlich dem Zustande der Ruhe oder Bewegung.

Man unterscheidet zwei Gattungen der Reibung: die gleitende, wenn ein Körper über einen andern weggeschoben wird, wozu auch die drehende oder Achsenreibung gehört, und die rollende oder wälzende, wenn ein runder Körper über einen andern wegrollt.

§. **227. Maſs der gleitenden Reibung.** Legt man die eine ebene Fläche des Körpers *B* (Fig. 172), dessen Reibung untersucht werden soll, horizontal, und darauf den zweiten Körper *A*, ebenfalls mit einer ebenen Fläche, welchen man noch, um einen grössern Normaldruck zwischen den reibenden Flächen zu erhalten, mit Gewichten belasten kann, befestigt daran eine Schnur, läſst diese horizontal über eine Rolle *C* gehen, und hängt endlich an das andere Ende eine Wagschale; so wird man durch successives Auflegen von Gewichten auf diese Schale, und zwar so lange, bis entweder die Bewegung eben anfängt, oder durch einen kleinen Anstoſs eine gleichförmige Bewegung des Körpers *A* eintritt, dieses Gewicht (jenes der Wagschale mit inbegriffen) die Gröſse oder den Werth der Reibung, und zwar im ersten Falle von der Ruhe aus, im letztern, während der Bewegung angeben.

Die Gesetze nun, welche man auf diese Weise durch sehr viele und sorgfältig angestellte Versuche für die gleitende Reibung gefunden hat, sind wesentlich folgende:

1. Die Reibung ist von der Gröfse der Berührungs- oder Reibungsflächen unabhängig. Man erklärt sich dieses daraus, dafs bei einer gröfsern Fläche zwar mehr Unebenheiten in einander, dagegen aber, da der Druck auf eine gröfsere Fläche vertheilt wird, nicht so tief eingreifen oder eingedrückt werden; übrigens wird dabei vorausgesetzt, dafs (wie es z. B. bei Fuhrwerken oft geschieht) keine Geleise oder Furchen dabei entstehen.

2. Die Geschwindigkeit der Bewegung hat auf die Gröfse der Reibung ebenfalls keinen Einflufs. Es kommen zwar bei einer gröfsern Geschwindigkeit in derselben Zeit mehr Theile zur Berührung, sie haben aber auch nicht Zeit so tief einzudringen; dabei darf jedoch die Geschwindigkeit niemals so grofs werden, dafs eine Erhitzung zwischen den Reibungsflächen eintritt, weil dadurch die Reibung oft bedeutend zunimmt.

3. Die Reibung ist dem Normaldrucke zwischen den sich reibenden Flächen, sobald dieser schon eine solche Gröfse erreicht hat, dafs die Adhäsion nur mehr einen geringen oder untergeordneten Antheil an dem Widerstande hat, genau proportional.

4. Die Reibung ist von der Ruhe aus gröfser als während der Bewegung. Im erstern Falle scheinen die Unebenheiten (wozu sie Zeit gehabt haben) tiefer einzudringen, als im letztern.

5. Durch das Einschmieren der sich reibenden Flächen mit passenden Schmiermitteln wird nicht nur die Reibung bedeutend vermindert, sondern zugleich auch aller Unterschied, welcher bei trockener Reibung zwischen Körpern von *verschiedener* Materie besteht, aufgehoben. Durch passende Schmieren werden nämlich die Poren oder Vertiefungen der Reibungsflächen ausgefüllt.

§. 228. Coefficient und Wirkung der Reibung. Da die Reibung F unter übrigens gleichen Umständen dem Normaldruck Q zwischen den reibenden Flächen proportional, d. i.

$F : F' = Q : Q'$ ist, so folgt $F = \frac{F'}{Q'} Q$, oder, wenn man den Quotienten $\frac{F'}{Q'} = f$ setzt: $F = fQ$.

Diese Verhältnifszahl f, welche man aus Versuchen findet, indem man für die betreffenden Körper bei irgend einem Normaldrucke Q die Gröfse der Reibung F' bestimmt, und mit welcher man den zwischen den reibenden Flächen derselben Körper Statt findenden Normaldruck Q multipliciren mufs, um den Betrag der Reibung F zu erhalten, heifst Reibungscoefficient. Multiplicirt man den Betrag der Reibung mit der Geschwindigkeit der reibenden Flächen, so erhält man die Wirkung oder Arbeit der Reibung, welche sofort, da F dabei constant, der Geschwindigkeit proportional ist.

Anmerkung. Zur Bestimmung der Reibungscoefficienten kann man sich aufser des im vorigen Paragraphe erwähnten horizontalen Tisches auch einer beweglichen schiefen Ebene bedienen. Bildet nämlich die, um eine durch A auf ABC senkrechte Achse bewegliche schiefe Ebene AB (Fig. 97, a) die eine, und die untere Fläche des darauf gelegten Körpers vom Gewichte Q die zweite reibende Fläche, und vergröfsert man nach und nach den Winkel BAC so lange, bis durch einen kleinen Anstofs ein Herabgleiten des Körpers, und zwar mit gleichförmiger Bewegung (wobei dann die Beschleunigung durch die Reibung F aufgehoben wird) eintritt; so ist, wenn p die aus der Zerlegung von Q entstehende parallele Kraft mit AB und q den Normaldruck bezeichnet (§. 109), $p : q = BC : AC$, oder $\frac{p}{q} = f = \frac{BC}{AC} = tang\, \alpha$, wenn W. $BAC = \alpha$ ist.

§. 229. In den nachstehenden beiden Tabellen sind die Reibungscoefficienten f für die in der Anwendung am meisten vorkommenden Körper, und zwar, da bei heterogenen Körpern, wenn diese so lange mit einander in Berührung waren, bis die Reibung ihr Maximum erreicht hat (was z. B. bei Eisen auf Holz 5 bis 6 Tage dauern kann), diese von der Ruhe aus bedeutend gröfser ist, als jene während der Bewegung, in der ersten Tabelle für die Bewegung von der Ruhe aus, und in der zweiten während der Bewegung für verschiedene Zustände der Körper zusammen gestellt.

Tabelle I.

Reibungscoefficienten für die Bewegung von der *Ruhe* aus, wenn die ebenen Flächen durch längere Zeit mit einander in Berührung waren.

Benennung der sich reibenden Körper.		Zustand der Flächen u. Gattung der Schmiere.							
		Trocken.	Mit Wasser benetzt.	Oliven-Oel.	Schweinschmalz.	Unschlitt.	Trockene Seife.	Fettig und polirt.	Fettig und benetzt.
Holz auf Holz	im Minim.	·30	·65	—	—	·14	·22	·30	
	» Mittel	·50	·68	—	·21	·19	·36	·36	
	» Maxim.	·70	·71	—	—	·25	·44	·40	
Metall auf Metall	im Minim.	·15	—	·11	—	—	—	·12	
	» Mittel	·18	—	·12	·10	·11	—	·15	
	» Maxim.	·24	—	·16	—	—	—	·17	
Holz auf Metall oder umgekehrt		·60	·65	·10	·12	·12	—	·10	
Hanfseile od. Gurten auf Holz	im Minim.	·50							
	» Mittel	·63	·87						
	» Maxim.	·80							
Starkes Sohlenleder für Liederungen, auf Holz oder Gufseisen	nach der Kante	·43	·62	·12	—	—	—	—	·27
	flach	·62	·80	·13					
Riemen von schwarzem Leder auf einer Trommel von	Holz	·47							
	Gufseisen	·54	—	—	—	—	—	·28	·38
Kalkstein (Roggenstein) auf Kalkstein		·74							
Muschelkalk auf Roggenstein		·75							
Ziegel auf Roggenstein		·67							
Eichenholz auf Roggenstein, über Hirn		·63							
Eisen auf Roggenstein		·49							
Muschelkalk auf Muschelkalk		·70							
Ziegel auf Muschelkalk		·67							

Tabelle II,
Reibungscoefficienten für das Übereinandergleiten ebener Flächen während der *Bewegung*.

Benennung der sich reibenden Körper.		Zustand der Flächen und Gattung der Schmiere.								
		Trocken.	Mit Wasser benetzt.	Oliven-Oel.	Schwein-schmalz.	Unschlitt.	Schweinschmalz und Graphit.	Gereinigte Wagenschmiere.	Trockene Seife.	Fettig.
Holz auf Holz . .	im Minim.	·20	—	—	·06	·06	—	—	·14	·08
	„ Mittel	·36	·25	—	·07	·07	—	—	·14	·12
	„ Maxim.	·48	—	—	·07	·08	—	—	·16	·15
Metall auf Metall	im Minim.	·15	—	·06	·07	·07	·06	·12	—	·11
	„ Mittel	·18	·31	·07	·09	·09	·08	·15	·20	·13
	„ Maxim.	·24	—	·08	·11	·11	·09	·17	—	·17
Holz auf Metall oder umgekehrt	im Minim.	·20	—	·05	·07	·06	—	—	—	·10
	„ Mittel	·42	·24	·06	·07	·08	·08	·10	·20	·14
	„ Maxim.	·62	—	·08	·08	·10	—	—	—	·16
Hanfseile, Gurten auf	Eichenholz	·45	·332							
dto. dto.	Gufseisen	—	—	·15	—	·19				
Sohlenleder, die flache Seite auf Holz oder Metall	roh . . .	·54	·36	·16	—	·20				
	geklopft .	·30	—							
	fett . . .	—	·25							
Dto. mit der Kante (Garnituren bei Kolben oder Pistons)	trocken .	·34	·31	·14	—	·14				
	geschmiert	—	·24							

Anmerkung. Nach Rondelet ist der Reibungscoefficient für trockene pulverisirte Erde = ·94, für angefeuchtete = 1·38, für feinen trockenen Sand = ·69; nach Barlow für feste Erde = 1·4, für leichten Sand = ·8. Nach Rondelet für gut polirten Lyas (liais, Kalkstein von sehr feinem Korn) auf einem gleichen Stein = ·58. Nach Boistard für einen sehr harten, mit dem Pick- und Stockhammer behauenen Kalkstein auf einem gleichen = ·78. Nach Coulomb für Eisen auf Eisen trocken = ·29, geschmiert = ·10, für Kupfer auf Eisen, trocken = ·16 und geschmiert = ·09.

§. 230. Reibung auf der horizontalen Ebene.

Liegt ein Körper auf einer horizontalen Ebene MN (Fig. 173), und wird derselbe von einer durch dessen Schwerpunct O gehenden Kraft P

nach der Richtung OA gezogen, so mufs man zur Bestimmung des Einflusses der Reibung die Kraft $P = Oc$ in zwei auf einander senkrechte Kräfte $Oa = p$ und $Ob = q$ zerlegen, wovon die letztere normal auf die Ebene MN wirkt, und den Normaldruck zwischen den reibenden Flächen vermindert, nämlich auf $Q - q$ reducirt, wenn Q das Gewicht des Körpers bezeichnet.

Da nun (§. 228) der Betrag der Reibung $F = f(Q - q)$ ist, wo f aus einer der vorigen Tabellen zu nehmen ist, so mufs, wenn die Kraft p mit diesem Widerstande im Gleichgewichte seyn soll $p = f(Q - q)$, oder da aus $p : P = Oa : Oc$ und $q : P = ac : Oc$, sofort $p = P\dfrac{Oa}{Oc}$ und $q = P\dfrac{ac}{Oc}$ folgt, auch $P\dfrac{Oa}{Oc} = f\left(Q - P\dfrac{ac}{Oc}\right)$,

$$\text{d. i. } P = \frac{fQ}{\frac{Oa}{Oc} + f\frac{ac}{Oc}} \quad \ldots (1 \text{ seyn.}$$

Anmerkung. Wäre die Kraft P abwärts nach OA' gerichtet, so würde der Normaldruck nicht $Q - q$, sondern $Q + q$ seyn, so, dafs man also in dem vorigen Ausdrucke q oder $\dfrac{ac}{Oc}$ negativ zu nehmen hat, wodurch (da nun der Nenner kleiner wird) die nöthige Zugkraft P gröfser ausfällt.

Ist OA horizontal oder mit MN parallel, so wird in (1 $ac = o$ und $Oa = Oc$; folglich $P = fQ$, wie es seyn soll.

Wird der Winkel AOa, welchen die Richtung des Zuges mit der Horizontalen bildet, mit α bezeichnet, so ist $\dfrac{Oa}{Oc} = Cos\,\alpha$ und $\dfrac{ac}{Oc} = Sin\,\alpha$, daher auch (Formel 1) $P = \dfrac{fQ}{Cos\,\alpha + f\,Sin\,\alpha}$. Soll die Kraft P am kleinsten werden, so mufs der Nenner dieses Bruches bei gleichen Werthen von Q und f am gröfsten ausfallen, und man findet für diese Bedingung $tang\,\alpha = \dfrac{ac}{Oa} = f$, d. h. es mufs die trigon. Tangente des Neigungswinkels dem Reibungscoefficienten gleich seyn, wenn die Zugkraft die vortheilhafteste Richtung haben soll; ihre Gröfse ist dann

$$P = \frac{Q\,Sin\,\alpha}{Sin\,\alpha^2 + Cos\,\alpha^2} = Q\,Sin\,\alpha.$$

§. 231. Reibung auf der schiefen Ebene.

Wirkt eine Kraft $P = Oc$ (Fig. 174) durch den Schwerpunct O eines auf der schiefen Ebene AB liegenden Körpers, dessen Gewicht $Q = OE$ ist, nach der Richtung OD, um denselben hinauf zu ziehen, so zerlege man $P = Oc$ in die beiden Kräfte Oa und Ob parallel und senkrecht auf AB, ferner eben so $Q = OE$ in Oe und Od; so ist

$Od - Ob$ der Normaldruck, folglich, wenn in allen Fällen f den Reibungscoefficienten zwischen den reibenden Flächen bezeichnet, $f(Od - Ob)$ der Betrag oder Widerstand der Reibung nach Oe, so, dafs für das Gleichgewicht $Oa = Oe + f(Od - Ob)$ seyn mufs, wenn nämlich durch einen kleinen Anstofs die Kraft P den Körper über die schiefe Ebene hinauf ziehen soll. Soll dagegen die Kraft P den Körper auf der schiefen Ebene blofs erhalten, also am Hinabgleiten hindern, so kommt die Reibung dieser Kraft zu Hilfe, und es ist

$Oa + f(Od - Ob) = Oe$ oder $Oa = Oe - f(Od - Ob)$, so, dafs man im vorigen Ausdrucke den Reibungscoefficienten f blofs negativ zu nehmen braucht, um daraus den letztern Werth von Oa zu erhalten.

Anmerkung. Ist i der Neigungswinkel der Kraft P mit der schiefen Ebene, α jener der schiefen Ebene mit dem Horizonte, so ist $Oa = Oc \,.\, Cos\, i = P\, Cos\, i$, $Ob = ac = P\, Sin\, i$, $Od = OE\, Cos\, \alpha = Q\, Cos\, \alpha$ und $Oe = dE = Q\, Sin\, \alpha$, folglich, wenn man diese Werthe in den ersten der beiden vorigen Ausdrücke von Oa substituirt, auch $P\, Cos\, i = f(Q\, Cos\, \alpha - P\, Sin\, i) + Q\, Sin\, \alpha$, und daraus $$P = \frac{Q\,(Sin\, \alpha + f\, Cos\, \alpha)}{Cos\, i + f\, Sin\, i} \;\ldots\; (1.$$

Da der Zähler dieses Bruches für denselben Körper und die nämliche schiefe Ebene constant, dagegen der Nenner nach dem vorigen Paragraphe für $tang\, i = f$ am gröfsten wird, so ist auch dafür wieder, wie vorhin die Kraft P am kleinsten, oder sie wirkt unter diesem Neigungswinkel (wofür $\frac{ac}{aO} = f$) am vortheilhaftesten und hat den Werth $P = Q\, Sin\,(\alpha + i)$.

Ist Od parallel mit der schiefen Ebene, so ist $i = o$, folglich (aus 1)
$$P = Q\,(Sin\, \alpha + f\, Cos\, \alpha) \;\ldots\; (2.$$

Liegt OD unterhalb Oa, so bringt die jetzt nach abwärts wirkende Seitenkraft Ob ebenfalls einen Druck auf die Ebene hervor, so, dafs jetzt der Normaldruck nicht die Differenz, sondern die Summe $Od + Ob$ beträgt, folglich Ob oder in der Gleichung (1 $Sin\, i$ negativ zu nehmen ist, wodurch
$$P = \frac{Q\,(Sin\, \alpha + f\, Cos\, \alpha)}{Cos\, i - f\, Sin\, i} \;\ldots\; (2 \text{ wird.}$$

Ist OD horizontal oder parallel mit AC, so ist $i = \alpha$, daher
$$P = \frac{Q\,(Sin\, \alpha + f\, Cos\, \alpha)}{Cos\, \alpha - f\, Sin\, \alpha} = \frac{Q\,(f + tang\, \alpha)}{1 - f\, tang\, \alpha} \;\ldots\; (3,$$
oder wenn man $AC = b$ und $BC = h$ setzt, auch $\left(\text{wegen } tang\, \alpha = \frac{h}{b}\right)$:
$$P = \frac{Q\,(h + bf)}{b - fh} \;\ldots\; (4.$$

Wie bereits bemerkt, hat man in allen diesen Formeln den Reibungscoefficienten f mit dem entgegensetzten Zeichen zu nehmen, wenn P nicht die bewegende, sondern nur die erhaltende Kraft seyn soll.

§. 232. Reibung am Keil. Ist die normale Pressung auf jeder Seite des Keils BAB' (Fig. 175) $= Q$, so ist die beim Eintreiben desselben, der bewegenden Kraft in den Richtungen AB und AB' entgegenwirkende Reibung auf jeder Seite $= fQ$. Verlängert man BA und $B'A$, und schneidet auf den Verlängerungen $AC = AC' = fQ$, d. h. dieser widerstehenden Kraft fQ proportional ab, so gibt die Diagonale AD des Kräftenparallelogramms die Gröſse und Richtung der Resultirenden P' aus der Reibung, und es ist $P' = AD = 2AF$, oder da (wegen Ähnlichkeit der Dreiecke ACF und ABE) $AF : AC = AE : AB$, und daraus $AF = fQ \cdot \frac{AE}{AB}$ folgt, auch $P' = 2fQ \cdot \frac{AE}{AB}$.

Nach §. 113 (Gleich. 2) ist ohne Reibung $P = Q\frac{BB'}{AB}$, folglich, da die senkrecht auf BB' wirkende Kraft K mit dieser Kraft P und der Reibung P' im Gleichgewichte stehen, also $K = P + P'$ seyn muſs, so hat man

$$K = Q \cdot \frac{BB'}{AB} + 2fQ \cdot \frac{AE}{AB}.$$

Ist z. B. $f = \frac{1}{10}$ und etwa auch $\frac{BB'}{AB} = \frac{1}{10}$, in welchem Falle ohne merkbaren Fehler $\frac{AE}{AB} = 1$ gesetzt werden kann; so wird für eine Pressung von $Q = 100$ Pfund, sofort $K = 100 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot 100 = 10 + 20 = 30$ Pfd., so, daſs also die nöthige Kraft, mit Rücksicht auf die Reibung (ungeachtet der Reibungscoefficient so klein als möglich angenommen wurde) 3 Mal so groſs, als ohne diese seyn müſste.

Diese Reibung ist übrigens bei den allermeisten Anwendungen des Keils in der Industrie höchst nothwendig und nützlich, weil der Keil ohne dieselbe, auf jeden Schlag, womit er eingetrieben wird, zurückspringen, und überhaupt keine bleibende Pressung, wie z. B. bei der Keilpresse verlangt und nothwendig wird, möglich wäre.

Ist der Keil für die vorhandene Reibung zu stumpf, so springt derselbe auch wirklich zurück, und zwar findet dieses Statt, wenn $P > P'$, d. i. $Q\frac{BB'}{AB} > 2fQ\frac{AE}{AB}$, d. i. $BB' > 2f \cdot AE$ ist. Für das vorige Beispiel von $f = \frac{1}{10}$, würde dieser Fall für $BB' > \frac{1}{5}AE$, dagegen, wenn $f = \frac{1}{6}$, für $BB' > \frac{1}{3}AE$ eintreten oder der Keil zurückspringen.

§. 233. Reibung bei der Schraube. Ist r der mittlere Halbmesser der Spindel (§. 114), also $2 r \pi$ ihr Umfang, ferner bei einem flachen Gewinde h die Höhe eines Schraubenganges, so ist unmittelbar nach der Formel (4 des §. 231.) P die am Umfange der Spindel nach der Tangente zur Überwindung der Reibung nöthige Kraft; wirkt aber die Kraft K an einem Hebel von der Länge l, so ist $K = \frac{r}{l} P$, oder, wenn man für P den Werth aus der angezogenen Formel und dabei zugleich $b = 2 r \pi$ setzt:

$$K = \frac{r}{l} Q \frac{h + 2 r \pi f}{2 r \pi - f h} \ldots (1.$$

Die Wirkung oder Arbeit dieser Kraft K ist bei einer Umdrehung $W = K . 2 l \pi$, d. i.

$$W = 2 r \pi Q \frac{h + 2 r \pi f}{2 r \pi - f h} = Q h + Q f \left[\frac{h^2 + 4 r^2 \pi^2}{2 r \pi - f h} \right] \ldots (2.$$

Diese besteht also aus dem Nutzeffecte $Q h$ und der auf Reibung verwendeten Arbeit $Q f [\ldots]$, welche sonach verloren geht.

Für eine Spindel mit scharfem Gewinde findet man die analoge Gleichung

$$W = Q h + \frac{1}{n} f Q \left[\frac{h^2 + 4 r^2 \pi^2}{2 r \pi - f h} \right] \ldots (3,$$

wobei n die Verhältnifszahl der Höhe $o i$ zur Seite $o p$ des gleichschenklichen Dreieckes $o q p$ (Fig. 106, a), welches das Profil des Gewindes bildet, bezeichnet.

Da nämlich bei einem scharfen Gewind der Normaldruck R (Fig. 97, b) gröfser als die lothrecht widerstehende Last Q ist, indem man hat (§. 109, Relat. 4.) $R = \frac{A B}{A C} Q$, oder wegen $\frac{A C}{A B} = \frac{o i}{o p} = n$, $R = \frac{Q}{n}$; so mufs man in dem letzten, von der Reibung herrührenden Glied $Q f [\ldots]$ der obigen Formel (2, $\frac{Q}{n}$ statt Q setzen.

Setzt man für eine eiserne Spindel mit flachem Gewind und metallener Mutter $h = \frac{4}{7} r$ und $f = \frac{1}{6}$, so erhält man aus der obigen Formel (2 für die bei einer Umdrehung der Spindel von der Reibung absorbirten Arbeit $1 \cdot 072\, Q r$ oder nahe $1 \cdot 9\, Q h$, so dafs also $W = Q h + 1 \cdot 9\, Q h = 2 \cdot 9\, Q h$, nämlich der durch die Reibung verursachte Arbeitsverlust beinahe dem doppelten Nutzeffect gleich kommt.

Setzt man ferner für eine hölzerne Spindel ein scharfes Gewind voraus, wobei das Dreieck $o p q$ (Fig. 106, a) gleichseitig, folglich $n = \frac{o i}{o p} = \cdot 866$ ist, und setzt $h = \frac{1}{3} r$, also $r = 3 h$ und $f = \frac{1}{5}$; so erhält man eben so aus der Formel (3 für die bei einer Umdrehung durch die

Reibung erschöpfte Wirkung $\frac{1}{n} fQ [\ldots] = 4{\cdot}41\ Qh$, folglich $W = Qh + 4{\cdot}41\ Qh = 5{\cdot}41\ Qh$, so dafs also bei dieser Voraussetzung die zur Überwindung der Reibung verwendete Wirkung oder Arbeit beinahe dem $4\frac{1}{2}$fachen Nutzeffecte der Schraube gleichkommt.

Aufser der eben betrachteten Reibung in dem Gewinde kommt gewöhnlich noch eine an der Grundfläche der Spindel, wie z. B. bei Spindelpressen, Schraubzwingen u. s. w., oder der Schraubenmutter, wie bei Serviettenpressen u. s. w. vor, welche im §. 235 berechnet werden wird.

Anmerkung. Soll die Schraube nach ausgeübtem Drucke von selbst zurückspringen, so mufs (§. 231) f negativ genommen werden, und da man in einem solchen Falle immer ein flaches Gewind anwendet, so wird man diese Zeichenänderung in der obigen Gleichung (1 vornehmen und darin zugleich, um die Grenze zu finden, bei welcher die Reibung noch gerade hinreicht, dem Drucke Q das Gleichgewicht zu halten, $K = o$ setzen; dadurch erhält man $o = h - 2 r \pi f$ und daraus $f = \frac{h}{2 r \pi}$, so, dafs also für $f < \frac{h}{2 r \pi}$ (wofür K positiv, folglich zur erhaltenden Kraft wird) die Spindel zurückspringt, dagegen für $f > \frac{h}{2 r \pi}$ durch die blofse Reibung festhält.

Ist z. B. $f = \frac{1}{8}$, so mufs für den erstern Fall $\frac{h}{2 r \pi} > \frac{1}{8}$ oder nahe $h > \frac{4}{5}$ seyn; da jedoch dadurch die Steigung der Gewinde für eine einfache Schraube zu bedeutend würde, und die Schraubenmutter, ohne dieselbe unverhältnifsmäfsig hoch oder dick machen zu müssen, nicht die für die Tragkraft nöthige Gewindezahl erhalten könnte, so wendet man in einem solchen Falle eine mehrfache oder mehrgängige Schraube an. (§. 114, Anmerkung.)

§. 234. Reibung an den Zähnen der Stirnräder. Sind C und c (Fig. 159) die Mittelpuncte der Grundkreise der in einander greifenden cylinderischen Räder, $CA = R$ und $cA = r$ ihre Halbmesser, so wie m und m' die Anzahl ihrer Zähne; ist ferner das Rad C das treibende und jenes c das getriebene, und setzt den in diesem letztern zu überwindenden, auf den Umfang des Grundkreises cA reducirten Widerstand $= Q$, so wie die am Umfange CA des treibenden Rades nöthige Kraft $= P$; so würde bei einer richtigen Verzahnung (§. 207) $P = Q$ seyn, wenn zwischen den Zähnen keine Reibung Statt fände. Mit Rücksicht jedoch auf diesen bei M zu überwindenden Reibungswiderstand mufs $P > Q$ seyn, so, dafs $P' = P - Q$ den Betrag dieser Reibung darstellt.

Durch eine für diesen Fall hinreichend genaue Näherungsrechnung findet man nun, wenn f den betreffenden Reibungs-Coefficienten und π wie immer die Ludolphische Zahl bezeichnet, für diesen Betrag der Reibung:

$$P' = \pi f Q \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \ldots \quad (1,$$

so, dafs dann die am Umfange des Grundkreises des treibenden Rades nöthige Kraft $P = Q + P'$ wird.

Ist nämlich Dd (Fig. 159) die gemeinschaftliche Tangente, so wie AM die Normale im Berührungspuncte beider Zähne NO und no, und zieht man aus C und c die Perpendikel CD und cd auf die erstere, so wie CB und cb auf die letztere, und bezeichnet den zwischen diesen Zähnen (auf welche man in der Rechnung wieder den gesammten Druck übertragen kann) Staat findenden Normaldruck mit p; so müssen für das Gleichgewicht offenbar die beiden Relationen bestehen:

$$PR = p \,.\, CB + pf \,.\, CD \text{ und } Qr = p \,.\, cb - pf \,.\, cd,$$

oder, wenn man die Winkel $ACB = Acb = \alpha$ und die Normale $AM = l$ setzt, wodurch $CB = R \operatorname{Cos} \alpha$, $CD = l - R \operatorname{Sin} \alpha$, $cb = r \operatorname{Cos} \alpha$ und $cd = l + r \operatorname{Sin} \alpha$ wird, und wenn man Kürze halber

$$\cos \alpha + f\left(\frac{l}{R} - \operatorname{Sin} \alpha\right) = A \text{ und } \operatorname{Cos} \alpha - f\left(\frac{l}{R} + \operatorname{Sin} \alpha\right) = B$$

setzt, auch

$$P = pA \text{ und } Q = pB.$$

Daraus folgt

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \text{ oder } P = Q\,\frac{A}{B} \text{ und } P - Q = Q\left(\frac{A}{B} - 1\right),$$

oder, wenn man wieder für A und B die Werthe setzt und gehörig reducirt, auch

$$P - Q = \frac{Qf\left(\frac{l}{R} + \frac{l}{r}\right)}{\operatorname{Cos} \alpha - f\left(\frac{l}{r} + \operatorname{Sin} \alpha\right)}.$$

Setzt man nun, da der Winkel α immer nur klein ist, $\operatorname{Cos} \alpha = 1$, und läfst gegen die Einheit die sehr kleinen Brüche $f\,\frac{l}{r}$ und $f \operatorname{Sin} \alpha$ aus, wodurch der Nenner des vorigen Bruches $= 1$ wird, so hat man auch

$$P - Q = Qf\left(\frac{l}{R} + \frac{l}{r}\right).$$

Ist ferner in der bezeichneten Figur Bog. $AN =$ Bog. an gleich der sogenannten Theilung der Räder, also (§. 211) Bog. $AN = \frac{2R\pi}{m}$ und Bog. $an = \frac{2r\pi}{m'}$, und nimmt man an, dafs (wie es am zweckmäfsigsten ist) der Eingriff zwischen den beiden Zähnen von der Centrilinie, d. i. von dem Puncte A an bis zu jenem N dauert, so kann man ohne Fehler die Normale l dieser

Bögen AN und an gleich, also $l = \frac{2R\pi}{m} = \frac{2r\pi}{m'}$ setzen, und wenn man für diese Normale, welche vom Beginne des Eingriffes der beiden Zähne, bis sie sich auslassen, von Null bis $AM = l$ (wo l die eben angegebenen Werthe hat) zunimmt, ihren mittleren oder halben Werth als constant bleibend in Rechnung nimmt, auch $l = \frac{R\pi}{m}$ und $l = \frac{r\pi}{m'}$, oder $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{m}$ und $\frac{l}{r} = \frac{\pi}{m'}$ annehmen, so, dafs, wenn man diese beiden letztern Werthe oben substituirt, sofort endlich $P - Q = Qf\pi\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$ wird, wie oben angegeben wurde.

Ist z. B. $m = 60$, $m' = 30$ und $f = \frac{1}{10}$, so ist der Betrag der Reibung zwischen den Zähnen der beiden Räder $P - Q = 0{\cdot}0157\ Q$, so dafs für einen Widerstand von $Q = 430$ Pfund und eine Geschwindigkeit der Räder in den Grundkreisen von 1 Fufs, die zur Überwindung dieses Widerstandes nöthige Arbeit nicht mehr als 6·751 F. Pf., d. i. bei Übertragung von einer Pferdekraft nahe $\frac{1}{64}$ Pferdekraft beträgt; bei einer guten und richtig ausgeführten Verzahnung wirkt also die Reibung an den Zähnen weniger durch den Kraftverlust als durch die Abnützung und Formänderung der Zähne nachtheilig.

Anmerkung. 1. Für eine innere Verzahnung wird in der obigen Formel 1 (weil in dem Ausdrucke Bog. $AN = \frac{2R\pi}{m}$, R negativ zu nehmen ist) m negativ und daher $P' = \pi f Q \left(\frac{1}{m'} - \frac{1}{m}\right)$, wobei $m > m'$ ist.

2. Für den Eingriff eines Getriebes in eine Zahstange wird (weil in dem vorigen Ausdrucke $R = \infty$ ist) m unendlich, oder $\frac{1}{m} = o$, folglich $P' = \pi f Q \cdot \frac{1}{m'}$; es ist also in beiden diesen Fällen der Betrag der Reibung kleiner als im ursprünglichen Falle (1.

3. Für Winkel- oder Kegelräder kann man sich ebenfalls der obigen Formel (1, und zwar um so mehr bedienen, als dabei der auf den Umfang des Grundkreises des treibenden Rades reducirte Reibungswiderstand sogar etwas kleiner als bei cylinderischen Rädern ausfällt. So kann man z. B. bei den beiden in einander greifenden Winkelrädern in Fig. 170, bei welchen AI und Ai die Halbmesser der Grundkreise und m, m' die Anzahl ihrer Zähne bezeichnen sollen, den Reibungswiderstand so ansehen, als fände er zwischen den Zähnen der beiden cylinderischen Räder von den Halbmessern CA und cA (auf ihre Grundkreise bezogen) und derselben Theilung Statt, bei welcher also die Zähnezahl M und M' im Verhältnifs von $AI : AC$ und $Ai : Ac$ gröfser als jene m und m', nämlich

$$M = \frac{AC}{AI}\, m \text{ und } M' = \frac{Ac}{Ai}\, m',$$

oder, wenn man die Winkel ASI und ASi (welche in der durch die Achsen der beiden Kegelräder gehenden Ebene liegen) mit a und b bezeichnet, $M = \frac{m}{Cos\, a}$ und $M' = \frac{m'}{Cos\, b}$ ist, so, dafs nach der obigen Formel (1 dieser Widerstand durch $n)$ $P' = \pi f Q \left(\frac{Cos\, a}{m} + \frac{Cos\, b}{m'}\right)$ am Umfange des Grundkreises AI des treibenden Rades gemessen werden kann, welcher offenbar kleiner ist, als wenn die Achsen CS und cS parallel wären, also $a = b = o$ und $Cos\, a = Cos\, b = 1$, wie bei cylinderischen Rädern Statt fände.

Will man anstatt der beiden Winkel a und b lieber jenen $\alpha = a + b$ der beiden Achsen in die Formel bringen, so hat man wegen $m : m' = AI : Ai = Sin\, a : Sin\, b$ auch $m\, Sin\, b = m'\, Sin\, a$, oder $(m\, Sin\, b - m'\, Sin\, a)^2 = o$, d. i. $m^2\, Sin\, b^2 + m'^2\, Sin\, a^2 - 2\, m\, m'\, Sin\, a\, Sin\, b = o$, oder auch
$m^2 (1 - Cos\, b^2) + m'^2 (1 - Cos\, a^2) + 2\, m\, m' (Cos\, \alpha - Cos\, a\, Cos\, b) = o$,
(weil aus $Cos\, \alpha = Cos\, (a + b) = Cos\, a\, Cos\, b - Sin\, a\, Sin\, b$, sofort $Sin\, a\, Sin\, b = Cos\, a\, Cos\, b - Cos\, \alpha$ folgt, und wenn man mit $m^2\, m'^2$ durchaus dividirt:

$$\frac{1}{m'^2}(1 - Cos\, b^2) + \frac{1}{m^2}(1 - Cos\, a^2) + \frac{2}{m\, m'}(Cos\, \alpha - Cos\, a\, Cos\, b) = o \text{ oder}$$

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m'^2} + \frac{2\, Cos\, \alpha}{m\, m'} = \frac{Cos\, a^2}{m^2} + \frac{Cos\, b^2}{m'^2} + \frac{2\, Cos\, a\, Cos\, b}{m\, m'} \left(\frac{Cos\, a}{m} + \frac{Cos\, b}{m'}\right)^2$$

und daher endlich

$$\frac{Cos\, a}{m} + \frac{Cos\, b}{m'} = \sqrt{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m'^2} + \frac{2\, Cos\, \alpha}{m\, m'}\right)},$$

so, dafs, wenn man diesen Werth oben in $n)$ substituirt, auch

$$P' = \pi f Q \sqrt{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m'^2} + \frac{2\, Cos\, \alpha}{m\, m'}\right)} \text{ wird.}$$

Für $\alpha = o$ geht dieser Ausdruck, wie es seyn soll, wieder in jenen (1 für cylinderische Räder mit äufserer, so wie für $\alpha = 180°$ in jenen für innere Verzahnung, wobei er zugleich am kleinsten wird, über.

§. 235. Reibung an den Gewinden einer Schraube ohne Ende. Was den auf den Punct a (Fig. 171) reducirten Reibungswiderstand an den Zähnen und Gewinden der Schraube ohne Ende betrifft, so kann man dafür ohne Fehler denselben Ausdruck $P' = \pi f Q \frac{1}{m}$, wie bei dem Eingriffe eines Getriebes in eine Zahnstange (voriger Paragraph, Anmerkung 2) gelten lassen, wobei m die Anzahl der Zähne im Rade C und Q den auf den Punct a reducirten Widerstand bezeichnet, welcher durch das Rad überwunden werden soll, so, dafs also die Schraube sofort den Widerstand $P' + Q$ zu überwinden hat.

(Die Achsenreibung ist dabei noch eben so wenig, wie bei den frühern Beispielen berücksichtigt.)

§ 236. Reibung eines Cylinders auf seiner Basis. Um die Reibung der Kreisfläche des Zapfens einer stehenden Welle W zu finden, sey $ac = r$ (Fig. 176) der Halbmesser des Zapfens und Q das Gewicht der Welle oder der zwischen der Basis des Zapfens und der Pfanne in der Richtung der Achse Statt findende Druk, folglich fQ der Betrag der Reibung.

Da nun diese Reibung eben so wie der Druck Q auf alle Puncte der Kreisfläche ca gleichförmig vertheilt ist, so kann man die auf einen unendlich schmalen Sector acb der reibenden Kreisfläche vom Mittelpuncte c gegen den Umfang ab kommenden kleinen Reibungen, als lauter auf dem Halbmesser ci senkrecht stehende parallele Kräfte ansehen, deren Summe der Dreiecksfläche acb proportional ist, und deren Resultirende sonach durch den Schwerpunct dieses kleinen Dreieckes, welcher also (§. 48) um $\frac{2}{3}r$ von c gegen i liegt, geht. Da nun dasselbe von allen den rings herum liegenden kleinen Sectoren gilt, welche die Kreisfläche ausmachen, so folgt, dafs man sich die ganze Reibung auf dem einzigen, mit dem Halbmesser $\frac{2}{3}r$ aus c beschriebenen Kreis vereinigt denken kann, wobei man diesen Halbmesser $\frac{2}{3}r$ den Hebelsarm der mittlern Reibung nennt.

Um also die am Umfange des Zapfens nöthige Kraft P' zu finden, welche mit dieser Reibung im Gleichgewichte steht, hat man $rP' = \frac{2}{3}rfQ$, folglich $P' = \frac{2}{3}fQ$ ... (1. Die Arbeit dieser Reibung während einer Umdrehung des Zapfens ist $W = 2r\pi P'$, d. i. $W = \frac{4}{3}r\pi fQ$ ... (2.

Besteht z. B. der Zapfen aus Gufseisen, und läuft dieser auf einer gufseisernen oder stählernen Platte als Unterlage, so ist, wenn gehörig geschmiert wird, $f = \cdot 07$, folglich, wenn etwa $Q = 2000$ Pfund und $r = 2$ Zoll wäre, sofort $W = \frac{4}{3} \times \frac{2}{12} \times 3\cdot14 \times \cdot07 \times 2000 = 97\cdot6$ F. Pf.

§. 237. Drehende oder Zapfenreibung. Liegt der cylinderische Zapfen C (Fig. 177) einer horizontalen Welle in seinem Lager A, nämlich in einem Theile oder Segmente eines hohlen Cylinders von etwas gröfserem Halbmesser, und wird dieser Zapfen um seine Achse C nach der angedeuteten Richtung umgedreht; so entsteht, da derselbe nicht wie auf einer horizontalen Ebene fortrollen kann, sondern nur bis zu einem Puncte m, für welchen die nach der Tangente MF wirkende Seitenkraft der Reibung (welche als eine nach mM wirkende Kraft angesehen werden kann), gleich ist, hinaufsteigt, eine gleitende Reibung, welche sich auf folgende Art bestimmen läfst:

Es sey $R = md$ die Gröfse und Richtung der Resultirenden aus allen auf den Zapfen wirkenden Kräften (wie z. B. die darauf ruhende Last und die Kraft, welche die Welle umdreht), welche in die beiden, auf einander senkrechten Kräfte ma und mb zerlegt, beziehungsweise die Tangentialkraft und den Normaldruck bezeichnen; so ist der Betrag der Reibung

$$P = f \, . \, mb \ldots (1,$$

folglich nach der genannten Bedingung für das Gleichgewicht $f \, . \, mb = ma$, oder $f = \frac{ma}{mb}$. Da aber aus dem rechtwinklichten Dreiecke mbd sofort

$$R = \sqrt{(mb^2 + ma^2)} = mb \sqrt{\left[1 + \left(\frac{ma}{mb}\right)^2\right]} = mb \sqrt{(1 + f^2)},$$

also $mb = \frac{R}{\sqrt{(1 + f^2)}}$ ist, so erhält man auch, wenn dieser Werth in Gleich. (1 substituirt wird, für die Reibung den Ausdruck

$$P = \frac{fR}{\sqrt{(1 + f^2)}} \ldots (2.$$

Da man den Reibungs-Coefficienten f in allen vorkommenden Fällen kleiner als $\frac{1}{3}$ annehmen kann, so ist auch $\sqrt{(1 + f^2)} < \sqrt{(1 + \frac{1}{9})}$, nämlich kleiner als 1·05, so, dafs man in ber Anwendung ohne Fehler $\sqrt{(1 + f^2)} = 1$ setzen kann, in welchem Falle sich aber der vorige Ausdruck (2 auf den einfachern: $P = fR \ldots$ (3 reducirt, gerade so, als ob der Druck R normal auf die Berührungsflächen Statt fände, die Richtung von R nämlich durch den Mittelpunct C ginge.

Ist r der Halbmesser des Zapfens, so ist die bei jeder Umdrehung desselben von der Reibung absorbirte Arbeit:

$$W = 2r\pi \, . \, fR \ldots (4,$$

wenn man nämlich für den Reibungswiderstand den einfachern Ausdruck (3 nimmt.

§. 238. Zapfenreibung am Rad an der Welle.

Sind R, r, r' die Halbmesser des Rades, der Welle und der Zapfen, Q die zu hebende Last, G das Gewicht der Welle sammt allem, was die Zapfen zu tragen haben, und P die ebenfalls lothrecht wirkende Kraft, welche mit der Last Q und der Reibung im Gleichgewichte stehen soll; so ist der Druck auf die Zapfen (wobei man, wie vorhin wieder nur einen in Rechnung bringt) $= Q + G + P$, folglich die Reibung, wenn man Kürze halber $\frac{f}{\sqrt{(1 + f^2)}} = f'$ setzt (§. 237, Gleichung 2) $= f'(Q + G + P)$, und das statische Moment der Reibung (welche am Umfange des Zapfens, also in der Entfernung r' von der Drehachse Statt findet) $= r'f' (Q + G + P)$; für das Gleichgewicht ist also (§. 100) $PR = Qr + r'f' (Q + G + P)$, woraus sofort für die Gesammtkraft

$$P = \frac{Qr + (Q + G)f'}{R - f'r} \ldots (1,$$

folgt, und wobei man in der Regel statt f' den Reibungs-Coefficient f selbst und seinen Werth wieder aus der Tabelle II nehmen kann.

Ohne Reibung wäre (wie in §. 100) wegen $f' = o$ sofort

$$P = \frac{Qr}{R}.$$

Anmerkung. Für die Rolle ist $R = r$, und da man dabei das Gewicht derselben vernachläſsigen oder $G = o$ setzen kann, so folgt aus der vorigen Gleichung (1 dafür

$$P = Q\,\frac{r + fr'}{r - fr'}, \text{ oder genau genug } P = \left(1 + 2f\frac{r'}{r}\right) \ldots (2,$$

so, daſs also die Gröſse der Reibung $P - Q = \frac{2r'}{r} fQ$ ist.

§. 239. Zapfenreibung beim Flaschenzug.

Ist D der Durchmesser der sämmtlichen Rollen (Fig. 76, 3) in der Kehle oder dem Schnurlauf, so wie d die Dicke ihrer Zapfen, so ist nach der vorigen Gleichung (2, wenn man Kürze halber $1 + 2f\frac{d}{D} = m$ .. (1 setzt, die Kraft, welche an einer Rolle mit der Last Q' und der Reibung im Gleichgewichte steht $p = mQ'$.

Sind die Spannungen der Schnüre von der ersten, an der festen oder unbeweglichen Flasche befestigten, bis zur letzten, woran die Kraft P wirkt, der Reihe nach $t_1, t_2 \ldots t_{n+1}$ für n Rollen oder tragende Schnüre; so ist also $t_2 = mt_1$, $t_3 = mt_2 = m^2 t_1$,

$$t_4 = mt_3 = m^3 t_1 \ldots t_{n+1} = P = m^n t_1 \ldots (a.$$

Die Last Q (das Gewicht der untern oder beweglichen Flasche, sammt ihren Rollen mitbegriffen) ist gleich der Summe aus allen Spannungen der tragenden Schnüren, also:

$$Q = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = t_1 (1 + m + m^2 + \ldots + m^{n-1}) = t_1 \frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

Wird die vorige Gleichung (a durch diese letztere dividirt, so erhält man, wenn dann gleich mit Q multiplicirt wird, für die nöthige Kraft mit Rücksicht auf die Zapfenreibung:

$$P = \frac{Q m^n (m - 1)}{m^n - 1} \ldots (2.$$

Sind z. B. 6 Rollen, also eben so viele tragende Schnüre vorhanden, hat ferner jede Rolle einen Durchmesser von 10 Zoll, und jeder Zapfen eine Dicke von $1\frac{3}{4}$ Zoll, und setzt, da hier nur selten eingeschmiert wird, $f = \cdot 15$; so wird, wegen $n = 6$, $D = 10$, $d = 1\frac{3}{4}$, folglich $m = 1 + \cdot 30 \times \frac{7}{40} = 1\cdot 052$ und $m^n = (1\cdot 052)^6 = 1\cdot 355$, sofort nach der vorigen Formel (2 sehr nahe $P = \cdot 2\, Q$ oder $P = \frac{1}{5}\, Q$, während ohne diese Zapfenreibung nur $P = \frac{1}{6}\, Q$ seyn dürfte, so, dafs also bei diesem Flaschenzug die Achsenreibung eine Kraft von $\frac{1}{30}\, Q$ oder $3\frac{1}{3}$ Procent der Last absorbirt. Uebrigens mufs, wie wir weiter unten sehen werden, wegen der Steifheit der Seile oder Schnüre auch diese Kraft $\frac{1}{5}\, Q$ noch weiter vergröfsert werden.

§. 240. Reibung eines Seiles über einen Cylinder. Es sey ein Seil, an dessen einem Ende die Last Q hängt, über einen horizontal liegenden, nicht drehbaren Cylinder C (Fig. 179) vom Halbmesser r, und zwar über den Bogen Aab geschlagen, und es soll eine an dem andern Ende desselben wirkende Kraft P sowohl die Last Q als auch die Reibung, welche das Seil auf dem genannten Bogen des Cylinders erleidet, überwinden.

Theilt man zur Bestimmung dieser Kraft P den Bogen Aab in sehr viele gleiche Theile und zieht in den Theilungspuncten A, a, b... die Tangenten, welche sich in den Puncten m, n... schneiden; so ist die Spannung des Seils nach $mA = Q$, jene t_1 von m nach n ist $= Q +$ der Reibung, welche das Seil über den kleinen Bogen Aa erfährt, es ist nämlich $t_1 = Q + fp$, wenn f der Reibungscoefficient und p der Normaldruck des Seils gegen den Bogen Aa ist. Es ist aber, wenn man das Parallelogramm Amh ergänzt, wobei $ma = mA$ ist, sofort $p = mh$, wenn man $mA = ma$ für Q nimmt; da aber die Dreiecke mAh und AaC ähnlich sind, so folgt $Am : mh = Ac : Aa$ oder $Q : p = r : s$ (wenn man den erwähnten sehr kleinen Bogen Aa, welchen man mit seiner Sehne verwechseln darf, $= s$ setzt), und daraus folgt $p = \frac{Qs}{r}$, so, dafs also

$$t_1 = Q + f\frac{Qs}{r} = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)$$

wird.

Eben so findet man für die Spannung des Seils in der folgenden Tangente nb: $t_2 = t_1\left(1 + \frac{fs}{r}\right) = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^2$, wenn man nämlich für t_1 substituirt; dann wieder $t_3 = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^3$ u. s. f., also, wenn man den Bogen Aab in n gleiche sehr kleine oder Elementarbögen s getheilt hat; $t_n = P = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^n$.

Ist S die Gröfse des von dem Seile umspannten Bogens, also $S = ns = ri$, wenn i den entsprechenden Mittelpunctswinkel dieses Bogens S bezeichnet, so läfst sich in der Voraussetzung, dafs s unendlich klein, also n unendlich grofs ist, diese letztere Formel auf die Form

$$P = Q\, e^{fi} \ldots (1$$

bringen, wenn $e = 2 \cdot 71828$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist.

Wird das Seil n Mal um den Cylinder geschlagen, so ist $i = 2\, n\, \pi$ und daher

$$P = Q\, e^{2\, n\, \pi\, f} \ldots (2,$$

wobei also die Dicke des Cylinders keinen Einflufs hat.

§. 241. Wälzende oder rollende Reibung.

Aus den hierüber angestellten Versuchen ergibt sich, dafs die wälzende Reibung sehr nahe dem Drucke direct und dem Durchmesser der Walze oder Rolle verkehrt proportional ist. Haben nämlich zwei Walzen oder Rollen die Halbmesser r und r', werden diese mit den Gewichten Q und Q' gegen die Unterlagen gedrückt und sind F und F' die entsprechenden Reibungs- oder Wälzungswiderstände; so ist $F : F' = \frac{Q}{r} : \frac{Q'}{r'}$. Ist dann für irgend einen Werth von Q' und r' die Reibung F' durch Versuche gefunden und setzt man $\frac{F' r'}{Q'} = f'$; so ist $F = f' \frac{Q}{r}$ die Reibung zwischen denselben Körpern, bei beliebigen Werthen von Q und r.

Was den Reibungs-Coefficienten f' betrifft, so ist dieser, wenn r in Wiener Zoll ausgedrückt wird, für Walzen aus Guajak- auf Eichenholz $= \frac{1}{54}$ und für Walzen aus Ulmenholz, welche auf einer eichenen Unterlage rollen, $= \frac{1}{32}$.

§. 242. Frictionsrollen.

Zur Verminderung der gleitenden Reibung und um diese zum Theil in eine wälzende zu verwandeln, benützt man sehr oft dte sogenannten Frictionsrollen, deren Anwendung durch folgende Beispiele erläutert werden soll.

1. Anstatt z. B. das Prisma A (Fig. 180), welches in einer Maschine (z. B. der Wagen in einer Metallhobelmaschine) zur hin- und hergehenden horizontalen Bewegung bestimmt seyn kann, unmittelbar auf seiner festen Unterlage B gleiten zu lassen, bringt man kleine Rollen C. wovon hier nur eine (welche auch, wie bei den Wellzapfen in §. 238, für die Rechnung hinreicht) angedeutet ist, so an, dafs sich diese, als feste Rollen, nur um ihre Achsen, welche senkrecht auf die Richtung

der hin- und hergehenden Bewegung von A gelegt werden, umdrehen und das darauf ruhende Prisma A nach der Tangente der Rollen bewegt.

Ist Q der Druck zwischen A und C, R der Halbmesser der Rolle und r jener des Zapfens, so ist die Reibung in der Pfanne $= fQ$ und ihr statisches Moment $= rfQ$. Ist nun zur Überwindung derselben in C nach der Tangente die Kraft F nöthig, so ist

$$RF = rfQ \text{ oder } F = \frac{r}{R} fQ \ldots (m,$$

während ohne diese Rolle zur Überwindung der entstehenden gleitenden Reibung von A auf B eine Kraft $F' = fQ$ nothwendig wäre; es wird also durch die Anwendung von Frictionsrollen (selbst, wenn man für f in beiden Fällen dieselben Werthe gelten läfst, obschon sie im erstern Falle bei der drehenden Reibung, auch schon, weil man die Schmiere leichter erneuern kann, immer etwas kleiner sind) die Reibung im Verhältnifs der Durchmesser der Rollen zur Dicke der Zapfen vermindert.

Anmerkung. Befindet sich am Umfange der Rolle, z. B. in a eine Erhöhung oder sonstiges Hindernifs, so mufs bei der hier angenommenen Bewegung die Last Q durch eine in der Richtung des Prisma A wirkende Kraft k, mit Hilfe der zwischen dem Prisma A und dem Hindernifs a Statt findenden Reibung $f'Q$, um die Höhe dieses Hindernisses ba gehoben werden, so dafs es im ersten Augenblicke, wo a mit dem Prisma zur Berührung kommt, gerade so ist, als ob die Kraft K an den Arm CA des um c drehbaren Winkel-Hebel ACD angebracht wäre, an dessen zweiten, auf dem erstern perpendikulären Arm CD in D die Last Q lothrecht abwärts entgegenwirkt, so, dafs also $k \,.\, CA = Q \,.\, CD$, oder wenn man $CD = Aa = l$ und $ba = h$ setzt, sofort

$$k = Q\frac{l}{R} = Q\sqrt{\frac{l^2}{R^2}} = Q\sqrt{\frac{h(h+2R)}{R^2}} = \sqrt{\frac{2Rh}{R^2}},$$

d. i. endlich $k = Q\sqrt{\frac{2h}{R}} \ldots (m$ wird, wenn man die immer nur kleine Gröfse h gegen $2R$ in der Summe $h + 2R$ ausläfst.

Die gesammte nöthige Kraft ist daher $P = F + k = \frac{r}{R} fQ + Q\sqrt{\frac{2h}{R}}$ oder, wenn das Gewicht q der Rolle dabei berücksichtigenswerth wäre:

$$P = \frac{r}{R} f(Q+q) + Q\sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

§. **243.** 2. Ruht der Zapfen C (Fig. 181) einer Welle, anstatt auf einer festen Unterlage, auf den Rollen A, A', welche sich um ihre Achsen drehen können; so entsteht, wenn man den in der Richtung CD Statt findenden Druck Q des Zapfens C in die zwei Normaldrücke $Ca = q$ und $Ca' = q'$, welche durch die Achsen der Rollen gehen, zerlegt, die Reibung an der Rolle A nach der vorigen Formel (*m*, wenn R und r wieder dieselbe Bedeutung haben, $\frac{r}{R} f q$, und eben so an der Rolle A', wenn R' und r' die Halbmesser der Rolle und des Zapfens sind, $\frac{r'}{R'} f q'$, so, dafs also die gesammte Reibung

$$F = f\left(\frac{r}{R} q + \frac{r'}{R'} q'\right) \ldots (n \text{ ist.}$$

Sind, wie gewöhnlich, die Rollen gleich grofs, also $R' = R$, $r' = r$, und ist auch $q' = q$; so wird einfacher $F = 2\,\frac{r}{R} f q$, während die Reibung des Zapfens C in einer Pfanne, oder wenn die Rollen keine Achsendrehung hätten: $F' = 2 f q$, also im Verhältnifs von $r : R$ gröfser wäre.

Gleichwohl wendet man in solchen Fällen die Frictionsrollen, da sie zu complicirt und zu wenig solid sind, im Maschinenbaue fast niemals an, und begnügt sich, die Zapfen bei gehöriger Ausführung in festen Pfannen laufen zu lassen.

§. 244. 3. Auf dieselbe Art findet man auch die zur Fortschaffung einer auf einem Wagen liegenden Last nöthige Zugkraft, wenn die Rollen, indem sie sich um ihre Achsen drehen, gleichzeitig, wie diefs bei den Wagenrädern der Fall ist, auf einer festen horizontalen Ebene fortrollen. Betrachtet man wieder nur ein einziges Rad, setzt die auf dessen Achse ruhende Last $= Q$, dessen eigenes Gewicht $= q$, und die parallel zu dem festen, ebenen Boden, also horizontal durch die Radachse wirkende Zugkraft $= F$; so ist mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung und Berücksichtigung zugleich der rollenden Reibung (§. 241)

$$F = f' \,\frac{(Q + q)}{R} + \frac{r}{R} f Q \ldots (s.$$

(Das Weitere siehe in den Zusätzen über F u h r w e r k e.)

§. 245. Der Prony'sche Zaum. Um schliefslich noch von der Reibung eine Anwendung zu zeigen, wollen wir den von Prony angegebenen Apparat zur Bestimmung der Leistungsfähigkeit eines Wasserrades, einer Dampfmaschine u. s. w. hier erklären.

Ist C (Fig. 183) die horizontale Welle des Wasserrades oder Schwungrades der Dampfmaschine u. s. w., so umgibt man einen Theil derselben, welcher entweder schon cylindrisch ist, oder durch Anbringung eines concentrischen Ringes für den Versuch so hergestellt wird, mit einem aus einem Balken oder Hebel AB und einem darüber liegenden und mit Schraubenbolzen daran befestigten hölzernen Deckel oder

Sattel DE bestehenden Zaum oder Bremsdynamometer in der Art, dafs man durch Anziehen oder Nachlassen der Schraubenmuttern a, a, die Reibung des Zapfens C in dieser dadurch entstehenden hölzernen Pfanne beliebig vergröfsern oder vermindern kann. Die dadurch an dem Umfange der Welle C erzeugte Reibung kann als eine Last Q angesehen werden, welche an einer um diese Welle sich aufwickelnden Schnur hängt, so, dafs man also durch das genannte mehr oder weniger Anziehen der Schrauben, diese Last Q beliebig vergröfsern oder verkleinern kann.

Hat man daher bei dem Versuche, bei welchem die Welle C die normale Geschwindigkeit erlangt haben soll, in die in A aufgehangene Wagschale so lange Gewichte aufgelegt, und die Schraubenmutter a, a durch beständiges Reguliren so angezogen, dafs der Hebel AB (kleine Oscillationen abgerechnet) dabei horizontal bleibt, so hat sich die Last oder Reibung Q mit der Kraft P in's Gleichgewicht gestellt, und es ist, wenn $Cb = r$ der Halbmesser der Welle, und $CF = l$ die Länge des Hebels, an dessen Endpunct A das Gewicht P (das auf diesem Puncte A auf die im §. 78 angegebene practische Weise reducirte Gewicht des Hebels und das der Wagschale mit eingerechnet) aufgehängt ist, sofort $Qr = Pl$. Dreht sich nun die Welle beim normalen Gange des Rades oder der Maschine per Secunde n Mal um, so ist die Arbeit der Reibung, also auch jene des Motors, während einer Secunde $= Q . 2r\pi . n$, oder in Pferdekräften ausgedrückt, wenn die Anzahl derselben $= N$ ist (§. 178): $2\pi n Q r = 430 N$, und wenn man für Qr den Werth aus der vorigen Gleichung setzt, auch $2\pi n P l = 430 N$, woraus sofort $N = \frac{n\pi P l}{215} = {\cdot}0146\, n P l \ldots (1$ folgt, wobei man aber P in Pfunden und l in Fufsen substituiren mufs.

Macht z. B. beim normalen Gange, also auch während des Versuches (worauf man dabei sehen mufs) die Welle 15 Umdrehungen in einer Minute, und beträgt dabei das auf den 10 Fufs langen Hebel oder Balken auf den Punct A reducirte und aufgehängte Gewicht 10 Centner: so ist

$$n = \tfrac{15}{60} = \tfrac{1}{4},\ P = 1000,\ l = 10,$$

folglich nach der obigen Formel (1

$$N = {\cdot}0146 \times \tfrac{1}{4} \times 1000 \times 10 = 36{\cdot}5,$$

so, dafs man also (vorausgesetzt, dafs der Versuch durch längere Zeit gedauert hat) die Leistungsfähigkeit des betreffenden Motors zu $36\frac{1}{2}$ Maschinen-Pferdekraft annehmen kann.

§. 246. Unbiegsamkeit oder Steifheit der Seile. Bei einem über eine Rolle gelegten Seile würden die beiden lothrecht herabhängenden Seilstücke zu einander genau parallel seyn, wenn dasselbe vollkommen biegsam wäre, und wenn an einem Ende die Last Q, am andern die Kraft P angebracht wäre, so würde, da die Reibung des Seils auf den Umfang der Rolle kein Gleiten zuläfst, diese letztere um ihre Achse gedreht, und das Ganze (wie in §. 95 bemerkt) als ein gleicharmiger Hebel, dessen Arme $= r + \frac{1}{2} d$ sind, wenn r der Halbmesser der Rolle und d die Dicke des Seils ist, anzusehen, also für das statische und dynamische Gleichgewicht

$$P(r + \tfrac{1}{2} d) = Q(r + \tfrac{1}{2} d), \text{ d. i. } P = Q \text{ seyn.}$$

Da jedoch wegen der Steifheit des Seils eine gewisse Kraft nothwendig ist, um das gerade Seil zu biegen (streng genommen ist auch eine kleine Kraft erforderlich, das gebogene Seil wieder gerade zu richten, allein diese kann vernachläfsigt, oder besser gleich in die erstere mit eingerechnet werden), so werden die Seilstücke nicht diese parallele, sondern beiläufig die in Fig. 184 dargestellte Lage annehmen, wodurch also der Hebelarm CB der Last Q gröfser als jener CA der Kraft P wird. Setzt man den letztern, d. i. den Halbmesser der Rolle um die halbe Seildicke vermehrt, einfach $=$ r, und $CB - CA = x$, d. i. $CB = r + x$; so ist für's Gleichgewicht $Q(r + x) = Pr$, also offenbar $P > Q$; setzt man daher $P = Q + F$, so ist F der aus der unvollkommenen Biegsamkeit des Seils entspringende Widerstand und aus der Gleichung $Q(r + x) = (Q + F)r$, sofort

$$F = \frac{Qx}{r} \ldots (1.$$

Aus den zur Bestimmung der Gröfse x vorgenommenen Versuchen geht hervor, dafs die Unbiegsamkeit der Seile, der Spannung gerade und dem Durchmesser der Rolle verkehrt, so wie auch bei neuen Seilen der 2ten, bei mehr gebrauchten der $\frac{3}{2}$, und bei ganz dünnen Schnüren oder Bändern der ersten Potenz der Dicke des Seiles gerade proportional seyen, so, dafs, wenn wieder d die Dicke des Seiles, r der Halbmesser der Rolle oder des Cylinders, um welchen es geschlagen wird, Q die Spannung und k ein Erfahrungscoefficient ist, sofort für neue Seile $F = kd^2 \frac{Q}{r}$, für schon gebrauchte $F = kd^{\frac{3}{2}} \frac{Q}{r}$, und für ganz dünne Schnüre $F = kd \frac{Q}{r}$ ist.

Da aus der obigen Gleichung (1 $x = \frac{r}{Q} F$ folgt, so erhält man, wenn für F diese Werthe substituirt werden, die Vergröfserung x des Hebelarmes, woran die Last Q hängt, indem man für neue Seile das

Quadrat der Dicke des Seils mit dem Erfahrungscoefficienten k multiplicirt; in den übrigen beiden Fällen mufs man k beziehungsweise mit $d^{\frac{3}{2}}$ und d multipliciren.

Werden d und r in Wiener Zollen ausgedrückt, so kann man den Versuchen zu Folge ganz einfach $k = \frac{1}{2}$ setzen.

Beispiel. Ist ein 2 Zoll dickes Seil über eine Rolle von 18 Zoll Durchmesser gelegt, um damit eine Last von 500 Pfund aufzuziehen, so ist $r = 9 + 1 = 10$ und die Vergröfserung des Hebelarmes der Last (für ein neues Seil) $x = \frac{1}{2} . 4 = 2$, daher ist $500 \times 12 = P \times 10$ oder $P = 600$ Pfd. Bei vollkommener Biegsamkeit des Seils dürfte P nur $= 500$ Pfund seyn, so, dafs also der Widerstand, welcher von der Steifheit des Seils herrührt, nach dieser Annahme 100 Pfund beträgt.

Für ein gebrauchtes Seil und eine dünne Schnur, oder ein dünnes (wenn auch breites) Band, wäre dieser Widerstand nach den angegebenen Formeln beziehungsweise (wegen $x = 1{\cdot}41$ und $= 1$) $70\frac{1}{2}$ und 50 Pfund.

Anmerkung Für die gewöhnlich vorkommenden Fälle, in welchen das Seil schon gebraucht ist, kann man, wenn d die Dicke des Seiles und D der Durchmesser der Rolle, beides in Wiener Zollen ausgedrückt bezeichnet, genau genug $\frac{P}{Q} = 1 + {\cdot}684\,\frac{d^2}{D}$, also $F = P - Q = {\cdot}684\,\frac{d^2}{D}\,Q$ setzen, woraus auch, wenn man das Verhältnifs $\frac{P}{Q} = k$ setzt, $\frac{D}{d} = \frac{{\cdot}684\,d}{k - 1}$ folgt, so dafs man aus dieser Relation den Durchmesser D der Rolle bestimmen kann wenn d und k gegeben sind. Müfste z. B. für irgend einen Fall das Seil zwei Zoll dick seyn, und wollte man für die Steifheit des Seils nur 4 Procent von der Last Q zugeben; so würde wegen $d = 2$ und $P = 1{\cdot}04\,Q$ sofort $\frac{D}{d} = 34{\cdot}2$, also $D = 68{\cdot}4$ Zoll. Gestattet man dagegen 8 Procent, so darf die Rolle nur halb so grofs seyn u. s. w.

§. 247. Steifheit des Seiles beim Rad an der Welle. Um aufser der Achsenreibung auch noch diesen Widerstand in Rechnung zu bringen, mufs man in der Gleich. (1 des §. 238 statt r setzen $r + \frac{1}{2}d^2$, wenn man nämlich, um ganz sicher zu gehen, den ungünstigsten Fall (d. i. ein neues Seil) voraussetzt. Dadurch wird mit Rücksicht auf alle Nebenhindernisse, die nöthige Kraft:

$$P = \frac{Q(\;\; + \frac{1}{2}d) + (Q + G) f r'}{R - f r'}.$$

(Ein Beispiel hiezu siehe in den Zusätzen.)

§. 248. Steifheit des Seiles beim Flaschenzuge. Um diesen Widerstand beim Flaschenzug in Rechnung zu bringen, mufs man in §. 239, wenn man die dortigen Bezeichnungen auch hier beibehält, dagegen die Dicke des Seiles $= \delta$ setzt, nicht bloſs $t_2 = m t_1$, sondern (wenn man $k = \frac{1}{2}$ setzt)

$$t_2 = m t_1 + k \delta^2 \frac{t_1}{\frac{1}{2} D} = t_1 \left(m + \frac{\delta}{D}\right), \text{ d. i. } m + \frac{\delta^2}{D} \text{ statt } m \text{ setzen.}$$

Da nun dasselbe durchaus geschieht, so verwandelt sich die Gleichung (2 des §. 239, mit Rücksicht auf den hier bezeichneten Widerstand, und wenn man Kürze halber

$$m + \frac{\delta^2}{D} = 1 + 2f\frac{d}{D} + \frac{\delta^2}{D} = M$$

setzt, in die folgende:

$$P = \frac{M^n (M - 1)}{M^n - 1} Q.$$

So wäre für das im genannten Paragraphe gewählte Beispiel, wo $D = 10$, $\delta = 1\frac{3}{4}$, $n = 6$ und $f = \cdot 15$ angenommen wurde, für ein 1 Zoll dickes Seil, also für $\delta = 1$ sofort $M = 1{\cdot}152$ und $M^n = 2{\cdot}337$, folglich $P = \cdot 2657\ Q$ oder nahe $P = \frac{4}{15}\ Q = \frac{1}{3{\cdot}75}\ Q$, so daſs durch die Steifheit des Seiles allein eine Kraft von $\left(\frac{1}{3{\cdot}75} - \frac{1}{5}\right) Q = \frac{1}{15}\ Q$ oder $6\frac{2}{3}$ Procent der Last, welche mithin doppelt so groſs als jene ist, welche für die Zapfenreibung nöthig war, erschöpft wird; mit dieser zusammen beträgt der Mehraufwand an Kraft (da sonst $P = \frac{1}{6}\ Q$ wäre) nahe $\frac{1}{30} + \frac{1}{15}$, d. i. $\frac{1}{10}\ Q$ oder 10 Procent der Last.

Anmerkung. Da man unter den hier gemachten Vorausetzungen für 10 Rollen nahe $P = \frac{1}{5}\ Q$, für 16 Rollen $P = \frac{1}{6}\ Q$ und selbst für unendlich viele Rollen nur $P = (M - 1)\ Q$ oder nahe $\frac{1}{7}\ Q$ findet; so sieht man, wie wenig durch die Vermehrung der Rollen (wegen den wachsenden Hindernissen) zu gewinnen ist.

§. 249. Steifheit der Ketten. Wickelt sich eine Kette von passender Construction um einen Cylinder C (Fig. 185) vom Halbmesser R, so bringt die Reibung in den Bolzen, deren Halbmesser wir mit r bezeichnen wollen, eine ähnliche Wirkung, wie die Unbiegsamkeit der Seile hervor.

Ist Q die Spannung der Kette, und f der Reibungscoefficient für die Bolzen, so ist fQ die Reibung, und da bei einer Umdrehung des Cylinders oder der Rolle C um einen beliebigen Winkel $aCb = i$ das Kettenglied um seinen Bolzen o denselben Winkel bod beschreibt, so ist, wenn p die Kraft bezeichnet, welche die Steifheit der Kette überwindet, bei einer kleinen Umdrehung der Rolle, nach dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 119), da Ri und ri die gleichzeitigen Wege der Kraft und Last sind: $p \,.\, Ri = fQ \,.\, ri$, und daraus

$p = \frac{r}{R} f Q$; da man aber denselben Widerstand auch auf der andern Seite, um die Glieder wieder aufzubiegen, annehmen kann, so läſst sich der gesammte Widerstand durch $F = \frac{2r}{R} f Q$ ausdrücken.

Zehntes Kapitel.

Von der Festigkeit der Materialien.

§. **250. Erklärung.** Unter der Festigkeit eines Körpers versteht man diejenige Kraft, mit welcher er dem Zerreiſsen, Zerbrechen, Zerdrücken oder Verdrehen, also überhaupt der Trennung seiner Theilchen widersteht, und zwar heiſst diese in den genannten Fällen beziehungsweise seine absolute, relative, rückwirkende und Drehungs- oder Torsionsfestigkeit.

Es ist für die Anwendung von groſser Wichtigkeit, die Festigkeit der Maschinenbestandtheile oder der Materialien, woraus sie hergestellt werden, bestimmen zu können, um ihnen, ohne einen unnützen Aufwand an Materiale herbeizuführen, die nöthige Stärke zu geben.

In der Regel erleiden die Körper vor der Trennung ihrer Theilchen eine mehr oder weniger merkbare Formänderung, nämlich eine Drehung, Biegung u. s. w. Wären die Körper vollkommen elastisch, so würde jede solche Formänderung, nach Beseitigung der äuſsern Einwirkung sogleich wieder verschwinden; allein dieses findet bei allen uns bekannten Körpern nur bis zu einer gewissen Grenze (der Elasticitätsgrenze) Statt. Das Maſs der gröſsten Kraft, welche ein Körper auszuhalten vermag, ohne daſs dadurch noch eine bleibende Ausdehnung, Biegung u. s. w. hervorgebracht wird, bezeichnet seine Elasticitätsgrenze; diejenige Kraft hingegen, welche um den kleinsten Theil vermehrt, eine Trennung der Theile bewirkt, also gleichsam mit der Festigkeit des Körpers im Gleichgewichte steht, gibt das Maſs für die Festigkeit desselben an.

Absolute Festigkeit.

§. **251. Maſs dieser Festigkeit.** Nach den zahlreich angestellten Versuchen, steht unter übrigens gleichen Umständen und der Voraussetzung, daſs die zerreiſsenden Kräfte nach der Län-