Achtes Kapitel.

Von der Verzahnung.

§. 207. Zweck und Bedingungen der Verzahnung. Um eine kreisförmige Bewegung in eine ähnliche oder auch geradlinige zu verwandeln, bedient man sich gewöhnlich der verzahnten Räder oder Stangen (§. 103); dabei erhalten die Zähne, je nach den verschiedenen Bedingungen, auch verschiedene Formen. Die gewöhnliche Bedingung, welche man macht, ist die, dafs die Kraft, welche an dem einen Rade wirkt, mit der Last oder dem Widerstand an dem andern Rade beständig im Gleichgewicht stehen, oder die Kraft stets mit gleicher Stärke auf das zweite Rad übertragen werden solle, und dafs, wenn das eine Rad mit gleichförmiger Geschwindigkeit umgedreht wird, auch das zweite Rad eine eben solche Bewegung annehme. Diese Bedingungen würden aber in aller Strenge und ganz einfach erfüllt werden, wenn die Umfänge der unverzahnten (oder gleichsam mit unendlich kleinen Zähnen versehenen) Räder, gegen einander geprefst, sich gegenseitig durch die blofse Reibung (§. 102), ohne über einander zu gleiten, mitnehmen könnten, indem dann durch die gleichförmige Umdrehung des Rades C (Fig. 156) um seine Achse durch eine in A wirkende Kraft P, das zweite Rad, welches im Berührungspuncte a einen constanten Widerstand $= P$ verursacht, ebenfalls um seine Achse gleichförmig umgedreht würde.

Die Form der Zähne mufs also so gewählt werden, dafs die Bewegung der beiden verzahnten Räder eben so, wie durch einfache Berührung der Umfänge der unverzahnten Räder Statt findet.

§. 208. Erklärungen. Laufen die Achsen C und c (Fig. 157) der beiden verzahnten Räder mit einander parallel und bewegen sich die Räder durch das Ineinandergreifen ihrer Zähne eben so, als ob sich die beiden Kreise von den Halbmessern Ca und ca unmittelbar berührten, wobei noch, wie sich zeigen wird, $Ca : ca = m : n$ Statt findet, wenn m und n die Anzahl der Zähne im Rade C und in jenem c bezeichnen; so heifsen diese beiden Berührungskreise die primitiven oder mechanischen oder Grund- oder auch, weil man auf ihnen die Eintheilung der Zähne vornimmt, die Theilkreise oder Theilrisse.

Sind die Zähne, so wie die Zeichnung zeigt, gebildet, so wird der über dem Theilrifs hervorragende abgerundete Theil $e\,b\,e'$ der Kopf, und der nach einwärts gegen den Mittelpunct gerichtete gerade Theil $e\,e'\,g\,g'$ die Flanke, öfter auch die Brust oder Wurzel des Zahnes genannt; endlich heifst (wie bereits in §. 103 erwähnt) von zwei verzahnten Rädern, die hier insbesondere, weil die Zähne auf den äufsern Umfängen radial angebracht sind, Stirnräder, sonst aber, wenn die Zähne oder Kämme auf den Kreisebenen senkrecht stehen, Kron- oder Kammräder genannt werden, das kleinere davon gewöhnlich das Getrieb. Auch wird in dem hier angenommenen Falle die Verzahnung eine Cylinderverzahnung genannt, während, wenn die Achsen der beiden in einander greifenden Räder nicht parallel laufen, sondern einen Winkel bilden, die Kegelverzahnung und dabei die Kegel-, conischen oder Winkelräder angewendet werden.

§. 209. Um nun zu sehen, wovon die obigen Bedingungen, nämlich, dafs die von einem Rad auf das andere zu übertragenden Pressungen constant, und die Bewegung gleichförmig sey, abhängen, so seyen C und c (Fig. 158) die Mittelpuncte der beiden Räder (d. h. die Puncte, durch welche die auf den Kreisebenen senkrecht stehenden Achsen gehen), CA und cA die Halbmesser der primitiven oder Theilkreise und NO und no zwei steife, mit diesen Kreisen fest verbundene krumme Linien von der Art, dafs durch die beständige Berührung dieser Curven, wobei der Druck im Berührungspuncte fortwährend in der Richtung der Normale beider Curven Statt findet, die Bewegung des Rades C auf jenes c in der erwähnten Weise übertragen werde. Es sey P die im Theilkreise zur Bewegung des Rades C nöthige Kraft und P' der durch die Mittheilung der Bewegung erzeugte Widerstand oder Gegendruck von Seite des zweiten Rades c, welchen man sich ebenfalls auf den Umfang des Theilkreises wirksam oder reducirt denkt; so ist, wenn man aus C und c auf die durch den Berührungspunct M beider Curven gehenden Normale Dd die Perpendikel CD und cd zieht, der im Puncte M Statt findende Druck von Seite der bewegenden Kraft P gleich dem von P auf D reducirten Druck; heifst dieser p, so ist

$$P : p = CD : CE = CD : CA \ldots (n.$$

Dieser auf die Curve no übertragene Druck p bringt nach der Voraussetzung auf der Peripherie An den Druck P' hervor, und da $p : P' = cA : cd$ ist, so erhält man durch Zusammensetzung dieser beiden Proportionen $P : P' = CD\,.\,cA : CA\,.\,cd$, oder wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke CBD und cBd, woraus $CD : cd = CB : cB$ folgt, auch $P : P' = CB\,.\,cA : CA\,.\,cB$.

Sollen aber die Räder so, wie durch die blofse Berührung der beiden primitiven oder Grundkreise geführt werden, also der Widerstand und die Kraft immer gleich grofs, d.i. $P' = P$ seyn, so mufs (zu Folge dieser letzten Proportion) sofort

$$CB \,.\, cA = CA \,.\, cB, \quad \text{d. i.} \quad CA : CB = cA : cB$$

Statt finden, eine Bedingung, welche nur möglich ist, wenn der Punct B mit jenem A zusammenfällt, d.h. wenn die Normale Dd fortwährend durch den Berührungspunct A der beiden Grundkreise geht. Liegt B zwischen c und A, so ist $P' < P$, liegt dagegen B zwischen A und C, so ist umgekehrt $P' > P$. Da nun bei der Anwendung einer solchen Verzahnung mit ganz willkürlichen Curven NO und no der Punct B bald zwischen C und A, bald zwischen A und c fällt; so würde in der Wirkung der bewegenden Kraft bei Übertragung des Widerstandes von einem Rad auf das andere eine Ungleichförmigkeit eintreten, welche man zu vermeiden suchen mufs.

§. 210. Durch die Anwendung aber von solchen Curven, für welche die gemeinschaftliche, durch den Berührungspunct M der Curven gehende Normale beständig durch den Berührungspunct A der beiden Grundkreise geht, wird auch die zweite der oben gemachten Bedingungen in Beziehung auf gleiche Umfangsgeschwindigkeiten der beiden Räder erfüllt; denn sind V und v die Umfangsgeschwindigkeiten der Grundkreise CA und cA und ist V' die Geschwindigkeit des Punctes D, so ist $V : V' = CA : CD$, und weil V' zugleich auch die Geschwindigkeit des Punctes d ist, auch $V' : v = cd : cA$, folglich, wenn man diese Proportionen zusammensetzt,

$$V : v = CA \,.\, cd : CD \,.\, cA,$$

geht aber, wie vorausgesetzt wird, die Normale Dd durch den Punct A, so ist $CD : cd = CA : cA$ oder $CD \,.\, cA = cd \,.\, CA$, folglich ist auch $V = v$ gerade so, als ob die Bewegung der Räder durch die einfache Berührung der Grundkreise bewirkt worden wäre.

§. 211. Bestimmung der Krümmung der Zähne. Es ist leicht einzusehen, dafs man von den beiden Curven NO und no die eine ganz beliebig wählen kann, wenn man dann die andere nur so annimmt, dafs (zu Folge der beiden vorhergehenden Paragraphen) die in jeder Position durch den Berührungspunct beider Zähne gezogene gemeinschaftliche Normale beständig durch den Berührungspunct der beiden Grundkreise geht. Denn ist ONE (Fig. 159) eine beliebige Curve für die Zähne des Rades C, ferner NA die Entfernung von einem Zahnmittel bis zum nächst folgenden (die sogenannte Theilung), und Bogen An (auf dem Theilkreis des zweiten Rades) = Bogen AN, so handelt es sich um die Auffindung einer durch n gehenden Curve nMo, welche bei beständiger Berührung mit der erstern Curve OME von dieser nach den obigen Bedingungen fortgeführt wird. Zieht man also (da diese immer durch A gehen soll) durch den Punct A die Normale AM an die Curve ONE, so mufs diese Gerade zugleich auch eine Normale für die gesuchte Curve nMo im Berührungspuncte M bilden. (Man erhält diese Normale, indem man aus A einen Kreisbogen beschreibt, welcher die Curve ONE in zwei sehr nahe beisammen liegenden Puncten durchschneidet und den zwischen diesen beiden in der Mitte liegenden Punct M mit A verbindet.) Theilt man die Kreisbögen AN und An in eine gleiche Anzahl gleicher Theile in den Puncten 1, 2..., 1', 2'...; so kommen bei der gleichförmigen Umdrehung beider Räder um ihre Achsen (oder bei der Wälzung des Bogens AN über jenen An) nach und nach die Puncte 1, 2... mit jenen 1', 2'.... in A zur Berührung, folglich geht auch die, beiden Curven gemeinschaftliche Normale in diesen Augenblicken durch diese Puncte 1 1', 2 2'...; beschreibt man demnach aus dem Puncte 1' als Mittelpunct mit dem kürzesten Abstande des Punctes 1 von der Curve ONE (d. i. der Länge der Normale $1t$) einen Kreisbogen, so mufs dieser die gesuchte Curve berühren. Macht man dasselbe auch aus den übrigen Puncten 2', 3'... mit den kleinsten Abständen der Puncte 2, 3... von der Curve ONE; so darf man zuletzt nur die Curve nNo so ziehen, dafs sie diese sämmtlichen Kreisbögen berührt oder einhüllt.

§. 212. Anwendung der Epicycloide und der Kreisevolvente. Gewöhnlich sind es nur diese eben genannten beiden Curven, welche man bei der Verzahnung in Anwendung bringt. Was die Epicycloide betrifft, so sey das Rad c (Fig. 160) durch jenes C so zu bewegen, als ob es durch die blofse Berührung der Theil- oder Grundkreise CA, cA in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung um seine Achse gedreht würde. Läfst man einen Kreis, welcher nur halb so grofs als der Grundkreis des zweiten oder durch das erste Rad mitzunehmenden Rades cA ist, auf dem äufsern oder convexen Umfang des Grundkreises des ersten Rades CA wälzen, so beschreibt der Punct A dabei die Epicycloide AN, dagegen, wenn er auf dem innern oder concaven Umfang des zweiten Kreises cA gewälzt wird, die nach dem Mittelpuncte c gehende gerade Linie Ac.

Ist nun die Curve AN mit dem ersten Kreise C und die gerade Linie Ac mit dem zweiten Kreise c fest verbunden, so wird bei der Umdrehung des Rades C um seine Achse in der angedeuteten Richtung das Rad c durch die successive Berührung der Puncte der Curve AN mit jenen der Geraden Ac eben so mitgenommen und um dessen Achse, wie durch blofse Berührung der beiden Grundkreise umgedreht. Dabei geht die Normale mA des Berührungspunctes der Curve AN, welche letztere, sobald A nach a gekommen ist, die Lage an und die Gerade Ac jene bc annimmt und die Curve in m berührt, indem Amc ein rechter Winkel ist, beständig durch den Punct A. Ferner ist Bogen Am = Bogen Ab (es hat nämlich der Winkel Acb im Kreise c den Bogen Ab und im Kreise o den halben Bogen Am zum Mafs; da nun dieser letztere Kreis nur halb so grofs als der erstere ist, so sind diese beiden Bögen gleich grofs); da nun aber nach der Entstehungsart der Epicycloide auch Bogen Am = Bogen Aa ist, so folgt Bogen Ab = Bogen Aa, so, dafs also auch die Bedingung der gleichen Umfangsgeschwindigkeiten der beiden Grundkreise dadurch erfüllt ist.

Auch kann umgekehrt das Rad C durch jenes c (in entgegengesetzter Richtung) geführt werden, weil dabei immer die Gerade bc die Epicycloide an in einem Punct m der Peripherie des Kreises o berührt und die Verbindungslinie mA zugleich auf mc und der Curve an normal steht.

§. 213. Was die Anwendung der Kreisevolvente betrifft, so seyen C und c (Fig. 161) wieder die Mittelpuncte der beiden Räder, so wie CA und cA die Halbmesser ihrer Theil- oder Grundkreise. Man ziehe durch den Berührungspunct A irgend eine Gerade Dd, fälle darauf aus C und c die Perpendikel CD, cd, und beschreibe endlich noch aus diesen Puncten C, c mit den Abständen CD, cd als Halbmesser die Kreise. Nun sey NO die Abgewickelte von dem Kreise CD, so ist die Tangente Dd normal auf diese Curve im Puncte m, folglich mufs dieser Punct zugleich auch der Berührungspunct mit der zweiten entsprechenden Curve on seyn. Bei der Umdrehung des Kreises C um seinen Mittelpunct wird die daran befestigte Curve NO mitgeführt, wobei die Gerade Dd fortwährend darauf, also auch auf der zweiten Curve normal bleibt und durch die auf einander folgenden Berührungspuncte beider Curven geht; da aber auf diese Weise die sämmtlichen Normalen der Curve no Tangenten an den Kreis cd bilden, so ist auch diese zweite, der erstern entsprechende Curve on eine Kreisevolvente, und zwar von dem Grundkreise cd.

Da ferner Dm = Bogen DN und dm = Bogen dn ist, und das Verhältnifs von $Dm : dm$ constant bleibt, so rücken die Puncte N und n in ihren Kreisbögen CD und cd, folglich auch, wegen $CA : cA = CD : cd$, die Grundkreise CA und cA immer um gleich viel, d. i. gleichförmig fort, wie es die obige Bedingung im §. 207 verlangt.

Anmerkung. Die nach der Kreisevolvente geformten Zähne bieten noch den eigenthümlichen Vortheil dar, dafs der Druck nicht blofs (§. 209) wie auch bei der Epicycloiden-Verzahnung, von einem Grundkreis auf den andern unverändert übertragen wird, sondern, dafs dieser auch zwischen den Zähnen selbst constant bleibt; denn nach der Proportion n des angezogenen Paragraphes verhält sich der zwischen den Zähnen Statt findende Druck P zu jenem p auf die Grundkreise bezogen, wie (Fig. 158) $CD : CA$, wobei CD veränderlich und CA constant, also auch p variabel ist. Bei Anwendung der Kreisevolvente dagegen ist dieses Verhältnifs $CD : CA$ (weil die Normale im Berührungspuncte der Zähne eine Tangente an beide Kreise CD und CA bildet), folglich auch der Druck p zwischen den Zähnen selbst constant. Daraus folgt jedoch keineswegs, dafs sich die Zähne nach ihrer ganzen Länge gleichmäfsig abnützen werden, sondern diese Abnützung wird an der Wurzel des Zahnes, wo der Wälzungsbogen kleiner ist, gröfser als am Kopfe, wo dieser Bogen gröfser ist.

§. 214. Wird von den beiden Grundkreisen CA und cA (Fig. 162) der erstere auf den letztern gewälzt, so entsteht die Epicycloide AN, und wenn man sich diese mit dem führenden Kreise c, dagegen den blofsen materiellen Punct A mit dem zu führenden Kreise C fest verbunden denkt, so wird bei der Umdrehung des Kreises c um seinen Mittelpunct in der angezeigten Richtung um den Bogen Aa', die Epicycloide die Lage $a'n$ angenommen und der Kreis C sich durch das Fortschieben des Punctes A um den Bogen Aa = Bogen Aa' (weil die Curve $a'a$ durch Wälzung des Bogens Aa über jenen Aa' entsteht) um seinen Mittelpunct umgedreht haben, dabei geht, zufolge einer bekannten Eigenschaft der Epicycloide, die Normale im Berührungspunct a zugleich auch durch den Punct A, so dafs bei Anwendung dieser Curve für die Krümmung der Zähne des Rades c und von blofsen Puncten im Rade C wieder alle Bedingungen des §. 207 erfüllt werden.

Da nun aber in der Wirklichkeit kein blofser Punct A oder a, d. h. keine steife materielle Linie, deren Querschnitt ein solcher Punct ist, bestehen kann, sondern dafür ein Cylinder, dessen Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r genommen wird; so darf man zu der auf dem vorigen Wege erhaltenen Epicycloide an nur eine Parallele bm im Abstande r ziehen, um die eigentliche den cylindrischen Zähnen des Rades C, welche man dann Triebstöcke nennt, entsprechende Curve der Zähne des Rades c zu erhalten.

§ 215. Bestimmung der Halbmesser der Räder. Sind R und r die Halbmesser der Grund- oder Theilkreise zweier in einander greifender verzahnter Räder, V und v ihre Umfangs-, folglich (§. 127) $C = \frac{V}{R}$ und $c = \frac{v}{r}$ ihre Winkelgeschwindigkeiten, so verhalten sich, weil $V = v$ seyn soll, diese Winkelgeschwindigkeiten verkehrt wie die Halbmesser der Räder. Sind n und n' die gleichzeitigen Umdrehungszahlen und m, m' die Anzahl der Zähne in den Rädern R und r, so hat man offenbar $n : n' = C : c = \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = r : R$ und $m : m' = R : r$. Um also die Halbmesser $CA = R$ und $cA = r$ (Fig. 162) der Grundkreise oder Theilrisse zu erhalten, mufs man die Centrilinie der beiden Räder im Puncte A nach dem geraden Verhältnifs der Anzahl der Zähne, oder im verkehrten Verhältnifs der Umlaufzahlen der Räder C und c theilen. Ist also n die Verhältnifszahl (der Quotient) zwischen der Anzahl der Umdrehungen des kleinern Rades c (des Getriebes) und des gröfsern C, so wird

$$R = nr \quad . \; . \; . \; (1,$$

und wenn $Cc = D$ gesetzt wird,

$$D = R + r \quad . \; . \; . \; (2,$$

so dafs man aus diesen beiden Gleichungen von den vier darin vorkommenden Gröfsen zwei bestimmen kann, wenn die beiden übrigen gegeben sind. Sind z. B. n und D gegeben, so ist

$$R = \frac{nD}{n+1} \text{ und } r = \frac{D}{n+1}.$$

§. 216. Dicke der Zähne. Die Dicke der Zähne wird auf dem Umfang des Theilkreises, dagegen ihre Breite nach der Richtung der Radachse, also senkrecht auf die Kreisebene gemessen. Der Zwischenraum zwischen zwei auf einander folgenden Zähnen heifst Lücke oder geradezu Zwischenraum. Die Summe aus der Dicke eines Zahnes und eines Zwischenraumes wird Theilung oder Schrift genannt, und diese mufs sofort auf beiden Grund- oder Theilkreisen gleich grofs oder die nämliche seyn (und zwar immer im Bogen gemessen).

Was nun die Dicke und Breite der Zähne betrifft, so hängt diese von dem Widerstande ab, welchen dieselben zu überwinden haben, und wird dieser nach den im §. 263 anzugebenden Regeln bestimmt.

Damit die Zähne des einen Rades in den Zwischenräumen des andern den nöthigen Spielraum finden, so macht man den Zwischenraum, je nach der Genauigkeit der ganzen Ausführung um $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{15}$ der Zahndicke gröfser. Ist also a die Theilung und d die Dicke der Zähne, so ist, wenn diese in beiden Rädern aus einerlei Material bestehen, $a = d + 1{\cdot}1\, d$ oder auch (bei sehr genauer Ausführung) $a = d + 1{\cdot}067\, d$. Sind die Zähne aus verschiedenem Materiale (z. B. in dem einen Rad aus Holz und in dem andern aus Gufseisen) und sind d und d' die Zahndicken in beiden Rädern, so ist in diesen beiden Fällen:

$$a = d + 1{\cdot}1\, d' \quad \text{oder} \quad a = d + 1{\cdot}067\, d'.$$

Für die Anzahl der Zähne m und m' in den beiden Rädern R und r hat man $m = \frac{2 R \pi}{a}$ und $m' = \frac{2 r \pi}{a} = \frac{m}{n}$, wo n der Quotient aus der Umdrehungszahl des kleinern durch das gröfsere Rad ist.

Da übrigens m und m' nach diesen Formeln selten ganze Zahlen werden, so nimmt man dafür nicht blofs die nächst kleinere ganze, sondern der nöthigen Symmetrie in der Ausführung wegen, auch noch eine durch die Zahl der Radarme theilbare Zahl, wodurch die Zähne um eine unbedeutende Gröfse dicker ausfallen.

Anmerkung. Englische Ingenieure nehmen für gufseiserne Zähne $d = \frac{a}{2{\cdot}1}$ und die Entfernung des Theilkreises vom Radkranze (Höhe der Flanke des Zahns) $h = 1{\cdot}2\, d = \frac{4}{7}\, a$.

§. 217. Cylinder-Verzahnung nach der Epicycloide.

Es seyen C und c (Fig. 163) die Mittelpuncte der beiden Stirnräder, ferner nach den vorigen Bestimmungen $CA = R$ und $cA = r$ die Halbmesser der Theil- oder Grundkreise des Rades und Getriebes, und $Ag = Ag'$ die Theilung oder Schrift. Nachdem die Dicke der Zähne und Breite der Lücken oder Höhlungen auf beide Theilkreise aufgetragen, und sowohl durch diese sich ergebenden, als auch durch die Halbirungspuncte die Halbmesser von unbestimmter Länge gezogen worden, schreitet man zur Abrundung der Zähne. Die Curve oder Epicycloide An, welche durch die Wälzung des Kreises o (als Erzeugungskreis), dessen Durchmesser $cA = r$ ist, auf dem Theilkreis des Rades (als Grundkreis) C bis zum Durchschnitt n mit dem Halbmesser Cn entsteht, bildet die Krümmung für die Zähne des Rades C; dieser Curve entspricht die gerade Linie Ac als Flanke des Getriebzahnes, an welche sich diese Curve bei der Bewegung des Rades in der angedeuteten Richtung anlegt und das Getrieb c führt.

Eben so bildet die Curve An', welche durch Wälzung des Kreises O, dessen Durchmesser $CA = R$ so grofs wie der Halbmesser des

Theilkreises des Rades C ist, auf dem Theilkreis cA des Getriebes, die Krümmung der Zähne des Getriebes, welcher wieder die Halbmesser CA als Flanken der Radzähne entsprechen.

Damit sich aber die Räder nach beiden Richtungen gleich gut drehen lassen, müssen die Zähne in Beziehung auf die Mittellinien Cn, cn' (eigentlich auf die durch diese Linien auf die Kreisflächen senkrechten Ebenen) symmetrisch geformt werden, so, dafs also diese Mittellinien die Grenzen für die von beiden Seiten in n und n' zusammenlaufenden Krümmungen der Zähne bilden.

Beschreibt man aus C mit dem Halbmesser Cn einen Kreis, so bestimmt dieser die Länge der Zähne des Rades, so wie ein aus c mit dem Halbmesser cn' beschriebener Kreis jene der Getriebszähne. Der zuerst genannte Kreis durchneidet jenen oA im Puncte i und die Centrilinie Oc im Puncte d; beschreibt man daher aus c mit den Entfernungen ci und cd als Halbmesser Kreise, so bestimmt der erstere die Länge der Flanken uw und der letztere die Tiefe der Höhlungen der Getriebszähne. Auf ganz gleiche Weise thun die aus C mit den Halbmessern Ci' und Cd' beschriebenen Kreise dasselbe für die Radzähne. (Dabei werden die Flanken um so kürzer, je gröfser das Rad ist; für einen unendlich grofsen Halbmesser oder eine gezahnte Stange fallen sie ganz weg.)

Die Höhlungen oder Lücken sind sogenannte verlängerte Epicycloiden und entstehen für das Rad durch Wälzung des Theilkreises cA des Getriebes auf dem Theilkreis CA des Rades, wobei jedoch nicht cA selbst, sondern der damit concentrische Kreis vom Halbmesser ci' (welcher die Länge der Getriebszähne bestimmt) der Erzeugende ist.

Für die Höhlungen des Getriebes wird CA auf cA gewälzt und der die Länge der Radzähne bestimmende Kreis Ci ist dabei der Erzeugende.

Anmerkung. In der Praxis wird nur von einem Zahn und einer Höhlung die Zeichnung, und darnach eine Chablone oder Lehre ausgeführt, diese der Reihe nach auf die Theilungspuncte gehörig aufgelegt und die Zähne und Lücken vorgerissen.

Da aber auf diese Weise die Zähne ganz schneidig ausfallen, so kann man sie auch wie in p und p' abstumpfen, und daher auch den Grund der Höhlungen durch einen Kreisbogen beziehungsweise vom Halbmesser cr und Cr' begrenzen. Bei grofsen Rädern geht man damit so weit, wie in s und s', wodurch die Höhlungen ganz wegfallen und die Zähne nur aus dem Kopf oder gekrümmten Theil ux und der Flanke uw bestehen; dabei werden die Höhlungen durch einen Kreisbogen, beziehungsweise vom Halbmesser

cs und Cs' begrenzt. Das Abstumpfen der Zähne soll jedoch nicht weiter getrieben werden, als dafs der über den Theilkreis vorspringende Zahnkopf wenigstens noch die halbe Zahndicke beträgt.

Noch ist zu bemerken, dafs der Eingriff sanfter wird, wenn der nächst folgende Zahn, nachdem der vorhergehende im Begriffe steht auszulassen, seinen Eingriff nicht vor, sondern in der Centrilinie Cc beginnt, so, dafs man also, wenn es sich mit den übrigen Bedingungen verträgt, diese Eigenschaft mit berücksichtigen soll. Die Rechnung zeigt, dafs wenn ein Zahngetrieb weniger als 10 Zähne erhält, diese Bedingung selbst bei 50 Zähnen des Rades noch nicht erfüllt werden kann, weil die Radzähne dadurch so nahe an einander kämen, dafs die Zahndicke des Getriebes zu gering ausfiele.

Obschon endlich die mechanische Verzeichnung der Epicycloiden durch Wälzung der betreffenden Kreisbögen zum Behufe der Anfertigung der Chablonen durchaus keiner Schwierigkeit unterliegt, so ziehen es die Practiker doch gewöhnlich vor, diese genauen Curven durch genäherte Kreisbögen zu ersetzen, wofür es mancherlei Vorschriften gibt.

§. 218. Cylinderverzahnung nach der Kreisevolvente. Soll ein Rad mehrere kleinere Räder oder Getriebe von verschiedener Gröfse in Bewegung setzen, so kann die Verzahnung nicht mehr nach der Epicycloide ausgeführt werden, weil diese nach §. 212 nur einer Gröfse des zu führenden Rades gehörig entsprechen kann; in einem solchen Falle wendet man die Kreisevolvente an, bei welcher keine solche Beschränkung eintritt.

Hat man, wie vorhin die Halbmesser der Theilkreise, die Schrift oder Theilung und die Dicke der Zähne bestimmt, liegt ferner der Punct A (Fig. 164) in der Centrilinie Cc beider Räder und ist Ab die Theilung im Getriebe c; so ziehe man den Halbmesser cb und durch den Berührungspunct A der beiden Theilkreise auf cb das Perpendikel EF, so bildet diese Gerade die gemeinschaftliche Normale aller der gleichzeitig in Berührung befindlichen Zähne, folglich sind die darauf gefällten Perpendikel CD und cd die Halbmesser der Kreise, von welchen die die Krümmung der Zähne bildenden Curven oder Kreisevolventen abgewickelt werden.

Beschreibt man aus C mit dem Halbmesser Cd einen Kreis, so bestimmt dieser die Länge der Zähne des Rades C. Verlängert man ferner, wenn Ae gleich der Theilung der Räder ist, die durch e gehende Kreisevolvente des Getriebzahnes bis zum Durchschnitte n mit der Normale EF, und beschreibt aus c mit dem Halbmesser cn einen Kreis, so begrenzt dieser eben so die Zähne des Getriebes c. Von den Kreisen

CD und cd (auf welchen die Abwicklung geschieht und bis wohin die Zahnkrümmung reicht) werden die Zähne nach einwärts noch um ·15 bis ·19 Zoll verlängert, um den Zähnen in den entsprechenden Lücken den gehörigen Zwischen- oder Spielraum zu verschaffen; die Lücken werden im Grunde von Kreisbögen begrenzt, welche durch die Puncte, die auf die eben erwähnte Weise bestimmt worden, aus C und c beschrieben werden, deren Halbmesser nämlich um ·15 bis ·19 Zoll kleiner als jene CD und cd sind.

Anmerkung. Bei dieser Verzahnung ergreifen sich die Zähne vor und hinter der Centrilinie Cc in der Entfernung der Schrift oder Theilung. Sollten die Zähne an der Spitze zu schwach ausfallen, so müfste man diese näher gegen die Centrilinie auf einander wirken lassen, was dadurch bewirkt wirkt, dafs man die ganze Construction neuerdings, jedoch mit einer Entfernung Ab wiederholt, welche nur drei Viertel oder die Hälfte der Schrift oder Theilung beträgt.

§. **219. Innere Verzahnung.** Sind CA und cA (Fig. 165) die Halbmesser der im Puncte A sich berührenden Theilkreise des Rades C und Getriebes c, ferner a, a'... die Zahnmittel des Rades und b, b'... jene des Getriebes, folglich $aa' = a'a'' = bb'$... die Theilung; so bildet die Hypocycloide An, welche durch Wälzung des Kreises O, dessen Durchmesser dem Halbmesser des Getriebes Ac gleich ist, auf dem innern Umfang des Theilkreises CA des Rades entsteht, die Krümmung für einen Radzahn, so wie der Halbmesser Ac (als Hypocycloide, erzeugt durch den Kreis O auf dem innern Umfang des Kreises c des Getriebes) die entsprechende Flanke des Getriebzahnes. Setzt man die Curve An fort bis zum Durchschnitt n mit dem durch die Mitte a des Zahns gehenden Halbmesser ~~A~~ a C, und beschreibt aus C mit dem Radius Cn einen Kreis, so begrenzt dieser die Länge der Radzähne, und wenn man durch den Punct i, wo dieser Kreis den Erzeugungskreis O schneidet, aus c einen Kreis beschreibt, so bestimmt dieser die Länge der Flanken mi der Getriebzähne.

Der vorige aus C, mit dem Halbmesser Cn beschriebene Kreis durchschneidet den Halbmesser CA in einem Puncte d, und wenn man durch diesen Punct aus c einen Kreis beschreibt, so begrenzt dieser die Höhlungen oder Lücken der Getriebzähne.

Anmerkung. Diese Lücken sollten streng genommen verlängerte Hypocycloiden seyn, welche durch Wälzung des Theilkreises CA des Rades auf jenen cA des Getriebes entstehen, wobei der mit dem erstern concentrische Kreis vom Halbmesser Cd der Erzeugende ist. Da man indefs die Zähne gewöhnlich wie in v abstumpft, so wird auch der Grund der Lücken wie in s durch einen Kreisbogen vom Halbmesser cs begrenzt.

Wie man sieht, so haben hier die Radzähne keine Flanken und die Getriebszähne keine Köpfe oder Abrundungen.

§. 220. Verzahnung eines Rades mit einer Zahnstange. Denkt man sich in den vorigen Fällen den Halbmesser des einen Rades oder Getriebes unendlich grofs, so geht der Theilkreis desselben in eine gerade Linie DD' (Fig. 166) über, die Curve der Radzähne oder die Epicycloide verwandelt sich in eine Kreisevolvente und jene für die Zähne der Stange in eine gemeine Cycloide. Soll die Zahnstange (Kammbaum) bei einer Umdrehung des Rades C um die Höhe h gehoben oder überhaupt nach der Richtung $D'D$ bewegt werden, so erhält man für den Halbmesser $CA = r$ des Theil- oder Grundkreises wegen $2r\pi = h$, sofort

$$r = \frac{h}{2\pi} \quad \ldots (1.$$

Hat man die Dicke der Zähne nach dem zu überwindenden Widerstand angenommen, so kann man die Theilung a und damit die Anzahl der Zähne $m = \frac{2r\pi}{a}$ bestimmen, wobei man für m wieder (wenn m gebrochen ausfällt) die nächst kleinere ganze Zahl nimmt.

Nachdem man nun die Theilung $Ab = Aa = a$, die letztere im Bogen gemessen auf der Theillinie und den Theilkreis, so wie die Zahndicken und ihre Mittellinien (Zahnmittel) gehörig aufgetragen und mit dem Theilkreis CA als Grundkreis, die Evolvente oder Abgewickelte (welche auch durch Wälzung einer geraden Linie DD' über dessen Umfang entsteht) construirt hat, rundet man damit die Radzähne bis zum Durchschnitt n' des Zahnmittels zu beiden Seiten ab und zieht, um ihre Länge zu begrenzen, aus C mit dem Halbmesser Cn' einen Kreis.

Zur Abrundung der Zähne der Stange dient die Cycloide, welche den Kreis vom Durchmesser CA auf der Geraden DD' beschreibt, wofür man indefs in der Praxis gewöhnlich nur einen Kreisbogen nimmt. Begrenzt werden die Zähne durch eine mit DD' durch den Punct n gezogene Parallele, welche zugleich den Kreis vom Durchmesser CA im Puncte i schneidet. Der aus C mit dem Halbmesser Ci beschriebene Kreis begrenzt die Flanken ai der Radzähne, während die Höhlungen durch Wälzung der Tangente oder Theillinie DD' auf dem Theilkreis CA durch den Punct n des darauf befestigten Perpendikels nr beschrieben werden (also verlängerte Kreisevolventen sind). Die Höhlungen der Zähne der Stange dagegen sind verlängerte Cycloiden, für welche der Kreis vom Halbmesser Cn' erzeugender und der Theilkreis CA wälzender auf der Geraden DD' ist. Auch hier kann man die Zähne und Höhlungen zum Theil oder, was gewöhnlich geschieht, wie in p, p', q, q' so abstumpfen, dafs die Höhlungen ganz ausbleiben und nur Flanken vorkommen.

§. 221. Hebeköpfe für Stampfwerke. Analog mit den vorigen Constructionsarten ist auch jene zur Bestimmung der Krümmung der Hebeköpfe für Stampfwerke, aus welchem Grunde diese gleich hier mit vorgenommen wird.

Soll der Stampfer M (Fig. 167) auf die Höhe h gehoben werden und ist m die Anzahl der Hebköpfe Ae für einen Stampfer, so, dafs also bei einer Umdrehung der Welle C derselbe Stämpfer m Mal gehoben wird; dreht sich ferner die Welle in einer Minute n Mal um und ist $CA = r$ der Halbmesser des Grundkreises, über welchen man einen Faden abwickeln (oder die Tangente Aa' wälzen) mufs, um die Krümmung Aa der Hebeköpfe zu erhalten; so ist die Umdrehungszeit der Welle per Secunde $= \frac{60}{n}$ und die Zwischenzeit von einem Angriff desselben Stämpfers bis zum nächst folgenden $t = \frac{60}{nm}$. Diese Zeit zerfällt aber in die Hubzeit t', Fallzeit t'' und eine kleine Ruhezeit, um sicher zu seyn, dafs die Heblatte AB des Stämpfers nicht auf den Hebkopf Aa der Welle auffällt. Nimmt man diese zu $\frac{1}{10}t$ an, so ist $\frac{9}{10}t = t' + t''$ und wegen (§. 142) $t'' = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, die Hubzeit $t' = \frac{54}{mn} - \sqrt{\frac{2h}{g}}$, und da dieses zugleich auch die Zeit für die Bewegung eines Punctes A durch den Kreisbogen $AA' = Aa' = h$ ist, so hat man, da hier eine gleichförmige Bewegung vorausgesetzt wird,

$$2r\pi : \text{Bogen } AA' = \frac{60}{n} : t'$$

und daraus

$$r = \frac{60\,h}{2n\pi\left(\frac{54}{mn} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)} \quad \ldots (1$$

als Halbmesser des Grundkreises CA.

Um die Curve der Hebköpfe Aa zu begrenzen, beschreibt man, wenn $Aa' = h$ ist, aus C mit dem Halbmesser Ca' einen Kreis.

Anmerkung 1. Oft läfst man die Ruhezeit aus der Rechnung weg und nimmt dagegen den ohne diesen Werth gefundenen Halbmesser r auf Gerathewohl um $\frac{1}{12}$ gröfser.

Anmerkung 2. Die Anwendung dieser Hebeköpfe hat das Nachtheilige, dafs sie bei ihrer Bewegung jedesmal an die ruhende Heblatte *AB* des Stämpfers anstofsen und diesen immer plötzlich von der Ruhe aus auf die Geschwindigkeit des Punctes *A* bringen, wodurch, da man es nicht mit vollkommen elastischen Körpern zu thun hat (§. 201), ein Verlust an Arbeit entsteht. Um diesen Stofs zu vermeiden, hat man den Hebeköpfen eine Krümmung zu geben versucht, für welche im Augenblicke des Angriffes die Fläche *AB* der Heblatte eine Tangente bildet, und sonach der Stämpfer von der Ruhe aus nur allmälig auf seine gröfste Geschwindigkeit gebracht wird; obschon dadurch wieder, da der Weg des Übereinandergleitens gröfser wird, auch die Wirkung der Reibung vergröfsert wird. Eben so sind die Frictionsrollen oder Walzen, welche dabei versucht worden, nicht dauerhaft genug.

§. 222. Hebeköpfe für Stirnhämmer. Soll der um *c* drehbare Hammer *bc* (Fig. 168) durch eine Daumenwelle *C* in gewissen Zwischenräumen oder Zeiten gehoben werden, so mufs der abgerundete Theil *ab* des Hebekopfes, da er während des ganzen Hubes mit der Geraden *cb* des Hammers in Berührung bleiben soll, eine Epicycloide seyn, welche der Kreis vom Durchmesser *cb* auf den Theilkreis *CA* als Grundkreis beschreibt. Um den Halbmesser *r* dieses Theilkreises zu finden, mufs die Gröfse des Bogens $Ad = a$ oder die Hubhöhe des Hammers gegeben seyn oder angenommen werden; setzt man diese Gröfse *a* statt *h* in der vorigen Formel (1 und behält im Übrigen die dortige Bezeichnung bei, so wird

$$r = \frac{60\,a}{2\,n\,\pi\left(\frac{54}{m\,n} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)},$$

wobei der kleine Zeitverlust im Niederfallen des Hammers, da er nicht wie der Stämpfer vertical, sondern wie über eine schiefe Ebene herabfällt, durch den elastischen „Stofsreutel“ ersetzt wird.

Ist die Epicycloide *ab* construirt, so begrenzt man diese durch einen aus *C* mit dem Halbmesser *Cb* beschriebenen Kreisbogen; um das Abfallen des Hammers zu erleichtern, gibt man der untern Seite des Hebekopfes die radiale Richtung.

§. 223. Ganz dieselbe Construction findet auch für die Hebeköpfe der Schwanzhämmer (wobei die Drehungsachse zwischen dem Hammer und der Daumenwelle) und der Aufwerfer (bei welchem die Daumenwelle zwischen dem Hammer und der Drehungsachse liegt) Statt.

Was die erstern betrifft, so sey (Fig. 169) CA der Halbmesser des Theilkreises der Welle, c der Drehungspunct des Hammers, wofür AB die niedrigste und aB' die höchste Lage der Stellung bezeichnet.

Der Punct A des Kreises vom Durchmesser Ac beschreibt bei seiner Wälzung auf dem Theilkreis CA die Epicycloide Ae, nach welcher die Hebeköpfe wie ab auf der untern Seite abgerundet werden müssen; dabei bestimmt ein aus C mit dem Halbmesser Ca beschriebener Kreis die Länge derselben.

§. 224. Winkelverzahnung. Es wurde bereits in §. 208 bemerkt, dafs man, im Falle die beiden Räderachsen nicht parallel sind, zu den conischen oder Kegelrädern seine Zuflucht nimmt; am häufigsten bilden dabei die Achsen einen rechten Winkel, obschon dieser auch spitz oder stumpf seyn kann, wenn gleich die Ausführung dadurch etwas schwieriger wird.

Es sey nun S (Fig. 170) der Durchschnitt der beiden Achsen CS, cS der zu verzahnenden Räder (im Falle sich die Achsen nicht schneiden, müssen drei Kegelräder angewendet werden); theilt man den Winkel CSc durch die Gerade SA in zwei solche Theile CSA und ASc, dafs sich diese wie die Anzahl der Zähne (oder umgekehrt wie die Umdrehungszahlen) der Räder AB und Ab verhalten; so bildet SA die gemeinschaftliche Kante oder Berührungslinie der Grundkegel ABS und AbS, durch deren blofse Berührung die Umdrehung des einen Kegels ABS um seine Achse SC im angenommenen Verhältnifs der Umdrehungsgeschwindigkeiten auf den zweiten Kegel AbS übertragen wird.

Da man die Zähne nicht bis in die Spitze S, sondern nur bis auf eine gewisse Länge AL fortsetzt, so wird dadurch zugleich die Kronbreite der Kegelflächen, welche auf der von S entgegengesetzten Seite ebenfalls durch Kegelflächen begrenzt werden, deren Spitzen oder Scheitel in C und c so liegen, dafs die Gerade Cc auf AS perpendikulär steht, bestimmt. Diese letztern Kegelflächen $ABDE$ und $Abde$ bilden die äussern Stirnflächen der Zähne, während die innern Stirnflächen durch das, durch den Punct L auf AS geführte Perpendikel bestimmt werden. Die Kegelflächen AE und Ae haben sonach eine durch die Kante Dd gehende, auf AS perpendiculäre gemeinschaftliche Berührungsebene, und man kann, da das Profil eines Zahns auf der Kegelfläche nur einen sehr kleinen Theil davon einnimmt, ohne Fehler annehmen, dafs der Eingriff der in A sich berührenden Zähne in dieser Berührungsebene

Statt findet, so, dafs unter dieser Voraussetzung die Zähne genau jene Form, wie bei den cylindrischen Rädern erhalten; man darf sich also nur die beiden Kegelflächen, deren Scheitel in C und c liegen, abgewickelt, d. i. in eine Ebene ausgebreitet denken, und da dabei die Umfänge AB und ab in die aus C und c mit den Radien CA und cA beschriebenen Theilkreise AF und Af von cylindrischen Rädern übergehen, darauf die ausgemittelte Anzahl der Zähne und deren Dicke auftragen und die Verzahnung nach einer der in den frühern Paragraphen angeführten Methoden construiren.

Anmerkung. Schneidet man ein Stück Blech in Form dieser Zähne als Chablone und legt dieses Netz oder die Patrone auf den äufsern Stirnflächen AE und Ae herum, reifst die Conturen mit einem Stifte auf, wobei man früher schon die Zahnköpfe $BG = li$ und $bg = no$ auf die Grundkegel beiläufig und noch in gröfsern Dimensionen befestigt hat, und arbeitet die Zähne, welche entweder aus Holz in das gufseiserne Rad eingesetzt sind, oder sammt dem hölzernen Rad nur als Gufsmodelle dienen, nach diesem Profile von allen Seiten gegen S verjüngt zu; so hat man die Zähne richtig und am einfachsten construirt. Auch kann man ein ähnliches Profil oder eine Patrone MN, wobei $Cp = KP$ gleich dem Halbmesser des Theilkreises der innern Stirnfläche, alles Übrige aber der vorigen Patrone ähnlich ist, für die innere Stirnfläche construiren und diese darauf eben so vorreifsen, so, dafs die Zähne jetzt nur nach diesen beiden correspondirenden Profilen ausgearbeitet werden dürfen.

Genau dasselbe gilt natürlich auch für das zweite Kegelrad Db.

Übrigens wurden hier der Vollständigkeit wegen die Höhlungen der Zähne non' mit angegeben, allein diese werden in der Praxis immer ausgelassen, so, dafs die Zähne nur wie in q aus den Köpfen oder Abrundungen und Flanken bestehen und der Grund der Lücken von einer Kegelfläche gebildet wird, deren Basis den Halbmesser Cn hat und Spitze in S liegt. Die Zähne selbst werden so stark abgestumpft, dafs sie nur um die halbe Zahndicke über den Grundkegel oder Theilrifs CA vorragen. Dasselbe gilt auch vom zweiten Kegelrad *).

§. 225. Verzahnung bei der Schraube ohne Ende. In jenen Fällen, in welchen die Achsen einen rechten Winkel

*) Weitere Details über die Verzahnung, wohin auch die Kron- und Kammräder gehören, die ebenfalls zur rechtwinklichten Fortpflanzung der Bewegung dienen und vor der Einführung der conischen Räder sehr häufig angewendet wurden, so wie über den Bau der Räder selbst, findet man u. A. in Haindl's Maschinenkunde und Maschinenzeichnen, und im dritten Bande von Gerstner's Handbuch der Mechanik.

mit einander bilden, ohne in derselben Ebene zu liegen, wendet man in der Regel die Schraube ohne Ende an (§. 116).

Ist die Höhe a des Schraubenganges (Fig. 171), wofür immer ein flaches Gewind angewendet wird, nach der Gröſse des zu überwindenden Widerstandes bestimmt, so bildet diese zugleich auch die Theilung oder Schrift des Getriebes, so, daſs wenn man den Halbmesser des Theilkreises $Ca = r$ und die Anzahl der Zähne $= n$ setzt, sofort $2r\pi = na$, also $r = \frac{na}{2\pi}$ seyn muſs. Dabei macht, weil bei jeder Umdrehung der Schraube ein Punct im Theilriſs um den Bogen a der Theilung fortrückt, die Schraube n Umdrehungen bei einer Umdrehung des Getriebes.

Liegt die durch C gehende Achse des Rades horizontal, so steht jene BB' der Schraube vertical, und es müssen die Zähne nicht nur nach der Kreisevolvente für den Grundkreis Ca abgerundet, sondern gegen die Achse unter denselben Neigungswinkel i gestellt werden, welchen die Schraubenlinie mit der Horizontalen bildet.

Anmerkung. Da die Construction nicht leicht ganz genau ausfällt, so läſst man in der Praxis die Zähne des Rades durch die Schraube selbst, d. h. durch eine ihr ganz gleiche Schneidspindel (auf ähnliche Weise, wie das Gewind einer Schraubenmutter eingeschnitten wird) aus- oder einschneiden.