bevor man das auszuwalzende Metall zwischen die Walzen bringt, um es mit gehöriger Geschwindigkeit und bei dem nöthigen Hitzgrade durch zu bringen.

Siebentes Kapitel.

Vom Stofse der Körper.

§. 198. Erklärung. Bewegen sich zwei Körper, z. B. zwei Kugeln *C* und *c* (Fig. 155) nach derselben Richtung, und hat die nachfolgende *C* eine gröfsere Geschwindigkeit, als die vorausgehende *c*, so wird die letztere von der erstern eingeholt, und es entsteht im Augenblicke des Begegnens ein Stofs. Der Stofs heifst centrisch oder central, wenn sich die Körper in der geraden Linie bewegen, welche man durch ihre Schwerpuncte ziehen kann, sonst excentrisch; der Stofs wird gerad genannt, wenn im Augenblicke des Stofses die Berührungsflächen beider Körper auf der Richtung ihrer Bewegung senkrecht stehen, im Gegentheile heifst er schief. Die Wirkung des Stofses besteht aber darin, dafs die am und in der Nähe des Berührungspunctes liegenden materiellen Theilchen verschoben werden, und sich an den beiden Berührungsflächen kleine Eindrücke bilden. Durch den Widerstand aber, welchen die Körper einer solchen Verschiebung ihrer Theilchen entgegensetzen, ändern sich die Geschwindigkeiten beider Kugeln, so lange bis diese einander gleich geworden sind, wobei die vorausgehende Kugel *c* an Geschwindigkeit gewonnen, die nacheilende aber an dieser verloren hat, und in dem Augenblicke, in welchem diese Gleichheit der Geschwindigkeiten eintritt, haben auch die Eindrücke oder Formänderungen ihr Maximum erreicht.

Sind die Körper vollkommen unelastisch, in welchem Falle die durch den Stofs bewirkten Eindrücke an diesen haften bleiben, so üben die beiden Körper keine weitere Wirkung mehr gegen einander aus, und sie gehen gemeinschaftlich, wie ein einziger Körper, mit einerlei Geschwindigkeit fort. Sind dagegen die Körper elastisch, d. h. suchen die verdrängten materiellen Theilchen ihre ursprüngliche Lage wieder einzunehmen, oder die Körper nach dem Aufhören der pressenden oder stofsenden Kraft ihre ursprüngliche Form entweder ganz oder zum Theil wieder herzustellen (vollkommene oder unvollkommene Elasticität); so entsteht noch eine zweite gegenseitige Einwirkung, indem sich die Kugeln dabei so lange von einander entfernen, bis die entstandenen Eindrücke, so weit es nach dem Elasticitätsgrade dieser Körper möglich ist, wieder verschwunden sind. Nach diesem zweiten Act gehen die Kugeln mit ungleicher Geschwindigkeit fort, und zwar die gestofsene Kugel c mit einer gröfsern, die anstofsende C mit einer kleinern, als die gemeinschaftliche Geschwindigkeit in dem Augenblicke der gröfsten Zusammendrückung war.

Obschon wir aber weder vollkommen unelastische, noch vollkommen elastische Körper kennen, so müssen wir dennoch zur Vereinfachung und Erleichterung der Untersuchung beim Stofse der Körper diese beiden Zustände voraussetzen. Auch betrachten wir hier nur jenen Fall, in welchem die Berührung beim Stofse blofs in einem einzigen Puncte Statt findet, so wie endlich nur den geraden, centralen Stofs.

§. 199. Stofs unelastischer Körper. Es seyen m und m' die Massen der beiden Kugln C und c, welche sich nach einerlei Richtung von C gegen c in der durch ihre Schwer- oder Mittelpuncte gehenden geraden Linie (wodurch ein gerader und centraler Stofs entsteht) mit den Geschwindigkeiten v und v', wobei $v > v'$ seyn soll, bewegen. Da die Kräfte, welche die Massen m und m' in Bewegung gesetzt haben (§. 132), durch mv und $m'v'$ ausgedrückt werden; da ferner die beiden Kugeln nach dem Stofse wie eine einzige Masse $m + m'$, mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit, welche V heifsen mag, fortgehen, und da endlich die Summe der bewegenden Kräfte durch den Stofs nicht geändert wird; so ist

$$(m + m')V = mv + m'v',$$

und daraus $$V = \frac{mv + m'v'}{m + m'} \quad \ldots (1.$$

d. h. die nach dem Stofse eintretende gemeinschaftliche Geschwindigkeit ist die Summe aus den bewegenden Kräften dividirt durch die Summe der Massen.

Anmerkung. Da die vorausgehende Kugel durch den Stofs die Geschwindigkeit $V - v'$, folglich an bewegender Kraft $m'(V - v')$ gewinnt, dagegen die nachfolgende die Kraft $m(v - V)$ verliert, und da dabei Gewinn und Verlust gleich grofs seyn müssen, so ist $m'(V - v') = m(v - V)$, woraus für V wieder der vorige Werth (1 folgt.

§. 200. Besondere Fälle. Bewegen sich die beiden Kugeln gegen einander, so darf man in der vorigen Formel blofs die Geschwindigkeiten mit entgegengesetzten Zeichen einführen, und

z. B. v positiv und v' negativ nehmen; dadurch erhält man

$$V = \frac{mv - m'v'}{m + m'} \ldots (2,$$

und je nachdem dabei V positiv oder negativ ausfällt, wird die Bewegung nach dem Stoſse im Sinne von v (d. i. von C gegen c) oder von v' (von c gegen C) Statt finden.

Sollen die Kugeln nach dem Stoſse liegen bleiben, jede also ihre bewegende Kraft gänzlich verlieren, so muſs $mv - m'v' = o$, d. i. $mv = m'v'$, oder $v : v' = m' : m$ seyn, woraus also folgt, daſs zwei Körper dieselbe bewegende Kraft oder die gleiche Gröſse der Bewegung haben (woher eigentlich auch diese letztere Benennung genommen ist), wenn die Producte aus den Massen in ihre Geschwindigkeiten gleich groſs sind, oder wenn sich die Geschwindigkeiten verkehrt wie ihre Massen verhalten. (Vergl. §. 132.)

Im Falle die Kugel c oder Masse m' ruht, ist $v' = o$, daher nach den beiden vorigen Formeln:

$$V = \frac{mv}{m + m'} \ldots (3.$$

Ist dabei die anstoſsende Masse m gegen die ruhende m' (wie z. B. beim Eisgange oft die Eismasse gegen ein Brückenjoch oder ein sonstiges Hinderniſs, welches man auf eine ruhende Masse reduciren kann) sehr groſs, so kann man in der letzten Formel näherungsweise m' gegen m auslassen, und man erhält dann sehr nahe $V = v$.

Aufgabe. Bei einer Kunstramme (Schlagmaschine zum Einrammen der Pfähle) fällt der Hoyer oder Rammbär, dessen Masse $= M$ ist, von der Höhe h auf den einzurammenden Pfahl von der Masse m, welcher als unelastisch angesehen wird; wenn dieser nun auf den letzten Schlag um die Gröſse s in das Erdreich eindringt, so ist die Frage, welche ruhige Belastung er, ohne noch tiefer einzudringen, ertragen kann?

Da der Hoyer oder Rammklotz durch den freien Fall (§. 142, Form. 3) die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh} \ldots (r$ erlangt, so gehen dieser und der Pfahl nach dem Stoſse mit der Geschwindigkeit (obige Formel 3) $V = \frac{Mv}{M + m}$ fort, und es ist nach §. 185 die nöthige Wirkung um der (dem Gewichte nach ausgedrückten) Masse $M + m$ diese Geschwindigkeit V zu benehmen $= (M + m)\frac{V^2}{2g}$. Sieht man nun den mittlern Widerstand, welchen das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegensetzt, als eine constante Kraft P an, so ist die Wirkung dieses

Widerstandes während des Weges s, nach §. 172 (Gleich. m) $= Ps$, folglich, da beide Wirkungen einander gleich seyn müssen $(M + m) \times \frac{V^2}{2g} = Ps$, oder wenn man für V den vorigen Werth, und anstatt des dabei enstehenden Bruches $\frac{V^2}{2g}$ aus der Relation r seinen Werth h setzt und abkürzt, auch $\frac{M^2 h}{M + m} = Ps$. Fügt man endlich, mehr zur Vervollständigung der theoretischen Entwickelung, als dafs es von erheblichem Einflusse wäre, im ersten Theile noch die Wirkung $(M + m) s$, welche nach dem Stofse durch das Gewicht des Pfahles und jenes des durch kurze Zeit darauf ruhenden Rammklotzes hinzu, so erhält man:

$$\frac{M^2 h}{M + m} + (M + m) s = Ps \ldots (4,$$

aus welcher Relation sowohl die mit dem Widerstande des Bodens im Gleichgewichte stehende Belastung des Pfahles $P - m$, wenn die Gröfse s, um welche der Pfahl bei dem letzten Schlag in den Boden eingedrungen ist, als auch umgekehrt diese Gröfse s bestimmt werden kann, wenn die Last $P - m$, welche mit dem Widerstande des Bodens im Gleichgewichte stehen soll, gegeben ist.

Anmerkung. Mit Rücksicht auf den Umstand, dafs jeder einzurammende Pfahl in der Wirklichkeit bis zu einer gewissen Grenze elastisch und zusammendrückbar, also nicht absolut hart oder unelastisch ist, wird die vorige Relation (4 noch zusammengesetzter, und es läfst sich diese mit Benützung einiger Sätze, welche erst im zehnten Kapitel, bei der Lehre der Festigkeit der Materialien vorkommen können, auf folgende Weise ableiten.

Bezeichnen, wie vorhin, M und m die dem Gewichte nach ausgedrückten Massen des Rammklotzes und Pfahles, h die Fallhöhe des erstern, s den Betrag, um welchen der Pfahl auf einen Schlag in den Boden eindringt, P den Widerstand, welchen dabei der Boden dem Pfahle entgegensetzt; ferner a den Querschnitt und l die Länge des Pfahles, $\mathfrak{M}$ der dem Materiale, woraus der Pfahl besteht, entsprechende Modul der Elasticität (§. 252), und e die Gröfse, um welche der Pfahl auf einen Schlag zusammengedrückt wird (wobei die Gewichte gleichmäfsig in Pfunden oder Centnern, so wie die Längen und Flächen in Zollen und Quadratzollen oder in Fufsen und Quadratfufsen auszudrücken sind) — so kann man, da der Widerstand, welchen der als elastisch angenommene Pfahl der Zusammendrückung entgegensetzt, gleichförmig von 0 bis P zunimmt, den mittlern Werth dieses Widerstandes, welcher durch den ganzen Weg e als constant anzusehen ist, gleich $\frac{1}{2} P$ setzen, wodurch die Wirkung dieses Widerstandes $= \frac{1}{2} Pe$ wird.

Mit Rücksicht auf diese Compression e sinkt der Rammklotz auf jeden Schlag nicht blofs um die oben angenommene Gröfse s, sondern um $s + e$, so wie auch der Pfahl dabei (da dessen Schwerpunct wegen der bloſsen Zusammendrückbarkeit des Pfahles um $\frac{1}{2}e$ tiefer geht) um $s + \frac{1}{2}e$ herabgeht. Man erhält daher anstatt der obigen Relation (4, wobei der Kopf des Pfahles immer noch als unelastisch angenommen wird, die nachstehende:

$$\frac{M^2 h}{M + m} + M(s + e) + m(s + \tfrac{1}{2}e) = Ps + \tfrac{1}{2}Pe,$$

welche offenbar in die obige übergeht, wenn man $e = o$ setzt.

Setzt man nun für die Zusammendrückung e (die unter gleichen Umständen mit der Ausdehnung als gleich groſs angenommen wird) den im §. 252 angegebenen Werth $e = \frac{lP}{\mathfrak{M}a}$, und bestimmt dann aus dieser Relation beziehungsweise P und s; so erhält man:

$$P = \left(M + \tfrac{1}{2}m - \frac{\mathfrak{M}as}{l}\right)$$
$$+ \sqrt{\left[\left(M + \tfrac{1}{2}m - \frac{\mathfrak{M}as}{l}\right)^2 + \frac{2\mathfrak{M}a}{l}\left(\frac{M^2 h}{M+m} + (M+m)s\right)\right]}$$

$$\text{und } s = \left[\frac{M^2 h}{M+m} - \frac{Pl}{\mathfrak{M}a}\left(\tfrac{1}{2}P - [M + \tfrac{1}{2}m]\right)\right] : [P - (M+m)].$$

Setzt man in dieser letztern Relation $s = o$ und bestimmt aus der entstehenden Gleichung den Quotienten $\frac{m}{M}$, so erhält man, wegen

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \frac{m}{M} = \frac{2\mathfrak{M}ah}{P^2 l}m,$$

oder wenn man im zweiten Theile $m = alk$ setzt, wo k das Gewicht der cubischen Einheit des Materiales bezeichnet, woraus der einzurammende Pfahl besteht:

$$\frac{m}{M} = \tfrac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{\left(1 + \frac{8\mathfrak{M}ka^2h}{P^2}\right)}\right],$$

Eben so ist umgekehrt für $\frac{m}{M} = n$ unter dieser Voraussetzung:

$$P = \sqrt{\left(\frac{2\mathfrak{M}a^2kh}{n + n^2}\right)},$$

wodurch sofort das Verhältniſs zwischen den Gewichten des Rammklotzes und Pfahles bestimmt ist, bei welchen der Pfahl, unter Annahme eines gewissen Werthes für P, nicht mehr weiter in den Boden eindringen kann.

In der Anwendung legt man einem solchen Pfahle der Sicherheit wegen nur den vierten bis zehnten, in besondern Fällen selbst nur den zwanzigsten Theil von jener Last P auf, welche mit dem Widerstand des Bodens im Gleichgewichte steht.

1. Wird z. B. ein 8 Centner schwerer Pfahl auf eine solche Weise eingerammt, daſs der 12 Centner schwere Rammklotz von einer Höhe von 4 Fuſs so lange darauf fällt, bis der Pfahl in der letzten Hitze von 25 Schlägen nur mehr um 2 Zoll, also auf den letzten Schlag um $\frac{2}{25}$ Zoll oder um

$\frac{1}{150}$ Fuſs fortrückt oder in den Boden eindringt, so folgt, wenn der Pfahl 20 Fuſs lang ist, 1 Quadratfuſs im Querschnitt hat und aus Eichenholz besteht, wovon der Cubikfuſs 40 Pfund wiegt, aus der ersten dieser drei Formeln, wegen $M = 12$, $m = 8$, $h = 4$, $l = 20$, $a = 1$, $s = \frac{1}{150}$ und (S. 218, wo sich die Zahlen auf 1 Quadratzoll Querschnitt und auf Pfunde beziehen) $\mathfrak{M} = 144 \times 14000$ sofort $P = 1846{\cdot}6$ Centner.

2. Soll zweitens einer Pilote von denselben, im vorigen Beispiele angenommenen Dimensionen und den gleichen Verhältnissen beim Einrammen derselben eine Last von 585 Centner aufgelegt werden, und verlangt man dabei eine vierfache Sicherheit, so, daſs der Boden diesem Pfahl zuletzt einen Widerstand von $4 \times 585 = 2340$ Centner entgegensetzen soll; so erhält man aus der zweiten dieser Formeln, wegen $P = 2340$ und den vorigen Werthen von M, m, h, l, a und $\mathfrak{M}$ sofort $s = {\cdot}000868$ Fuſs oder nahe $\frac{1}{100}$ Zoll, so daſs der Pfahl in der letzten Hitze von 25 Schlägen nur mehr um $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ Zoll eindringen darf.

3. Soll endlich für einen Widerstand des Bodens von $P = 5000$ Centner das Verhältniſs von $m : M$ gefunden werden, für welches der Pfahl m durch den 15 Fuſs hoch herabfallenden Rammklotz M nicht weiter in den Boden eindringen kann; so darf man nur in der dritten der drei genannten Formeln $P = 5000$, $k = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ und $h = 15$ setzen, so erhält man nahe $\frac{m}{M} = {\cdot}6$, so, daſs, wenn der Pfahl 6 Centner wiegt, der Rammklotz sofort 10 Centner schwer seyn muſs.

§. 201. Verlust an lebendiger Kraft durch den Stoſs. Die Summe der lebendigen Kräfte beider Massen vor dem Stoſse ist (§. 159, Anmerk.) $mv^2 + m'v'^2$, und nach dem Stoſse ist diese Kraft $= (m + m')\, V^2 = (m + m')\, \frac{(mv + m'v')^2}{(m + m')^2}$. Zieht man diesen Ausdruck von dem ersten ab und bezeichnet die Differenz, d. i. den Verlust an lebendiger Kraft beim Stoſse unelastischer Körper mit d; so ist nach allen Reductionen

$$d = \frac{mm'(v - v')^2}{m + m'} \quad (4.$$

§. 202. Stoſs vollkommen elastischer Körper. Theilt man die Wirkung des Stoſses solcher Körper in zwei Perioden, in deren erstern die Körper an ihren Berührungsflächen zusammengedrückt, und in der zweiten zur Herstellung ihrer ursprünglichen Form mit gleicher Kraft und Geschwindigkeit wieder ausgedehnt werden; so geschieht in der ersten Periode genau das, was bei den unelastischen Körpern Statt hat, es gewinnt nämlich die vorausgehende Kugel, wenn wir die Bezeichnung der vorigen beiden Paragraphe beibehalten, die

Geschwindigkeit $V - v'$, während die nachfolgende jene $v - V$ verliert. Durch den Act der zweiten Periode des Stofses aber gewinnt die erstere Kugel abermals, und zwar aus gleichem Grunde die Geschwindigkeit $V - v'$, und die zweite verliert nochmals die Geschwindigkeit $v - V$, so, dafs wenn C' und C die Geschwindigkeiten der gestofsenen und anstofsenden Kugel nach dem Stofse bezeichnen, sofort $C' = v' + 2(V - v') = 2V - v'$ und $C = v - 2(v - V) = 2V - v$ ist, wobei V den in (§. 199, Gleich. 1) angegebenen Werth besitzt.

§. 203. Besondere Fälle. Für $m = m'$ ist

$$V = \frac{v + v'}{2}, \text{ also } C = v' \text{ und } C' = v,$$

d. h. die Geschwindigkeiten haben sich verwechselt. Diefs gilt auch noch für den Fall, in welchem eine der beiden Kugeln, z. B. jene m' ruht, weil dafür $v' = o$, also $C = o$ und $C' = v$ wird.

Ist für ungleiche Massen $v' = o$, so ist

$$C = \frac{(m - m')v}{m + m'} \text{ und } C' = \frac{2mv}{m + m'};$$

ist nun die ruhende Masse m' sehr bedeutend gegen jene m, so nähert sich von diesen beiden Brüchen der erstere immer mehr und mehr dem Werthe $C = -v$, und der letztere $C' = o$, je mehr man m als Null ansehen kann; hieraus folgt, dafs der anstofsende Körper in diesem Falle nahe mit derselben Geschwindigkeit zurückspringt, dagegen der angestofsene Körper so gut wie keine, oder nur eine äufserst kleine Geschwindigkeit erhält. Ist der Körper M fest oder unbeweglich, so tritt die vorige Bedingung vollkommen ein, indem es so viel ist, als ob M unendlich grofs wäre.

Aus diesem Grunde legt man oft unter jene Massen, welche Stöfse auszuhalten haben, elastische Körper, wie z. B. unter die Schmiede-Ambofse hölzerne Pfosten, damit der Hammer immer wieder zurückgeworfen werde. Auch erklärt sich hieraus, dafs ein horizontal liegender Mensch, welcher nur an beiden Enden gestützt ist oder aufliegt, und auf seiner Brust einen Ambofs trägt, die mit einem Hammer darauf geführten Schläge um so weniger empfindet, je schwerer der Ambofs ist.

§. 204. Durch den Stofs vollkommen elastischer Körper *findet* **kein Verlust** *an lebendiger Kraft Statt.* Sucht man wieder, wie im §. 201, die vorhandenen lebendigen Kräfte beider Massen vor und nach dem Stofse, so ist jene vor dem Stoſse $= mv^2 + m'v'^2$, und die lebendige Kraft nach dem Stoſse

$= mC^2 + m'C'^2 = m(2V - v)^2 + m'(2V - v')^2 = mv^2 + m'v'^2$,

wenn man nämlich für V wieder den Werth aus §. 199 setzt und reducirt; da nun diese Kraft nach dem Stoſse genau eben so groſs, als vor dem Stoſse ist, so findet hier in der That kein Verlust an lebendiger Kraft, folglich auch kein Verlust an Wirkung oder Arbeit Statt.

§. 205. Stoſs von unvollkommen elastischen Körpern. Ein vollkommen elastischer Körper, z. B. eine solche Kugel, würde, gegen eine absolut harte Ebene mit der Geschwindigkeit v normal gestoſsen, mit derselben Geschwindigkeit v zurückspringen. Bei einer unvollkommenen Elasticität dagegen wird diese letztere Geschwindigkeit nur einen gewissen Theil von der anfänglichen v betragen, und $= nv$ seyn, wo $n < 1$ ist.

Bei dem Stoſse solcher Körper wird in der ersten Periode der gestoſsene Körper wieder (genau wie bei unelastischen Körpern) die Geschwindigkeit $V - v'$ gewinnen, und der anstoſsende Körper jene $v - V$ verlieren; durch die in der zweiten Periode entstehende Ausdehnung geht die letztere mit der Geschwindigkeit $n(v - V)$, und verliert sonach von seiner Geschwindigkeit im Ganzen

$$v - V + n(v - V) = (n + 1)(v - V),$$

während der gestoſsene Körper die Geschwindigkeit

$$V - v' + n(V - v') = (n + 1)(V - v')$$

gewinnt. Die Geschwindigkeiten der beiden Massen m und m' sind also nach dem Stoſse beziehungsweise

$$C = v - (n + 1)(v - V) = V - n(v - V), \text{ und}$$

$$C' = v' + (n + 1)(V - v') = V + n(V - v').$$

Der Verlust an lebendiger Kraft ist $d = \dfrac{(1 - n^2)\, m m' (v - v')^2}{m + m'}$.

Für $n = 1$ erhält man daraus wieder die analogen Formeln für vollkommen elastische, für $n = o$ jene für unelastische Körper.

Anmerkung. Die vollkommen elastischen Körper erstatten also jene Arbeit wieder, welche zu ihrer Zusammendrückung verwendet wurde, während die unvollkommen elastischen oder unelastischen Körper davon beziehungsweise nur einen Theil oder gar nichts ersetzen, so, daſs also ein Verlust an Arbeit entsteht, welcher durch $\dfrac{d}{2g}$ gemessen wird, wenn d den durch den Stoſs herbeigeführten Verlust an lebendiger Kraft bezeichnet, und dieser Verlust wird lediglich zur Formänderung der Körper, die aber selten beabsichtigt oder gewünscht wird, verwendet.

Auch läfst sich einsehen, wie elastische Körper eine gewisse Arbeit aufnehmen und aufbewahren können, um sie unter andern Umständen nach und nach wieder zurück zu geben, wie es z. B. mit dem Wärmestoff des Wasserdampfes, ferner den Stahlfedern der Uhren u. s. w. der Fall ist.

§. 206. Mittelpunct des Stofses. Sind an den Puncten A, A' (Fig 138) einer um C mit gleichförmiger Bewegung in der Ebene ACB schwingenden Geraden AC die Massen m und m' angebracht, und soll in dieser der Punct F gefunden werden, in welchem sie gegen einen festen Widerstand, oder auch, auf welchen ein Körper stofsen kann, ohne dafs dadurch der Punct oder die Achse C eine Erschütterung oder Rückwirkung (Prellung) erfährt, folglich der Stofs ganz und gar durch die trägen Massen m, m' aufgehoben wird; so sey $CA = a$, $CA' = a'$ und $CF = x$, ferner seyen v und v' die Geschwindigkeiten, welche die Massen m und m' besitzen, mithin

$$v : v' = a : a' \ldots (1.$$

Die bewegenden Kräfte P und P', welche in diesen Massen m, m' die Geschwindigkeiten v, v' erzeugen, sind (§. 132) den Producten mv und $m'v'$ proportional, so, dafs

$$P : P' = mv : m'v' = ma : m'a'$$

(wegen Gleich. 1), oder

$$P . m'a' = P' . ma \ldots (2$$

Statt findet.

Soll nun durch einen Stofs auf den Punct F die Achse C keinen Druck oder Stofs erleiden, so darf dabei um den Punct F keine Drehung Statt finden, folglich müssen die statischen Momente der Kräfte P und P' in Beziehung auf diesen Punct einander gleich, d. i. es mufs

$$P . AF = P' . A'F \quad \text{oder} \quad P(a - x) = P'(x - a')$$

seyn. Diese Gleichung durch die vorige (2 dividirt gibt

$$\frac{a - x}{m'a'} = \frac{x - a'}{ma}, \text{ und daraus folgt } x = \frac{ma^2 + m'a'^2}{ma + m'a'}.$$

Genau eben so erhält man, wenn ein ganzes System von materiellen Puncten m, m', m'' ... um C schwingt, deren Abstände davon a, a', a'' ... sind, für die Entfernung dieses in der Ebene, welche durch den Schwerpunct des Systems senkrecht auf die Achse geht, angenommenen Punctes F, welchen man den Mittelpunct des Stofses nennt, von der Drehachse:

$$x = \frac{ma^2 + m'a'^2 + m''a''^2 + \ldots}{ma + m'a' + m''a'' + \ldots}.$$

Handelt es sich nicht blofs um einzelne materielle Puncte, sondern um einen Körper, dessen Masse $= M$ ist, und wovon der Schwerpunct von der Drehungsachse den Abstand d hat; so ist

$$m a^2 + m' a'^2 + \ldots = \mathfrak{M}$$

das Moment der Trägheit, und

$$m a + m' a' + \ldots = M d$$

das statische Moment des im Schwerpuncte vereinigten Gewichtes des Körpers von der Drehungsachse, folglich $x = \frac{\mathfrak{M}}{M d}$.

Da nun aber auf diese Weise der Mittelpunct des Stofses F, wie der Ausdruck in §. 170 zeigt, genau so, wie der Mittelpunct des Schwunges bestimmt wird, so fallen diese beiden Puncte in einen zusammen, oder sie bilden nur einen einzigen Punct.

Führt man mit einem Hammer einen Streich gegen einen Körper, so mufs man diesen so treffen, dafs der Schlag durch den Mittelpunct des Stofses des Hammers geht, wenn man in der Hand keine Prellung erfahren will. Dasselbe mufs überhaupt auch bei Hammerwerken beobachtet werden, weil sonst in der Achse oder Hammerhülse nachtheilige Erschütterungen entstehen.

Man findet mit Rücksicht auf diese Eigenschaft den Mittelpunct des Stofses eines Hammers durch Versuche, indem man den Hammer auf die Kante eines Prisma schlagen läfst, und dabei das Prisma gegen die nur leicht gehaltene Umdrehungsachse des Hammers so lange hin und her schiebt, bis in dieser keine Erschütterung oder Bewegung wahr zu nehmen ist; oder noch einfacher, indem man diesen Punct als Mittelpunct des Schwunges nach §. 153 behandelt und bestimmt.

Aufgabe. Der Körper CB (Fig. 130), dessen Masse M ist, kann um eine horizontale, durch C gehende, auf der Ebene der Figur senkrechte Achse, wie ein Pendel schwingen; wenn nun gegen dieses ruhende zusammengesetzte Pendel eine Kugel E, von der Masse m in der Richtung ED, wobei diese Gerade in der Ebene der Figur liegen soll, gerade und central (in Beziehung auf E) mit der Geschwindigkeit v anstöfst, so soll die Winkelgeschwindigkeit u gefunden werden, mit welcher sich das Pendel im ersten Augenblicke nach dem Stofse fortbewegt.

Es sey der Hebelsarm der Stofskraft $CD = a$, das Moment der Trägheit des Pendels in Beziehung auf die Achse C gleich $\mathfrak{M}$, und die auf den Punct D reducirte Masse M desselben $= M'$, also (§. 159)

$$M' = \frac{\mathfrak{M}}{a^2} \ldots (n;$$

so ist der Erfolg des Stofses gerade so, als ob eine in D befindliche ruhende Masse M' von der Kugel oder Masse m mit der Geschwindigkeit v in der Richtung ED gestofsen würde, welche im ersten Augenblicke nach dem Stofse in derselben Richtung (als Tangente des Kreises, welchen der

Punct D um C beschreibt) mit dieser Geschwindigkeit ausweicht; nimmt man daher beide Körper als unelastisch an, so hat man (§. 200, Formel 3) $V = \frac{mv}{M' + m}$, oder wenn man für M' den Werth aus (n setzt, und gleich die Winkelgeschwindigkeit u des Pendels bestimmt, also $V = au$ setzt, und mit a abkürzt:

$$u = \frac{mav}{\mathfrak{M} + ma^2} \dots (o.$$

Benützt man nun ein solches Pendel von großer Masse nach Robins, in welchem Falle es dann das ballistische Pendel genannt wird, zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Gewehr- und Geschützkugeln; so sey α der Elongationswinkel, welchen das Pendel durch den angenommenen Stoß von der Kugel m beschreibt, und der Abstand des Mittelpunctes des Schwunges F des Pendels von der Masse $M + m$ (weil nämlich die abgeschossene Kugel m im Pendel stecken bleibt) von der Achse C, d. i. $CF = l$, so erhebt sich dabei dieser Punct F um den Sinusversus des zugehörigen Bogens $l\alpha$, nämlich um $l\ Sinv\ \alpha = l\ (1 - Cos\ \alpha)$, wozu (§. 142, Gleich. 2 und §. 143) eine Anfangsgeschwindigkeit

$$V' = \sqrt{[2gl\ (1 - Cos\ \alpha)]},$$

also eine Winkelgeschwindigkeit

$$(\text{wegen } V' = lu')\ u' = \frac{V'}{l} = \sqrt{\left[\frac{2g}{l}(1 - Cos\ \alpha)\right]}$$

gehört, und da diese der vorigen in (1 ausgedrückten gleich seyn muſs, so hat man, $u = u'$ gesetzt, und aus der entstehenden Gleichung v bestimmt, für die Geschwindigkeit der ganz nahe auf das Pendel abgeschossenen Kugel

$$v = \frac{\mathfrak{M} + ma^2}{ma} \sqrt{\left[\frac{2g}{l}(1 - Cos\ \alpha)\right]},$$

wobei die Richtung, damit die Achse nicht zu sehr erschüttert wird, möglichst durch den Mittelpunct des Schwunges oder Stoſses gehen soll.

Wäre z. B. $a = l = 3$ Fuſs, $\alpha = 20$ Grad, $m = 1$, und (am einfachsten nach §. 170, Anmerk. 1 zu finden) $\mathfrak{M} = 5400$ Pfund, so wäre wegen $1 - Cos\ 20^\circ = 1 - \cdot 9397 = \cdot 0603$, und $\frac{2g}{l} = \frac{62}{3} = 20\cdot 667$, sofort die Wurzelgröſse $\sqrt{1\cdot 2462} = 1\cdot 116$, und daher

$$v = 1803 \times 1\cdot 116 = 2012 \text{ Fuſs.}$$