ripherie, so ist $2r\pi = vT$, also $T = \frac{2r\pi}{v}$, oder, wenn man für r den Werth aus (1 setzt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \ldots (2.$$

Nach §. 151 (Gl. 1) ist die Schwingungszeit des einfachen Kreispendels von der Länge h sofort $T = \pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, nämlich halb so groſs, als die eben bestimmte; ist also die Länge eines einfachen Kreispendels der Höhe des Centrifugalpendels gleich, so ist die Umlaufszeit des letztern doppelt so groſs, als die Schwingungszeit des erstern.

Anmerkung. Das Pendel CA kann sich niemals horizontal stellen, weil dafür $h = o$, also $v = r\sqrt{\frac{g}{h}} = \infty$, d. i. unendlich groſs seyn müſste. Haben zwei conische Pendel gleiche Höhen, so haben sie auch gleiche Umlaufszeiten.

Viertes Kapitel.

Von dem Momente der Trägheit und der Bestimmung des Mittelpunctes des Schwunges.

§. 159. Begriff des Momentes der Trägheit.

Jede Masse setzt der Kraft, welche sie in Bewegung bringen will, vermöge ihrer Trägheit, einen Widerstand entgegen, welcher zufolge des allgemein giltigen Satzes, daſs jede Reaction oder Gegenwirkung der Action oder Wirkung gleich und entgegengesetzt ist, der bewegenden Kraft gleich ist, und durch diese gemessen werden kann; dieser Widerstand nimmt also (§. 146, Relat. α) mit der Gröſse der Masse und der Geschwindigkeit zu. Befindet sich nun im Puncte A der steifen, um C drehbaren Geraden CA (Fig. 138) eine bloſs träge Masse M (deren Gewicht also nicht in Betracht kommt), und wirkt in dieser die constante Kraft P senkrecht auf AC, so nimmt diese Masse (§. 133) eine gleichförmig beschleunigte Bewegung an, erlangt am Ende der ersten Secunde die Geschwindigkeit oder Beschleunigung (§. 146) $G = \frac{P}{M}g$, und beschreibt in dieser Zeit den Kreisbogen $AB = \frac{1}{2}G$. Nimmt man jetzt die Masse M von A weg, und bringt in irgend einem andern Puncte A' dieser Geraden AC eine Masse M' an, so erzeugt die noch immer in A wirksame Kraft P auf A', also auch auf die Masse M' den constanten Druck $P' = P \cdot \frac{AC}{A'C} = P\frac{a}{a'}$, wenn man $AC = a$ und $A'C = a'$ setzt. Die Beschleunigung dieser Masse M' ist $G' = \frac{P'}{M'}g$, und der in der ersten Secunde zurückgelegte Weg $A'B' = \frac{1}{2}G'$. Soll nun die Masse M' im letztern Falle der drehenden Bewegung, welche durch die Kraft P erzeugt wird, genau eben so, wie die Masse M im erstern Falle widerstehen, so mufs die Gerade AC in beiden Fällen dieselbe Winkelgeschwindigkeit annehmen, folglich der Punct B' in der Geraden CB liegen, und sonach die Proportion Bog. AB : Bog. $A'B' = a : a'$, oder wenn man für AB und $A'B'$ die Werthe setzt, auch $\frac{1}{2}G : \frac{1}{2}G' = a : a'$, oder $\frac{P}{M}g : \frac{P}{M'}g\frac{a}{a'} = a : a'$ Statt finden, woraus sofort folgt:

$$Ma^2 = M'a'^2 \ldots (1,$$

d. h. die beiden trägen Massen M und M' widerstehen jede für sich der drehenden Bewegung auf ganz gleiche Weise, wenn jede in das Quadrat ihres Abstandes vom Drehungspuncte multiplicirt dasselbe Product gibt.

Das Product einer in einem einzigen Puncte vereinigt gedachten Masse in das Quadrat ihres Abstandes vom Drehungspuncte heifst ihr Moment der Trägheit. Zwei verschiedene Massen widerstehen also der drehenden Bewegung auf gleiche Art, wenn ihre Trägheitsmomente gleich sind.

Bezeichnet man das Moment der Trägheit der Masse M mit $\mathfrak{M}$, so ist

$$\mathfrak{M} = Ma^2 \ldots (2,$$

und aus der vorigen Gleichung (1

$$M' = \frac{\mathfrak{M}}{a'^2} \ldots (3,$$

d. h. man findet die Masse M', welche im Abstande a' der drehenden Bewegung eben so wie die Masse M im Abstande a widersteht, indem man das Moment der Trägheit der Masse M durch das Quadrat des Abstandes a' dividirt.

Anmerkung. Oft ist es bequemer, anstatt den Abständen a, a' die Geschwindigkeiten v, v' zu nehmen, welche die Puncte A und A' gleichzeitig besitzen; da nun $v : v' = a : a'$ Statt findet, so ist auch für die beiden gleichgeltenden Massen M, M' sofort aus (1 :

$$Mv^2 = M'v'^2 \ldots (4.$$

Man nennt übrigens das Product einer Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit ihre lebendige Kraft.

§. 160. Moment der Trägheit eines Körpers oder eines Systems materieller Puncte. Sind $m, m', m''\ldots$ die Elemente der Masse M eines Körpers, welcher sich um irgend eine Achse dreht, und $r, r', r''\ldots$ die Abstände dieser Puncte von der Drehungsachse; so ist das Moment der Trägheit des ganzen Körpers (Gleich. 2 des vorigen Paragraphes)

$$\mathfrak{M} = mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots \text{ (a.}$$

Anmerkung. Sind $r, v'\ldots$ die Geschwindigkeiten der einzelnen materiellen Puncte, also $mv^2, m'v'^2\ldots$ ihre lebendigen Kräfte, so ist, wenn die gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit dieser Puncte $= V$ ist, sofort (§. 127, Gleich. 1) $v = rV,\ v' = r'V\ldots,$
und daher die Summe der lebendigen Kräfte

$$S = mv^2 + m'v'^2 + \ldots = V^2(mr^2 + m'r'^2 + \ldots),$$

oder mit Rücksicht auf die vorige Gleichung (*a* auch $S = \mathfrak{M}V^2 \ldots$ (*b*, d. h. die lebendige Kraft eines um eine Achse sich drehenden Körpers ist gleich dem Momente der Trägheit dieses Körpers, in das Quadrat seiner Winkelgeschwindigkeit multiplicirt.

§. 161. Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf eine Achse, welche mit einer durch den Schwerpunct des Körpers gehende Achse parallel ist. Es sey XY (Fig. 139) eine durch den Schwerpunct O eines Körpers gehende Achse, $X'Y'$ eine andere mit dieser parallelen Achse, $\mathfrak{M}$ das Moment der Trägheit des Körpers auf die erstere, und $\mathfrak{M}'$ jenes auf die letztere Achse bezogen; sind ferner $r, r'\ldots$ die Abstände der materiellen Puncte $m, m'\ldots$ des Körpers von der Achse XY, so wie $R, R'\ldots$ jene von der Achse $X'Y'$, so ist nach den vorigen Paragraphen

$$\mathfrak{M} = mr^2 + m'r'^2 + \ldots,\quad \mathfrak{M}' = mR^2 + m'R'^2 + \ldots,$$

und wenn M die Masse des Körpers ist, $M = m + m' + \ldots$

Legt man durch einen der materiellen Puncte m eine Ebene PQ senkrecht auf die Achsen, und zieht, wenn A und A' die Durchschnittspuncte damit sind, in dieser Ebene die Geraden AA', Am, $A'm$ und auch noch mn senkrecht auf AA', so ist im Dreiecke $AA'm$ nach einem bekannten Satze der Geometrie

$$A'm^2 = AA'^2 + Am^2 \mp 2AA'.An$$

(wobei — oder + gilt, je nachdem der W. A spitz oder stumpf ist), oder wenn man den Abstand der Achsen von einander $AA' = d$ und $An = x$ setzt, auch $R^2 = d^2 + r^2 - 2dx$.

Auf ganz gleiche Weise hat man für den materiellen Punct m' des

Körpers $R'^2 = d^2 + r'^2 - 2dx'$, und so auch ähnliche Relationen für die übrigen Puncte. Werden diese Gleichungen beziehungsweise mit m, m' ... multiplicirt und dann addirt, so entsteht

$$mR^2 + m'R'^2 + \ldots =$$
$$= (mr^2 + m'r'^2 + \ldots) + d^2(m + m' + \ldots) \mp 2d(mx + m'x' + \ldots).$$

Denkt man sich nun durch die Achse XY eine Ebene senkrecht auf jene Ebene, welche durch beide Achsen geht, und nimmt diese zur Momentenebene; so sind x, x' ... die Abstände der materiellen Puncte m, m' ... von dieser Ebene, und weil sie durch den Schwerpunct O des Körpers geht, so ist sofort (§. 26, Anmerk. 2) $mx + m'x' \ldots = 0$, mithin die vorige Gleichung mit Rücksicht auf die obigen Werthe:

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Md^2 \ldots (1,$$

d. h. das Moment der Trägheit eines Körpers auf irgend eine Achse bezogen, ist gleich dem Trägheitsmoment dieses Körpers in Beziehung auf eine, durch seinen Schwerpunct gehende, mit der erstern parallele Achse vermehrt um das Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat des gegenseitigen Abstandes der beiden parallelen Achsen.

§. 162. Moment der Trägheit einer geraden Linie, die sich um einen ihrer Endpuncte dreht.

Es drehe sich die Gerade $AB = l$, die eine über die ganze Länge gleich vertheilte Masse M besitzen soll, um eine senkrecht auf AB durch A gehende Achse YY' (Fig. 140) und es sey m die Masse der Längenheineit, also $M = lm$.

Errichtet man in B auf AB ein Perpendikel, und schneidet darauf $BC = BD = AB$ ab, so wird für ein Element $rs = l'$ dieser Geraden AB die Masse $= ml'$, und dessen Moment der Trägheit nach §. 159 (da man dieses Element rs als einen materiellen Punct ansehen kann), $\mathfrak{M}' = ml' . Ar^2$; da aber, wenn rp senkrecht auf AB bis zur Geraden AC gezogen wird, $rp = Ar$ (weil $BC = AB$) ist, so ist das Trägheitsmoment auch $\mathfrak{M}' = ml' . \overline{rp}^2$, oder, wenn man mit π multiplicirt und dividirt auch $\mathfrak{M}' = \frac{m}{\pi} rp^2 \pi l'$.

Nun ist aber $rp^2 \pi$ die Kreisfläche vom Halbmesser rp, mithin $rp^2 \pi l'$ der Inhalt des Cylinders von dieser kreisförmigen Grundfläche und Höhe $rs = l'$, welcher sofort durch Umdrehung des Rechteckes rq um AB erzeugt wird.

Summirt man daher alle die einzelnen Trägheitsmomente, welche auf dieselbe Art entstehen, wenn man die ganze Länge l der Linie AB

in ihre Elemente zerlegt, so erhält man $\frac{m}{\pi}$ multiplicirt mit der Summe aller dieser kleinen Cylinder, welche zusammen den durch Umdrehung des Dreieckes ABC um AB entstehenden Kegel ausmachen, dessen Basis den Halbmesser $BC = l$ hat, und Höhe $AB = l$ ist; da nun der Inhalt dieses geraden Kegels $= \frac{1}{3} BC^2 \pi . AB = \frac{1}{3} . l^2 \pi . l = \frac{1}{3} l^3 \pi$ ist, so hat man für das gesuchte Moment der Trägheit:

$$\mathfrak{M}' = \frac{m}{\pi} . \tfrac{1}{3} l^3 \pi = \tfrac{1}{3} m l . l^2, \text{ d. i. } \mathfrak{M}' = \tfrac{1}{3} M l^2 \ . \ . \ (1.$$

Die materielle gerade Linie AB widersteht also durch ihre träge Masse M bei ihrer Umdrehung um die Achse YY' genau so, als ob der dritte Theil ihrer Masse M in dem Endpuncte B vereinigt, und AB ohne Masse wäre.

Ist R der Punct, in welchen man sich die ganze Masse M vereinigt denken kann, so muſs $M . AR^2 = \mathfrak{M}' = \frac{1}{3} M l^2$ seyn, woraus

$$AR = \tfrac{1}{3} l \sqrt{3} = \cdot 577\, l \ . \ . \ . \ (m$$

folgt. Dieser so bestimmte Punct R wird manchmal der Schwingungspunct, auch Mittelpunct der Trägheit der materiellen Linie AB genannt.

Hat z. B. eine dünne Stange eine Länge von 10 Fuſs und ein Gewicht von 6 Pfund, so hat man, um das Moment der Trägheit dieser Stange zu finden, wenn sie sich um einen ihrer Endpuncte umdreht, in der vorigen Formel $l = 10$ und $M = 6$ (weil die Masse durch dieselbe Zahl wie das Gewicht ausgedrückt wird) zu setzen, und man erhält

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} . 6 . 100 = 200 \text{ Pfund},$$

d. h. eine Masse von 200 Pfund würde im Abstand von 1 Fuſs vom Drehungspuncte durch ihre Trägheit der drehenden Bewegung denselben Widerstand, wie diese Stange leisten.

Anmerkung 1. Geht die Umdrehungsachse YY' durch den Schwerpunct der Geraden AB, so findet man das Moment der Trägheit für diese Achse aus der Gleichung (1 des vorigen Paragraphes, aus welcher $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' - M d^2$ folgt, sofort $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M l^2 - M (\frac{1}{2} l)^2$, d. i. $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} M l^2 \ . \ . \ . \ (2.$

Anmerkung 2. Zieht man zu AB durch irgend einen Punct E der Achse die Parallele EF, und stellt sich vor, daſs sich das Rechteck AF, deren gleich vertheilte Masse $= M$ seyn soll, um diese Achse YY' umdreht, so darf man zur Bestimmung des Momentes der Trägheit diese Fläche nur in unendlich schmale, mit AB parallel laufende Streifen zerlegt denken, wovon jeder, dessen Masse $= m$ seyn mag, als eine materielle Linie angesehen werden kann, die sich um YY' umdreht; da nun von jedem solchen Streifen nach dem Vorigen das Trägheitsmoment $= \frac{1}{3} m l^2$ ist, so darf man diese nur summiren, oder, wenn n solcher Streifen vorhanden, diesen Ausdruck n Mal nehmen, um $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} n m l^2 = \frac{1}{3} M l^2$, also genau den vorigen Ausdruck (1 zu erhalten: die Dimension nach der Richtung der Umdrehungsachse erscheint also nur mittelbar durch die Masse M des Rechteckes.

§. 163. Moment der Trägheit eines Rechteckes und Parallelopipedes. Es drehe sich das Rechteck AD (Fig. 141) um eine durch dessen Schwerpunct O senkrecht auf die Ebene AD gehende Achse YY'; man denke sich das Rechteck in unendlich schmale, mit AB parallele Streifen, wie ab' zerlegt, so kann man diese Flächenelemente als materielle Linien behandeln, und ihre Trägheitsmomente nach dem vorigen Paragraphe ausdrücken. Ist nämlich m die Masse eines dieser unendlich schmalen Streifen, so ist das Moment der Trägheit desselben hinsichtlich einer durch seinen Schwerpunct n gehenden, mit YY' parallelen Achse (voriger Paragraph Gl. 2) $= \frac{1}{12} m a^2$, wenn $CD = AB = a$ gesetzt wird, folglich in Beziehung auf die Achse YY' (§. 161, Gl. 1) $\mathfrak{m} = \frac{1}{12} m a^2 + m x^2$, wenn man $On = x$ setzt. Für das folgende Flächenelement ist eben so $\mathfrak{m}' = \frac{1}{12} m' a^2 + m' x'^2$ u. s. w. so, daſs das Trägheitsmoment der ganzen Fläche des Rechteckes, dessen Masse $m + m' + \ldots = M$ seyn soll,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}' + \ldots = \frac{1}{12} a^2 (m + m' + \ldots) + m x^2 + m' x'^2 + \ldots,$$

oder auch, da $m x^2 + m' x'^2 \ldots$ das Moment der Trägheit der materiellen Linie EF vorstellt (weil diese durch die Mittelpuncte der Massen $m, m' \ldots$ oder schmalen Streifen geht), und (§. 162, Gl. 2) den Werth $\frac{1}{12} M b^2$ hat, wenn man $EF = AC = b$ setzt:

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{12} M a^2 + \frac{1}{12} M b^2 = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \ldots (1.$$

Geht die Achse durch einen Winkelpunct, z. B. durch A, bleibt aber der vorigen YY' parallel, so ist für diese Achse (§. 161, 1) $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + M . AO^2$, oder wegen $AO^2 = AF^2 + OF^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2$, wenn man diesen und den Werth für $\mathfrak{M}$ aus der vorigen Gleichung setzt und reducirt: $\mathfrak{M}' = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) \ldots (2.$

Geht die Achse durch den Halbirungspunct J der Breite des Rechteckes aber immer noch senkrecht auf die Ebene desselben, so ist $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) + M . JO^2$, oder wegen $JO = \frac{1}{2} a$ auch

$$\mathfrak{M} = M (\tfrac{1}{3} a^2 + \tfrac{1}{12} b^2) \ldots (3.$$

Ist b so klein, daſs $\frac{1}{12} b^2$ gegen $\frac{1}{3} a^2$ vernachläſsigt werden darf, so ist $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M a^2$, wie bei der materiellen geraden Linie (Gl. 1, §. 162).

Anmerkung. Dieselben Ausdrücke oder Formeln 1), 2), 3) gelten auch für das Moment der Trägheit eines rechtwinklichten Parallelopipedes, welches das hier betrachtete Rechteck AD zur Grundfläche hat, wenn man dabei nur unter M die Masse dieses Körpers versteht, indem nur dadurch die mit der Umdrehungsachse parallele Dimension, also hier die Höhe des Parallelopipedes Einfluſs hat.

Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, darf man sich nur das Parallelopiped in unendlich schmale, mit der Grundfläche AD (Fig. 141, a) parallele Schichten zerlegt denken, und die Summe der Trägheitsmomente dieser Schichten, welche nach den vorigen Formeln bestimmt werden können, für das Moment der Trägheit des Körpers nehmen. Ist nämlich m die Masse einer solchen unendlich dünnen Schichte, und n die Anzahl der Schichten, folglich $nm = M$ die Masse des Parallelopipedes, so ist das Trägheitsmoment einer solchen Schichte, wenn z. B. die Achse durch die Kante AA' geht (Formel 2) $\mathfrak{m} = \frac{1}{3} m\,(a^2 + b^2)$, also auch

$$n\mathfrak{m} = \tfrac{1}{3} nm\,(a^2 + b^2),\ \text{d. i.}\ \mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} M\,(a^2 + b^2),$$

welches genau wieder die betreffende Formel 2 für die Ebene ist. Dasselbe gilt auch für die übrigen Fälle, in welchen die Umdrehungsachse durch den Schwerpunct oder durch JJ' geht.

§. 164. Moment der Trägheit eines rechtwinklichten Dreieckes. Es gehe die Umdrehungsachse für das rechtwinklichte Dreieck ABC (Fig. 142) durch die Spitze des rechten Winkels A senkrecht auf die Dreiecksebene. Ergänzt man das Dreieck, dessen Masse $= M$ seyn soll, zu dem Rechtecke AD, so ist $2M$ die Masse desselben, und das Moment der Trägheit in Beziehung auf die genannte Achse ist (vor. Paragr. Gl. 2)

$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{3} 2M\,(AB^2 + AC^2) = \tfrac{2}{3} Md^2,$$

wenn man die Hypotenuse oder Diagonale $BC = d$ setzt. Das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ des Dreieckes BCD, in Beziehung auf den Drehungspunct D, ist so groſs, wie jenes des Dreieckes ABC in Beziehung auf den genannten Punct A, dagegen in Beziehung auf eine durch dessen Schwerpunct O gehende, mit der vorigen parallele Achse (§. 161, Gl. 1) $= \mathfrak{M} - M\,(\frac{2}{3} ED)^2$, (wegen $DO = \frac{2}{3} DE$, §. 48) $= \mathfrak{M} - \frac{1}{9} Md^2$, und endlich in Beziehung auf eine Achse, welche durch A geht (§. 161 Gl. 1) $= \mathfrak{M} - \frac{1}{9} Md^2 + M \,.\, AO^2 = \mathfrak{M} + \frac{1}{3} Md^2$ (wegen $AO = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} d$); wird nun noch das gesuchte Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ des Dreieckes ABC hinzugefügt, so muſs die Summe dem obigen Momente $\mathfrak{M}'$ des Rechteckes gleich seyn, und man erhält $\mathfrak{M} + \mathfrak{M} + \frac{1}{3} Md^2 = \frac{2}{3} Md^2$, und daraus $\mathfrak{M} = \frac{1}{6} Md^2$, oder auch wegen $d^2 = a^2 + b^2$, wenn man die beiden Catheten des Dreieckes mit a und b bezeichnet:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6} M\,(a^2 + b^2)\ .\ .\ .\ (1.$$

Derselbe Ausdruck gilt auch wieder für das Trägheitsmoment eines geraden dreiseitigen Prisma, welches das hier betrachtete Dreieck ABC zur Grundfläche, und wobei die Umdrehungsachse dieselbe Lage hat. M bezeichnet dann die Masse des Prisma.

§. 165. Moment der Trägheit eines gleichschenkligen Dreieckes. Es sey in dem Dreiecke ABC

(Fig. 143) $AC = BC = d$, $CD = h$ und M die Masse desselben. Zerlegt man dasselbe in die beiden gleichen rechtwinkelichten Dreiecke ACD und BCD, wovon also jedes die Masse $\frac{1}{2}M$ besitzt, so ist das Trägheitsmoment eines jeden derselben in Beziehung auf eine durch D senkrecht auf die Ebene ABC gehende Achse (vorigen Paragraphs) $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} M d^2$, also für beide zusammen $= \frac{1}{6} M d^2$. In Beziehung auf eine durch den Schwerpunct O des Dreieckes ABC mit der vorigen parallelen Achse ist (§. 161)

$\mathfrak{M}' = \frac{1}{6} M d^2 - M \cdot OD^2 = \frac{1}{6} M d^2 - \frac{1}{9} M h^2$ (wegen $OD = \frac{1}{3} h$), und für eine durch C gehende parallele Achse (§. 161)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + M \cdot OC^2, \text{ oder wegen } OC = \tfrac{2}{3} h,$$

und wenn man für $\mathfrak{M}'$ den Werth setzt und reducirt:

$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{d^2}{6} + \frac{h^2}{3}\right)$$

als Moment der Trägheit des gleichschenkligen Dreieckes, welches sich um eine durch C gehende, auf der Ebene ABC senkrechte Achse dreht.

Derselbe Ausdruck gilt natürlich wieder für ein senkrechtes Prisma von der Grundfläche ABC, dessen Masse $= M$ ist, wenn die Umdrehungsachse durch die Seite oder Kante C geht.

§. 166. Moment der Trägheit eines regelmäfsigen Vieleckes. Geht die Umdrehungsachse durch den Mittel- oder Schwerpunct C des regelmäfsigen Vieleckes in Fig. 144 senkrecht auf die Ebene desselben, so kann man dasselbe, wenn es n Seiten besitzt, in eben so viele gleiche gleichschenklichte Dreiecke zerlegen, für welche man das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}'$ nach dem vorigen Ausdrucke findet. Ist nämlich m die Masse eines dieser Dreiecke, also $nm = M$ jene des Polygons, so ist, wenn man den Halbmesser des umschriebenen Kreises $CA = CB = R$, und jenen des eingeschriebenen $CN = r$ setzt, nach der vorigen Formel $\mathfrak{M}' = m\left(\frac{R^2}{6} + \frac{r^2}{3}\right)$, also auch $n\mathfrak{M}' = nm\left(\frac{R^2}{6} + \frac{r^2}{3}\right)$, d. i. für das Vieleck

$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{R^2}{6} + \frac{r^2}{3}\right) \ldots (1,$$

ein Ausdruck, welcher zugleich auch für das Moment der Trägheit eines regelmäfsigen senkrechten Prisma von der Masse M gilt, welches dieses Vieleck zur Grundfläche hat, und sich um seine geometrische Achse umdreht.

§. 167. Moment der Trägheit eines Kreises oder Cylinders. Läſst man in dem vorigen Polygon die Seitenzahl ohne Ende zunehmen, so nähern sich R und r einander immer mehr, und wenn die Seitenzahl unendlich groſs wird, also das Vieleck in einen Kreis übergeht, so sind R und r als Halbmesser desselben einander vollkommen gleich. In diesem Falle hat man für das Moment der Trägheit eines Kreises oder auch eines senkrechten Cylinders von kreisförmiger Basis, welcher sich um seine geometrische Achse umdreht, wenn dessen Masse $= M$ ist:

$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{r^2}{6} + \frac{r^2}{3}\right), \text{ d. i. } \mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} M r^2 \ldots (1.$$

§. 168. Moment der Trägheit eines Kreisbandes oder hohlen Cylinders. Sind R und r der äuſsere und innere Halbmesser eines Kreisbandes von gleicher Breite oder auch hohlen Cylinders von gleicher Dicke, so sey M' die Masse des vollen äuſsern und m' jene des vollen innern Kreises oder Cylinders, so ist die Masse des Ringes oder hohlen Cylinders $M = M' - m' = \pi(R^2 - r^2)$, oder $\pi l (R^2 - r^2)$ (wenn l die Höhe des senkrechten Cylinders und die Masse dem Inhalte proportional ist). Das Moment der Trägheit des ganzen äuſsern Cylinders ist $\mathfrak{M}' = \frac{1}{2} M' R^2$, und jenes des innern als voll gedacht, $\mathfrak{M}'' = \frac{1}{2} m' r^2$, mithin das Moment für den hohlen Cylinder $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}'' = \frac{1}{2}(M' R^2 - m' r^2)$, oder wegen

$$M' = R^2 \pi l \text{ und } m' = r^2 \pi l, \text{ auch}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi l (R^4 - r^4) = \tfrac{1}{2}\pi l (R^2 - r^2)(R^2 + r^2), \text{ oder endlich}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} M (R^2 + r^2) \ldots (2.$$

§. 169. Moment der Trägheit einiger anderer Körper. Man findet für ein Kugelsegment, welches sich um seine geometrische Achse dreht, wenn r der Halbmesser der Kugel, a die Höhe des Segmentes und m die Masse der kubischen Einheit ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi}{30} a^3 m (20 r^2 - 15 a r + 3 a^2) \; (1.$$

Für die Kugel, welche sich um einen Durchmesser dreht, ist $a = 2r$, folglich $\mathfrak{M} = \frac{8}{15} r^5 \pi m = \frac{2}{5} M r^2$ (2, wenn M die Masse der Kugel bezeichnet. (Ihr Inhalt ist $\frac{4}{3} r^3 \pi$, daher $M = \frac{4}{3} r^3 \pi m$.)

Für eine Pendellinse, welche aus zwei gleichen Kugelsegmenten besteht, die mit ihren Grundflächen deckend auf einander liegen, und sich um eine Achse dreht, die mit ihrer geometrischen parallel ist und davon den Abstand l hat, ist, wenn r, a und m die vorige Bedeutung haben:

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi}{15} a^3 m (20 r^2 - 15 a r + 3 a^2) + \tfrac{2}{3} \pi a^2 l^2 m (3 r - a) \quad (3.$$

Für einen Cylinder, welcher sich um eine Achse dreht, die durch den Schwerpunct desselben auf der geometrischen Achse senkrecht steht, dessen Halbmesser $= r$, Länge $= l$ und Masse $= M$ ist, findet man

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} M (3 r^2 + l^2).$$

Folglich auch für eine mit dieser im Abstande d parallele Achse, wie diefs bei einer cylinderischen Pendelstange vorkommt (§. 161)

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} M (3 r^2 + l^2) + M d^2.$$

Für das Trägheitsmoment eines Schwungrades (Fig. 145) mit 6 Radarmen findet man, wenn der äufsere Halbmesser R, der innere r, folglich die Radkranzbreite $b = R - r$, ferner die Breite eines der parallelopipedischen Radarme $mn = b'$, und die Länge derselben bis zum Mittelpuncte gemessen $Ca = r$, die Masse des Radkranzes $= M$, und jene eines Armes $= m$ ist, sofort für den Radkranz (§. 168, Gleich. 2) $\mathfrak{M}' = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2)$, und für die 6 Radarme, deren Länge man hier ohne Fehler bis zum Mittelpuncte rechnen, und dafür die Nabe pq auslassen kann (§. 163, Gl. 3) $\mathfrak{M}'' = 6 m (\frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{12} b'^2)$, wobei man jedoch ohne Nachtheil $\frac{1}{12} b'^2$ auslassen, und sonach $\mathfrak{M}'' = 2 m r^2$ setzen kann. Nun ist das gesuchte Trägheitsmoment $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, folglich, wenn man substituirt:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} M (R^2 + r^2) + 2 m r^2 \ldots (6.$$

Anmerkung. Dreht sich irgend ein prismatischer Körper AB (Fig. 146) um eine durch C gehende, auf der verlängerten Grundfläche AB senkrechte Achse, und ist $CO = a$ der Abstand des Schwerpunctes O von der Drehachse, und $ON = f$ jener des Punctes N von O, in welchem man sich in Bezug auf das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ des Körpers gegen die Achse C die Masse M des Prisma vereinigt denken kann; so ist dieses Moment in Beziehung auf eine durch O gehende, mit der vorigen parallelen Achse $\mathfrak{M}' = M f^2$, und in Beziehung auf die durch C gehende Achse $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + M a^2$, also, wenn man für $\mathfrak{M}'$ den Werth setzt:

$$\mathfrak{M} = M (a^2 + f^2).$$

Sind nun, wie es bei Maschinen oft vorkommt, die Dimensionen des Prisma gegen CO klein, so fällt NO oder f so klein aus, dafs man ohne Fehler f^2 gegen a^2 vernachläfsigen kann, und dann ist ganz einfach $\mathfrak{M} = M a^2$ so, als ob die Masse des Körpers in seinem Schwerpuncte vereinigt wäre.

Beispiele.

1. Schwingt z. B. wie bei den deutschen Walkmühlen ein Hammer bd (Fig. 146, a) an einem langen Stiel um eine durch C auf die verlängerte

Ebene $b\,d$ senkrechte Achse, und ist $CO = l$, $mn = a$ und $bc = b$; so ist genau: $\mathfrak{M} = M(l^2 + \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{12}b^2)$, da man aber immer $\frac{1}{12}a^2$ gegen l^2, und öfter auch noch $\frac{1}{12}b^2$ auslassen kann, so ist in diesen Fällen $\mathfrak{M} = M(l^2 + \frac{1}{12}b^2)$ oder $\mathfrak{M} = Ml^2$.

2. Ist beim obigen Schwungrad $R = 10$, $r = 9\cdot5$, $b' = \frac{1}{3}$ Fufs, ferner $M = 12000$ und $m = 250$ Pfund; so findet man nach der Formel (6 $\mathfrak{M} = 1186625$ Pfund, d. h. eine in der Peripherie eines Kreises von 1 Fufs Halbmesser vertheilte Masse von dieser Gröfse, würde der drehenden Bewegung eben so, wie dieses Schwungrad widerstehen.

3. Von zwei concentrisch mit einander verbundenen kreisrunden Scheiben (Fig. 147) ist der Halbmesser der gröfsern $CA = 3$, und der kleinern $CB = 2$ (die Benennung, ob Fufs oder Zoll, ist gleichgiltig), an ihren Umfängen hängen an feinen Fäden nach entgegengesetzten Richtungen die Gewichtchen von $p = 6$ und $q = 10$ Loth; da nun das statische Moment des letzteren Gewichtes gröfser als jenes von p ist, so wird die zusammengesetzte Scheibe so umgedreht, dafs q herabsinkt und p steigt; wie grofs ist die Beschleunigung G dieses Gewichtes q, wenn die Masse der gröfsern Scheibe 26, und jene der kleinern 8 Loth beträgt?

Reducirt man das Gewicht p nach statischen Gesetzen auf den Punct B, so wirkt es dort (wegen $3 \,.\, 6 = 2x$) mit $x = 9$ Loth, so, dafs also die Überwucht von q 1 Loth beträgt.

Reducirt man ferner die Massen nach dem Momente der Trägheit sämmtlich auf den Angriffspunct B der Kraft von 1 Loth, so ist zuerst die reducirte Masse von p (wegen $6 \,.\, 3^2 = x \,.\, 2^2$) $x = \frac{54}{4} = 13\cdot5$; ferner die Masse der kleinen Scheibe, deren Trägheitsmoment (§. 167, 1) $= \frac{1}{2} \,.\, 8 \,.\, 4 = 16$ ist, sofort (§. 159, Gl. 3) $y = \dfrac{16}{2^2} = 4$, und endlich die reducirte Masse der gröfsern Scheibe $z = \dfrac{1}{2} \,.\, \dfrac{26 \,.\, 9}{4} = 29\cdot25$, mithin die gesammte auf den Punct B reducirte träge Masse

$$M = x + y + z = q = 56\cdot75 \text{ Loth.}$$

Setzt man daher in der Formel (§. 146, Gl. 2) $G = \dfrac{F}{M}\,g$, $F = 1$, $M = 56\cdot75$ und $g = 31$ Fufs, so erhält man für die gesuchte Beschleunigung des Gewichtchens q: $G = \dfrac{31}{56\cdot75}$ Fufs, oder nahe $6\cdot56$ Zoll, also sinkt das Gewicht q in der ersten Secunde um $3\cdot28$ Zoll, während jenes p um $\frac{3}{2} \times 3\cdot28 = 4\cdot92$ Zoll steigt, und am Ende dieser Secunde die Geschwindigkeit $= 9\cdot84$ Zoll annimmt.

Hätte man sowohl die bewegende Kraft, als auch die Massen, auf den Punct A reducirt, so würde man nahe $F = \cdot667$, $M = 25\cdot22$, folglich für die Beschleunigung des aufwärts steigenden Gewichtes p den Werth $G = \dfrac{\cdot667}{25\cdot22}\,31 = \dfrac{31}{37\cdot81}$ Fufs, oder wieder $9\cdot84$ Zoll gefunden haben, was genau mit dem vorigen Werth übereinstimmt; hieraus folgt, dafs es ganz gleichgiltig ist, auf welchen Punct des beweglichen Systems man die Kräfte und Massen reducirt. Zugleich zeigt sich dabei der Unterschied zwischen einem Gewichte und der Masse desselben sehr deutlich; so wirkt im gegenwärtigen Beispiel das in A befindliche Gewicht $p = 6$ Loth, auf den Punct B reducirt, als Gewicht mit 9 Loth, dagegen als blofs träge Masse mit $13\frac{1}{2}$ Loth; man mufs sich also wohl hüthen, in solchen Fällen Gewichte und Massen mit einander zu verwechseln.

4. Bei dem einfachen Rollenzuge in Fig. 74 sey an der beweglichen Rolle B, welche mit der festen Rolle A das gleiche Gewicht von 1 Pfund hat, noch eine Last von 3 Pfund, und an dem Ende D der Schnur AD ein eben so grofses Gewicht p aufgehangen; es soll die Beschleunigung des herabsinkenden Gewichtes p gefunden werden, wenn die Reibung und der Widerstand wegen der unvollkommenen Biegsamkeit der Schnur vernachläfsigt wird.

Hier ist es bequemer anstatt der Abstände die Geschwindigkeiten in Rechnung zu bringen. Hat also das Gewicht p in irgend einem Zeitmomente die Geschwindigkeit v, so ist (§. 159, Gl. 4) $p v^2 = 3 v^2$ das Trägheitsmoment der Masse p; da ferner ein Punct A des Rollenumfanges ebenfalls die Geschwindigkeit v in diesem Momente hat, so ist das Moment der Trägheit (anstatt $\frac{1}{2} M r^2$, jetzt $\frac{1}{2} M v^2$) $= \frac{1}{2} . 1 . v = \frac{1}{2} v^2$; dasselbe gilt auch für die bewegliche Rolle B, in so ferne sie sich um ihre Achse dreht; endlich bewegt sich die Last sammt der Rolle B, d. i. $Q = 4$ Pf. mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2} v$ in diesem Augenblicke aufwärts, also ist das Trägheitsmoment dieser beiden Massen $(\frac{1}{2} v)^2 (3 + 1) = v^2$. Werden nun alle diese Massen auf die Geschwindigkeit v (also wenn man will auf den Punct A) reducirt, so ist die reducirte Masse

$$M = \frac{3 v^2 + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} v^2 + v^2}{v^2} = 5 \text{ Pfund.}$$

Die auf denselben Punct A reducirte bewegende Kraft ist

$$F = p - \tfrac{1}{2} (Q + 1) = 3 - 2 = 1 \text{ Pf.};$$

folglich die gesuchte Beschleunigung

$$G = \tfrac{1}{5} . 31 = 6{\cdot}2 \text{ Fufs.}$$

Wäre zur Überwältigung der Reibung und Steifheit der Schnur in D eine Kraft von z. B. $\frac{1}{4}$ Pf. nöthig, so wäre $F = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ Pf., und daher nur $G = \frac{3}{20} . 31 = 4{\cdot}65$ Fufs.

§. 170. Bestimmung des Mittelpunctes des Schwunges. Wir können jetzt auch den in §. 153 erwähnten Mittelpunct des Schwunges durch Rechnung bestimmen. Ist nämlich (Fig. 130) C der Aufhänge- und O der Schwerpunct eines zusammengesetzten Pendels von der Masse M, und haben die Massenelemente m, $m' \ldots$ desselben von C die Abstände r, $r' \ldots$; so ist, wenn $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des Pendels in Beziehung auf die durch C gehende

Dreh- oder Schwingungsachse bezeichnet, die auf den Schwerpunct O reducirte Masse des Pendels (§. 159, Gl. 3) $M' = \frac{\mathfrak{M}}{d^2}$, wenn man nämlich den Abstand $CO = d$ setzt. Das nach statischen Gesetzen auf denselben Punct O reducirte Gewicht des Pendels ist zugleich jenes der Masse M, folglich schwingt das Pendel so wie ein einfaches Pendel CO von der Länge d, dessen in O befindliche Masse M' jedoch nicht durch die Schwere, d. h. nicht durch die Kraft M', sondern durch jene M bewegt wird; dadurch entsteht aber nicht die Beschleunigung g, sondern (§. 146) jene $G = \frac{M}{M'} g$, welchen Werth man in die Formel 1, §. 151 für die Schwingungszeit des einfachen Pendels statt g setzen mufs, wodurch man für die Schwingungszeit dieses zusammengesetzten Pendels $T = \pi \sqrt{\left(\frac{dM'}{gM}\right)} \ldots (n$ erhält. Ist nun F der Schwingungsmittelpunct, so mufs ein einfaches Pendel von der Länge $CF = l$ eben so schwingen, daher mufs auch $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, also $\pi \sqrt{\frac{dM'}{gM}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ seyn, aus welcher Gleichung sofort $l = \frac{dM'}{M} = \frac{\mathfrak{M}}{Md}$ folgt, wenn man nämlich für M' den obigen Werth setzt; die Entfernung des Mittelpunctes des Schwunges von der Drehungsachse wird also gefunden, wenn man das Moment der Trägheit des Pendels auf die Schwingungsachse bezogen, durch das statische Moment des im Schwerpuncte vereinigt gedachten Gewichtes auf dieselbe Achse bezogen, dividirt.

Hieraus folgt, dafs auch ein kurzes physisches Pendel langsame Schwingungen macht, wenn man es nahe am Schwerpuncte aufhängt, weil dann im obigen Bruche von l der Nenner Md klein, also l grofs wird, und der Mittelpunct des Schwunges über das Pendel hinausfällt.

Beispiele.

1. Schwingt eine materielle gerade Linie AB (Fig. 132) von der Länge L, deren Masse M also $= L$ gesetzt werden kann, um ihren Endpunct A, so ist dafür (§. 162) $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M L^2$, und das statische Moment des im Schwerpuncte vereinten Gewichtes M gleich $\frac{1}{2} L M$, folglich, wenn F der Mittelpunct des Schwunges ist: $l = AF = \frac{\frac{1}{3} M L^2}{\frac{1}{2} M L} = \frac{2}{3} L$; d. h. ein einfaches Pendel von der Länge $\frac{2}{3} L$ schwingt genau so, wie diese ganze materielle Linie AB.

Der Mittelpunct des Schwunges (von manchen Schriftstellern auch

Schwingungspunct genannt, was aber zu Verwechslungen mit jenem in §. 162 bestimmten Puncte R der Geraden AB führt), wird hier auch gefunden, wenn man das Quadrat des Abstandes des Mittelpunctes der Trägheit, d. i. (§. 164, Gl. m) $\frac{1}{3}L^2$ durch den Abstand des Schwerpunctes von der Drehungsachse, d. i. $\frac{1}{2}L$ dividirt.

2. Schwingt eine an einem feinen Faden hängende Kugel vom Halbmesser r und der Masse M um einen von ihrem Mittelpuncte O um d abstehenden Punct oder Achse C, und ist F der in der Verlängerung des Fadens liegende Mittelpunct des Schwunges; so ist das Moment der Trägheit der Kugel (§. 169, Gl. 2 und §. 161) $\mathfrak{M} = \frac{2}{5}Mr^2 + Md^2$, und ihr stat. Moment $= Md$, folglich $l = CF = \frac{2}{5}\frac{r^2}{d} + d$, oder der Abstand des Schwingungsmittelpunctes F vom Mittelpuncte der Kugel O:

$$OF = l - d = \frac{2}{5}\frac{r^2}{d}.$$

Ist nun z. B. $r = \frac{1}{2}$ und $d = 36$ Zoll, so ist $OF = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{144} = \frac{1}{360}$ Zoll, oder $\frac{1}{30}$ Linie, woraus sofort folgt, daſs man bei diesen Dimensionen $l = d$ setzen, oder den Mittelpunct der Kugel ohne Fehler für den Mittelpunct des Schwunges dieses Pendels, dasselbe also als ein einfaches von der Länge $CO = d$ annehmen kann.

Anmerkung 1. Die bisherigen Entwicklungen können benützt werden, um das Moment der Trägheit eines Körpers, er mag dabei regelmäſsig oder unregelmäſsig seyn, practisch zu bestimmen. Läſst man nämlich den betreffenden Körper (Fig. 130) um eine, durch einen beliebigen Punct C, gehende Achse, welche von dem Schwerpuncte O des Körpers (welcher nach Kapitel III gefunden werden kann) den Abstand d haben mag, schwingen, und beobachtet dabei die Schwingungszeit T; bezeichnet ferner Q das Gewicht des Körpers und M seine auf den Schwerpunct O reducirte träge Masse; so ist (wie in §. 170, Gl. n)

$$T = \pi\sqrt{\left(\frac{dM}{gQ}\right)}, \text{ und daraus } M = \frac{gQT^2}{d\pi^2} \ldots (1.$$

Bezeichnet man nun das gesuchte Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct O gehende, mit der Schwingungsachse parallele Achse mit $\mathfrak{M}$, und jenes auf die Schwingungsachse bezogen, mit $\mathfrak{M}'$; so ist (§. 161) $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Qd^2$, und zugleich auch $\mathfrak{M}' = Md^2$, folglich $\mathfrak{M} + Qd^2 = Md^2$, und daraus $\mathfrak{M} = (M - Q)d^2 \ldots (2,$ wobei M durch die Gleichung (1 gegeben ist.

Anmerkung 2. Bezeichnet man bei dem zusammengesetzten Pendel in Fig. 130 die Masse desselben durch M, das Moment der Trägheit in Beziehung auf die Umdrehungs- oder Schwingungsachse C mit $\mathfrak{M}'$, dagegen in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct O und den Schwingungsmittelpunct F gehende, der vorigen parallelen Achse beziehungsweise mit $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}''$, setzt ferner $CO = d$, $CF = l$, also $FO = l - d$; so ist zuerst (§. 161) $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Md^2$ und $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} + M(l - d)^2$, und dann nach der vorigen Regel für die Bestimmung des Schwingungsmittel-

punctes, wenn man das Pendel um die Achse C schwingen läſst
$l = \frac{\mathfrak{M}'}{M\,d} = \frac{\mathfrak{M}}{M\,d} + d$ . . . (n (wenn man für $\mathfrak{M}'$ seinen Werth setzt), woraus $l - d = \frac{\mathfrak{M}}{M\,d}$ folgt; ferner, wenn man das Pendel um die durch den Schwingungsmittelpunct F gehende Achse schwingen läſst, und den Abstand des Mittelpunctes des Schwunges dafür von F gleich l' setzt; $l' = \frac{\mathfrak{M}''}{M(l-d)} = \frac{\mathfrak{M}}{M(\;-d)} + l - d$, oder, wenn man für $l - d$ den vorhin gefundenen Werth setzt, auch $l' = d + \frac{\mathfrak{M}}{M\,d}$, so, daſs also (Gl. n) $l' = l$ (d. h. der vorige Aufhängpunct C zum Mittelpuncte des Schwunges wird, wodurch sofort die in §. 153 (Anmerk.) erwähnte Eigenschaft des **Reversionspendels** erwiesen ist.

Fünftes Kapitel.

Von der Wirkung oder Leistung der Kräfte.

§. 171. Leistung oder Arbeit einer Kraft.

Wir haben bisher die Kräfte in ihrem gegenseitigen Verhalten, sowohl im Zustande des Gleichgewichtes als der Bewegung behandelt, allein da es sich in der industriellen Mechanik um eine wirkliche Leistung, um irgend eine Arbeit oder einen Nutzeffect derselben handelt, so müssen wir dieselbe auch noch von diesem Gesichtspuncte aus betrachten.

So wie man in der Statik die Kräfte durch bloſse Pressungen, z. B. in Pfunden, und in der Dynamik durch ihre, allenfalls in Fuſsen ausgedrückten zurückgelegten Wege darstellt; so verbindet man hier beide Methoden, um den Effect oder die Wirkung der Kräfte, in so ferne sie Bewegung erzeugen, auszudrücken. Die Arbeit oder Leistung einer Kraft wird immer mehr oder weniger in der Überwindung gewisser Hindernisse bestehen, wie z. B. beim Heben einer Last in der Schwere, beim Zermahlen des Getreides in der Cohäsionskraft desselben, beim Fortziehen eines Fuhrwerkes in der Reibung u. s. w. In allen diesen Fällen bringt aber eine Kraft, welche bloſs mit dem Hinderniſs im Gleichgewichte steht, noch durchaus keine Wirkung oder Arbeit hervor, sondern dieser Widerstand oder dieses Hinderniſs muſs auch durch einen gewissen Weg bewegt oder fortgeschafft, d. h. es muſs das während der Bewegung des Punctes, auf welchen der Widerstand wirkt, sich fortwährend wiederholende Hinderniſs, von der bewegenden Kraft überwun-