aufhängt, sofort der vorige Aufhängpunct zum Mittelpuncte des Schwunges wird, das Pendel also in beiden Fällen dieselbe Schwingungszeit (und zwar wie das einfache Pendel von der Länge CF) besitzt (M. s. §. 170, Anmerkung 2). Man benützt diese Eigenschaft um den Mittelpunct des Schwunges bei dem eigens dafür construirten Reversionspendel, wobei sich von zwei durch C und F gehenden Schwingungsachsen (in Form von Schneiden) die eine verschieben, oder die Entfernung CF reguliren (oder wo diefs nicht der Fall, ein kleines Gewicht m an der Stange verschieben) läfst, practisch zu bestimmen.

Bekanntlich benützt man das Pendel als Zeitmesser, und bei den Uhren zur Regulirung der Bewegung. Man befestigt eine schwere linsenförmige Masse, um den Widerstand der Luft leichter zu überwinden, an eine dünne Stange, welche oben mittelst einer Messerschneide, oder vielleicht noch besser, einer Uhrfeder aufgehängt wird.

Drittes Kapitel.

Von der Centrifugal- oder Fliehkraft.

§. 154. Erklärung. Befindet sich an dem Endpuncte A (Fig. 131) eines in C befestigten gewicht- und massenlosen Fadens CA ein blofs materieller Punct von der Masse M (deren Gewicht also dabei gar nicht in Betracht kommt), und wird diese durch eine momentane Kraft nach der Richtung AT mit irgend einer Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt, so kann sich diese Masse vermöge der Verbindung mit dem Puncte C nur im Kreise AMB fortbewegen, und diese wird sonach während der Zeit, in welcher sie ohne diese Verbindung den Weg AE zurückgelegt hätte, um das Stück EM gegen den Mittelpunct C gezogen, oder was dasselbe ist, die Masse M hat das Bestreben, sich in dieser Zeit um ME von C zu entfernen. Die Kraft nun, mit welcher der Faden, welcher dieses Entfernen vom Mittelpuncte C jeden Augenblick verhindert (indem die Masse nach dem Beharrungsvermögen in jedem Puncte der krummlinigen Bahn nach der Tangente fortgehen will), dadurch gespannt wird, heifst Centrifugal-, Flieh- oder Schwungkraft, und sie ist genau jener Kraft gleich, welche die Masse M beständig gegen den Mittelpunct hinziehen mufs, um der Fliehkraft das Gleichgewicht zu halten, und welche defshalb Centripedal- oder Centralkraft genannt wird.

§. 155. Bestimmung der Fliehkraft. Hat die Masse M im Puncte A durch eine momentane Kraft nach der Richtung

AT die Geschwindigkeit v erhalten, so geht diese, da die anziehende Kraft fortwährend normal auf die Richtung der Bewegung ist, also in v keine Änderung bewirkt, mit dieser Geschwindigkeit v gleichförmig im Kreise $AMBA$ herum. Nimmt man an, dafs der sehr, oder eigentlich unendlich kleine Bogen AM in der Zeit t' zurückgelegt wird, so kann während dieser ebenfalls unendlich kleinen Zeit (§. 137) die Anziehungs- oder Centripedalkraft als eine constante Kraft $= F$ angesehen werden, wodurch also der Weg EM, wofür man bei dieser Voraussetzung (dafs AM unendlich klein ist) die mit AB Parallele $Mn = AD$ nehmen kann, in derselben Zeit t' mit gleichförmig beschleunigter Bewegung zurückgelegt wird. Nach §. 146 (Gleich. 2) ist aber die Beschleunigung $G = \frac{F}{M} g \ldots$ (α, und der Weg (§. 142, 2)

$$AD = \tfrac{1}{2} G t'^2 = \tfrac{1}{2} g \frac{F}{M} t'^2.$$

Da ferner der kleine Bogen AM mit seiner Sehne verwechselt werden kann, ferner nach einem Satze der Geometrie

$$AM^2 = AB.AD = 2r.AD$$

ist, wenn man nämlich den Halbmesser $AC = r$ setzt, und endlich auch noch (§. 127, 1) $AM = vt'$ ist; so folgt

$$v^2 t'^2 = 2r.\tfrac{1}{2} g \frac{F}{M} t'^2,$$

und daraus für die Anziehungskraft F, welche auch der gesuchten Fliehkraft gleich ist $F = \frac{M v^2}{r g} \ldots$ (1.

Aus diesem Ausdrucke folgt, dafs die in Gewichtseinheiten ausgedrückten Fliehkräfte der Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit direct, und dem Halbmesser des Kreises, in welchem die Bewegung (an demselbem Orte der Erde) Statt findet, umgekehrt proportional ist. Ist T die Umlaufszeit der Masse M in dem Kreise $AMBA$, so ist $2r\pi = vT$, also $v = \frac{2r\pi}{T}$, und wenn man diesen Werth in die vorige Gleich. (1 substituirt, auch $F = \frac{4 M r \pi^2}{g T^2} \ldots$ (2,

oder, wenn der materielle Punct die Kreisperipherie in einer Secunde n Mal durchläuft, wodurch $T = \frac{1}{n}$ wird, auch

$$F = \frac{4 n^2 \pi^2 r M}{g} \ldots (3.$$

Setzt man den Werth von F aus der Gleichung (1 in jene (α, so erhält man für die Centrifugalbeschleunigung $G = \frac{v^2}{r} \ldots$ (4, welche in Längenmaſs ausgedrückt, ebenfalls zur Beurtheilung der Intensität der Centrifugalkraft dienen kann.

Anmerkung. Findet die Bewegung nicht im Kreise, sondern in einer andern krummen Linie Statt, so hat man in diesen Formeln unter r den Krümmungshalbmesser (d. i. den Halbmesser des Krümmungskreises) an jener Stelle der Curve zu verstehen, an welcher die Fliehkraft, welche also dabei nicht mehr wie hier im Kreise constant ist, bestimmt werden soll.

Beispiele.

1. Wird eine kleine Bleikugel von 20 Loth an einem 3 Fuſs langen Faden auf einem horizontalen Tisch (wodurch also das Gewicht derselben aufgehoben ist) im Kreise mit einer Geschwindigkeit von 5 Fuſs herum geschwungen, so ist die Stärke, mit welcher der Faden durch die entstehende Fliehkraft gespannt wird (Gleich. 1) $F = \frac{20.25}{3.31} = \frac{500}{93}$, oder nahe $5\frac{2}{5}$ Loth, und es müſste, im Falle derselbe nur so stark wäre, daſs er bloſs 5 Loth tragen könnte, dabei der Faden nothwendig abreiſsen.

§. 156. Befinden sich an den Endpuncten A und B einer um C drehbaren Geraden AB (Fig. 132) die trägen Massen M und M', wofür die Abstände $CA = a$ und $CB = b$ seyn sollen; so sind ihre Fliehkräfte nach der Gleichung (2 des vorigen Paragraphs, da die Umdrehungszeit T für beide die nämliche ist:

$$F = \frac{4\,M a \pi^2}{g\,T^2} \text{ und } F' = \frac{4\,M' b \pi^2}{g\,T^2}.$$

Soll nun $F' = F$ seyn, so muſs $Ma = M'b$ oder $M : M' = b : a \ldots$ (1 Statt finden, d. h. es müssen die statischen Momente der Massen in Beziehung auf den Drehungspunct gleich seyn, oder sich die Massen umgekehrt wie ihre Abstände von diesem Puncte verhalten.

Dieser Satz läſst sich leicht auf jedes beliebige System von materiellen Puncten ausdehnen. Nimmt man als einfachsten Fall in der Geraden CA, welche sich um eine in C auf AC senkrechte Achse umdreht in den beliebigen Abständen $a, a', a'' \ldots$ von C die materiellen Puncte $m, m', m'' \ldots$ und sucht jenen Punct O, in welchem die gesammte Masse $M = m + m' + m'' + \ldots$ vereinigt, dieselbe Fliehkraft, wie die einzelnen Massen zusammen besitzen, so ist, wenn man $CO = z$ setzt, eben so

$$zM = ma + m'a' + m''a'' + \ldots,$$

woraus für den gesuchten Abstand z genau derselbe Ausdruck wie (§. 26) für den Mittelpunct der Massen oder Schwerpunct dieses Systems von materiellen Puncten folgt.

Eben so läſst sich zeigen, daſs, wenn sich irgend eine ebene Fläche AB (Fig. 134), über welche die Masse M gleichförmig vertheilt seyn soll, um eine durch C gehende, auf ihrer verlängerten Ebene senkrechten Achse im Kreise herumdreht, die entstehende Fliehkraft eben so grofs ist, als ob die Masse M im Schwerpuncte O dieser Fläche vereinigt wäre. (Man darf dazu nur durch den Umdrehungspunct C in der Ebene dieser Fläche zwei rechtwinklichte Momentenachsen annehmen, und die Fliehkräfte der einzelnen materiellen Puncte m, m' .. der Fläche AB, jede in zwei mit diesen Achsen parallele Seitenkräfte zerlegen, und sich erinnern, dafs die Summe der Momente der einzelnen Massen gegen eine dieser Achsen bezogen, dem Momente aus der Gesammtmasse M in den Abstand vom Schwerpuncte O dieser Fläche AB gleich ist.)

Dasselbe gilt auch von Körpern, bei welchen die Schwerpuncte sämmtlicher Querschnitte, welche durch die Schnitte von Ebenen entstehen, die auf die Umdrehungsachse senkrecht sind, in einer mit dieser Achse parallelen geraden Linie liegen.

Dreht sich also z. B. eine Kreisfläche vom Halbmesser $CO = r$ um ihren Mittelpunct (d. h. um eine auf der Kreisebene senkrecht durch den Mittelpunct gehende Achse), und wird die Masse ihrer Fläche $r^2\pi$ proportional gesetzt; so darf man zur Bestimmung der Fliehkraft, die Kreisfläche nur in ihre Elemente, wie abC (Fig. 134), d. i. in unendlich schmale Dreiecke auflösen, und sich die Masse jedes dieser Dreiecke in dem Schwerpuncte o desselben vereinigt denken; da nun (§. 48) ein mit dem Halbmesser $CO = \frac{2}{3} r$ aus dem Mittelpuncte C gezogener Kreis durch die Schwerpuncte dieser sämmtlichen Dreiecke geht, so kann man sich die ganze Masse $M = r^2 \pi$ der Kreisfläche in dieser Kreisperipherie vereinigt denken, und sofort die gesuchte Centrifugalkraft nach den Formeln des vorigen Paragraphes bestimmen; dasselbe gilt nun auch von einem Cylinder, dessen Grundflächen mit dieser Kreisfläche und Achse, mit der durch C gehenden Umdrehungsachse zusammen fällt; die Achse erleidet jedoch hier, bei homogener Masse keinen Zug oder Druck.

Beispiele.

1. An dem einen Ende einer 5 Fufs langen Eisenstange, welche bei einem Gewichte von 1000 Pfund abreifst, befindet sich eine 100 Pfund schwere Kugel; wenn sich nun diese Kugel um den andern Endpunct der Stange, und zwar um ihr Gewicht unwirksam zu machen, auf einem horizontalen Tische im Kreise herumdreht, so ist die Frage, wie viele Umdrehungen dieselbe per Secunde machen kann, bis die Fliehkraft mit der Festigkeit der Eisenstange im Gleichgewichte stehe?

Da man sich die Masse der Kugel für die Bestimmung der Fliehkraft im Schwerpuncte vereinigt denken kann, so ist nach der Formel (3 des vorigen Paragraphes $F = 1000$, $M = 100$, $r = 5$, $\pi^2 = (3{\cdot}1416)^2 = 9{\cdot}87$ und $g = 31$ zu setzen, wodurch man $1000 = 636{\cdot}8\, n^2$, und daraus für die gesuchte Umdrehungszahl $n = \sqrt{\left(\frac{1000}{636{\cdot}8}\right)} = 1{\cdot}26$ erhält, so, dafs also die Stange schon abreifsen würde, wenn die Kugel den genannten Kreis von 10 Fufs Durchmesser in einer Secunde $1\frac{3}{10}$ Mal durchliefe.

2. Es stelle $adfg$ (Fig. 134) ein Segment z. B. den zehnten Theil des Radkranzes eines 200 Centner schweren gufseisernen Schwungrades vor, welches bei einem äufsern Halbmesser $R = Ca = 6$, und innern $r = Cf = 5$ Fufs in einer Secunde drei Mal umlauft; mit welcher Kraft sucht sich dieses Kreissegment, wenn es ein Gewicht von 20 Centner hat, aus seiner Verbindung mit der Umdrehungsachse loszureifsen?

Ist i der Schwerpunct des Bogenstückes $adfg$, so ist nach der Formel (3 in §. 50, in welche $r = 6$, $r' = 5$, $s =$ Bog. $ad = \frac{1}{10} . 12 \times 3{\cdot}1416 = 3{\cdot}7579$, $a = ad = 3{\cdot}7082$ ($= 12 \; Sin \; 18^\circ$) zu setzen ist: $Ci = 5{\cdot}43$ Fufs. Da man sich nun in diesem Punct i die gesammte Masse des Segments von 2000 Pfund vereinigt denken kann, so hat man nach der Formel (3 des vorigen Paragraphes, in welche statt r dieser Werth Ci zu setzen ist, sofort für die gesuchte nach der Richtung Ci wirkende Fliehkraft des Segments: $F = \frac{4 \times 9 \times 9{\cdot}87 \times 5{\cdot}43 \times 2000}{31} = 124476{\cdot}6$ Pfund.

Anmerkung. Aus diesen Beispielen wird es leicht begreiflich, dafs bei einem zu schnellen Umlaufen der Mühl- und Schleifsteine, gufseiserner Schwungräder u. s. w. Die Cohäsion oder der Zusammenhang der Theile überwunden, und diese in Stücken hinausgeschleudert werden können.

Fährt ein Wagen schnell um eine Ecke oder in einer starken Krümmung, so kann er durch die Schwungkraft umgestürzt werden. Stellt z. B. Ob (Fig. 135) das durch den Schwerpunct O wirkende Gewicht, und Oa die nach horizontaler Richtung wirkende Fliehkraft des Wagens vor; so wirkt die Resultirende Oc dieser beiden Kräfte nach der Richtung OD, und es mufs, sobald diese nicht mehr zwischen die Räder fällt, der Wagen umstürzen.

Ist der Boden AB (Fig. 136) nicht horizontal, sondern nach einwärts abschüssig, so wird dadurch der Schwungkraft zum Theil entgegen gewirkt, und es kann bei denselben Werthen von Oa und Ob die Resultirende Oc zwischen die Räder fallen, und der Wagen gegen das Umstürzen gesichert seyn. Aus diesem Grunde neigen sich auch Menschen und besonders Pferde, wenn sie schnell im Kreise herum laufen, instinctmäfsig nach einwärts, und zwar um so mehr, je schneller und in einem desto kleineren Kreise sie herumlaufen. Aus gleichem Grunde erhöht man bei Eisenbahnen in den Krümmungen die äufsere Schiene.

Durch die Schwungkraft mufste die anfangs noch weiche Erdmasse die an den Polen abgeplattete Gestalt erhalten; durch dieselbe Kraft mufs auch die Schwerkraft, und zwar unterm Äquator, wo die Schwungkraft am gröfsten ist, und den 289sten Theil der Schwere beträgt, auch am meisten, und zwar um den 289sten Theil vermindert werden. Würde sich die Erde 17 Mal schneller um ihre Achse drehen, so wäre unterm Äquator die Fliehkraft der Schwerkraft gleich, und die Körper hätten da gar keine Schwere u. s. w.

Das Centrifugalpendel.

§. 157. Erklärung. Bewegt sich das in C aufgehangene einfache Pendel CA (Fig. 137) auf eine solche Weise, daſs der Punct A, welcher die Masse oder den materiellen Punct M trägt, die Peripherie des horizontalen Kreises $ADBA$, also die Gerade CA die krumme Oberfläche eines geraden Kegels beschreibt; so heiſst ein solches Pendel ein conisches oder einfaches Centrifugalpendel, und dabei wird, wenn CE lothrecht, also zugleich senkrecht auf die Kreisebene ist, der W. ECA wieder der Elongationswinkel und CE die Höhe des Pendels genannt.

§. 158. Umlaufszeit dieses Pendels. Bewegt sich der Punct A, d. i. die damit verbundene Masse M mit gleichförmiger Geschwindigkeit v, so ist der Elongationswinkel, folglich auch die Centrifugalkraft unveränderlich. Setzt man den Halbmesser $AE = BE = r$, die Länge des Pendels $CA = l$, die Höhe $CE = h$, und die Centrifugalkraft $= F$; so ist (§. 155, Gleich. 1) $F = \frac{Mv^2}{rg}$. Nimmt man in der Verlängerung von EA das Stück $Ac = F$, und zerlegt diese Kraft in zwei auf einander senkrechte Ab und Ai, nämlich normal auf CA und in deren Verlängerung; eben so auch das Gewicht Ad der Masse M in Aa und Ae, wieder senkrecht auf CA und in deren Verlängerung, so muſs, da Ai und Ae zusammen $= An$ von der Festigkeit der Linie oder des Fadens CA und dem Puncte C aufgehoben werden, und die beiden noch übrigen Kräfte, sobald der Winkel ECA constant seyn soll, im Gleichgewichte stehen müssen, sofort, da sie sich gerade entgegen wirken, $Ab = Aa$ Statt finden; zugleich ist auch, wegen Ähnlichkeit der Dreiecke Adn und ACE:

$$F : M = dn : Ad = EA : CE = r : h \ldots (\alpha,$$

ferner wegen Ähnlichkeit der Dreiecke Abc und CEA, $Ab : Ac = h : l$, oder $Ab = \frac{Fh}{l}$, und endlich wegen Ähnlichkeit der Dreiecke aAd und AEC, $Aa : Ad = r : l$, oder $Aa = \frac{Mr}{l}$.

Da nun $Ab = Aa$ seyn muſs, so ist $\frac{Fh}{l} = \frac{Mr}{l}$, oder, wenn man für F seinen Werth setzt, und dann r bestimmt:

$$r = v\sqrt{\frac{h}{g}} \ldots (1.$$

Ist T die Umlaufszeit des Pendels oder Punctes A in der Kreisperipherie, so ist $2r\pi = vT$, also $T = \frac{2r\pi}{v}$, oder, wenn man für r den Werth aus (1 setzt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \ldots (2.$$

Nach §. 151 (Gl. 1) ist die Schwingungszeit des einfachen Kreispendels von der Länge h sofort $T = \pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, nämlich halb so grofs, als die eben bestimmte; ist also die Länge eines einfachen Kreispendels der Höhe des Centrifugalpendels gleich, so ist die Umlaufszeit des letztern doppelt so grofs, als die Schwingungszeit des erstern.

Anmerkung. Das Pendel CA kann sich niemals horizontal stellen, weil dafür $h = o$, also $v = r\sqrt{\frac{g}{h}} = \infty$, d. i. unendlich grofs seyn müfste. Haben zwei conische Pendel gleiche Höhen, so haben sie auch gleiche Umlaufszeiten.

Viertes Kapitel.

Von dem Momente der Trägheit und der Bestimmung des Mittelpunctes des Schwunges.

§. 159. Begriff des Momentes der Trägheit.

Jede Masse setzt der Kraft, welche sie in Bewegung bringen will, vermöge ihrer Trägheit, einen Widerstand entgegen, welcher zufolge des allgemein giltigen Satzes, dafs jede Reaction oder Gegenwirkung der Action oder Wirkung gleich und entgegengesetzt ist, der bewegenden Kraft gleich ist, und durch diese gemessen werden kann; dieser Widerstand nimmt also (§. 146, Relat. α) mit der Gröfse der Masse und der Geschwindigkeit zu. Befindet sich nun im Puncte A der steifen, um C drehbaren Geraden CA (Fig. 138) eine blofs träge Masse M (deren Gewicht also nicht in Betracht kommt), und wirkt in dieser die constante Kraft P senkrecht auf AC, so nimmt diese Masse (§. 133) eine gleichförmig beschleunigte Bewegung an, erlangt am Ende der ersten Secunde die Geschwindigkeit oder Beschleunigung (§. 146) $G = \frac{P}{M}g$, und beschreibt in dieser Zeit den Kreisbogen $AB = \frac{1}{2}G$. Nimmt man jetzt die Masse M von A weg, und bringt in irgend einem andern Puncte A' dieser Geraden AC eine Masse M' an, so erzeugt die noch immer in A wirk-