recht auf die Richtung des Wagenlaufes $AB$ (Fig. 117, $a$), nämlich gegen $AE$, so kommt er auf den Boden in einer Richtung und mit einer Geschwindigkeit an, welche durch die Diagonale $AD$ der aus den drei Seitengeschwindigkeiten $AB$, $AE$ und $AC$ construirten Parallelopipedes dargestellt wird.

Wird eine Billardkugel gegen die elastische Bande $BB'$ (Fig. 118) in der Richtung $AM$ mit einer Geschwindigkeit gleich $V$ gestofsen, so kann man diese in die zwei auf einander senkrechten Geschwindigkeiten $aM = v$ und $bM = v'$ zerlegen, wenn man die Linie $cM = V$ abschneidet und das Rechteck $ab$ construirt; von diesen beiden Geschwindigkeiten geht die erstere nach dem Stofs unverändert gegen $MB'$, während die letztere durch die Eigenschaft der elastischen Bande in die gerad entgegengesetzte von gleicher Gröfse, also in $Mb$ verwandelt wird, welche mit der vorigen $Ma' = Ma$ die Resultirende $Mc'$ gibt, die wegen Gleichheit der Dreiecke $bMc'$ und $bMc$, der ursprünglichen Geschwindigkeit $Mc = V$ gleich ist, und wobei die Richtung $MD$ mit der auf $BB'$ senkrechten Geraden $MC$ denselben Neigungswinkel $DMC$, wie die ursprüngliche Richtung $AM$ bildet, so dafs Winkel $DMC =$ W. $AMC$ (also auch $B'MD = BMA$) ist. Da die Bande niemals vollkommen elastisch, folglich die zurückgeworfene Geschwindigkeit immer etwas kleiner als $Mb$ ist, so ist auch in der Wirklichkeit der Winkel $bMD$ etwas (wenn auch sehr unbedeutend) gröfser als jener $bMA$.

Auf gleiche Weise liefsen sich noch viele Beispiele der Art über die Zerlegung der Geschwindigkeiten anführen.

# Zweites Kapitel.

## *Vom freien und gehinderten Fall der Körper.*

**§. 140. Wirkung der Schwerkraft.** Nach §. 34 fallen alle frei oder sich selbst überlassenen Körper, und zwar in Folge der Anziehung der Erdmasse, nach lothrechter Richtung gegen den Mittelpunct der Erde zu. Genaue Versuche haben überdiefs noch gelehrt, dafs alle Körper ohne Rücksicht auf ihre Natur und Beschaffenheit an demselben Orte und im absolut leeren Raume gleich schnell fallen, so, dafs also die Ursache, aus welcher z. B. eine Flaumfeder in der Luft langsamer als ein Stückchen Blei herabfällt, lediglich in dem Widerstande der Luft liegt, welchen das dichtere Blei leichter als die Feder überwinden kann.

**§. 141. Die Schwerkraft erscheint uns als eine constant wirkende, beschleunigende**

**Kraft.** Obschon die Schwerkraft in derselben Verticallinie nach aufwärts im quadratischen Verhältnifs der Höhe (vom Mittelpunct der Erde an gezählt) abnimmt, so sind selbst die höchsten Berge gegen den Erdhalbmesser noch so unbedeutend, dafs man diese Abnahme ohne Fehler selbst bis auf diese Höhe vernachläfsigen kann. Wirkt aber sonach die Schwere als eine constante Kraft, so nehmen die Körper beim Fallen (§. 133) eine gleichförmig beschleunigte Bewegung an, und alle die in §. 134 für diese Bewegung entwickelten Gesetze finden sofort auch hier ihre Anwendung, wenn man nämlich dabei von dem Widerstande des Mittels, oder der Luft, in welchem der Körper fällt, und der nur in seltenen Fällen zu berücksichtigen kommt, abstrahirt.

**§. 142. Formeln für den freien Fall der Körper.** Alle bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung vorkommenden Gröfsen oder Relationen sind bestimmt, sobald entweder der Weg oder die Endgeschwindigkeit der ersten Secunde bekannt ist. Bezeichnet man, wie es früher und gröfstentheils auch noch jetzt in Deutschland üblich, diesen Weg der ersten Secunde beim freien Fall der Körper mit $g$, so ist die Endgeschwindigkeit (§. 134, Gl. 1 und 2) nach dieser Zeit gleich $2g$. Bezeichnet man dagegen mit den französischen Physikern (denen nun auch sehr viele deutsche folgen) diese Endgeschwindigkeit mit $g$, so ist der in der ersten Secunde zurückgelegte Weg gleich $\frac{1}{2}g$. Da wir uns nun dieser letztern, immer allgemeiner werdenden Bezeichnung anschliefsen, so haben wir durchaus unter $g$ für Wien den Werth von 31 Wiener Fufs zu verstehen (genauer ist für die Breite von Wien im luftleeren Raume und auf das Niveau des Meeres reducirt, $g = 31\cdot03018$ F.), und da diese Gröfse zugleich (§. 136) das Mafs der beschleunigenden Kraft der Schwere ist, so bezeichnet sie für die Breite von Wien auch die Intensität der Schwerkraft.

Führt man diese Gröfse $g$ in den beiden Grundformeln (1 und (2 des §. 134 anstatt $c$ ein, so erhält man für die Endgeschwindigkeit $v$ und den Fallraum $h$ nach Verlauf von $t$ Secunden:

$$v = gt \ldots (1 \quad \text{und} \quad h = \tfrac{1}{2}gt^2 \ldots (2,$$

und daraus durch Verbindung, aufser mehreren andern, noch die beiden für die Folge wichtigen Formeln:

$$v = \sqrt{(2gh)} = 7\cdot874\sqrt{h} \ldots (3 \quad \text{und} \quad h = \frac{v^2}{2g} = \cdot01613\,v^2 \ldots (4.$$

Setzt man in der Formel (2 $t = 1, 2, 3\ldots$ und Kürze halber den Weg der ersten Secunde $\frac{1}{2}g = 1$, so wird $h = 1, 4, 9, 16\ldots$, d. h. die nach Verlauf von 1, 2, 3... Secunden zurückgelegten Wege verhalten sich wie die Quadrate der natülichen Zahlen. Zieht man dagegen in dieser Reihe die Glieder von einander ab, so erhält man für die in den einzelnen Secunden zurückgelegten Wege die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 . . .

Beispiele und Aufgaben.

1. Fällt ein Körper durch die Zeit von fünf Secunden, so erlangt er die Geschwindigkeit von $v = 155$ Fufs und fällt durch eine Höhe von $h = 387{\cdot}5$ Fufs. Wäre er mit der mittlern Geschwindigkeit $\frac{0 + 155}{2} = 77\frac{1}{2}$ Fufs gleichförmig durch diese fünf Secunden gefallen, so würde er ebenfalls $77\frac{1}{2} \times 5 = 387\frac{1}{2}$ Fufs, also denselben Weg zurückgelegt haben.
2. Welche Geschwindigkeit erlangt ein von der Höhe von 50 Klafter frei herabfallender Körper?

   Nach der Formel (3 erhält man wegen $h = 6 \times 50 = 300$ Fufs:
   $$v = 7{\cdot}874 \sqrt{300} = 7{\cdot}874 \times 17{\cdot}32 = 136{\cdot}4 \text{ Fufs.}$$
3. Durch welche Höhe mufs ein Körper fallen, damit er eine Geschwindigkeit von 100 Fufs erlangt?

   Setzt man in der Formel (4 $v = 100$, so erhält man für die gesuchte Höhe
   $$h = 161{\cdot}3 \text{ Fufs.}$$
4. In welcher Zeit wird ein Körper von der Spitze des St. Stephansthurmes herabfallen, wenn dessen Höhe zu 72 Klafter gerechnet wird?

   Hier ist $h = 6 \times 72 = 432$ Fufs und damit folgt aus der Formel (2:
   $$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{864}{31}} = 5{\cdot}28 \text{ Secunden.}$$

**§. 143. Vertical aufwärts geworfene Körper.** Die Formeln des vorigen Paragraphes gelten auch für Körper, welche mit einer gewissen Geschwindigkeit vertical aufwärts geworfen werden, wenn man sich bei ihrer Anwendung nur erinnert, dafs jetzt die Schwere (§. 135) als eine gleichförmig verzögernde Kraft wirkt und dem Körper nun genau so viel an Geschwindigkeit benimmt, als sie im vorigen Fall erzeugt. Einige Beispiele werden die Sache erläutern.

Beispiele und Aufgaben.

1. Wie hoch kann ein Körper, welcher mit einer Geschwindigkeit von 62 Fufs vertical aufwärts geworfen wird, steigen?

   Der Körper steigt so lange, bis durch den Einflufs der Schwerkraft seine ganze Geschwindigkeit vernichtet oder auf Null gebracht ist, folglich während zwei Secunden; weil ein von der Ruhe aus fallender Körper nach Verlauf von zwei Secunden (Formel 1) ebenfalls 62 Fufs Geschwindigkeit erlangt. (Nach §. 135 ist $v' = C - ct$ oder hier $0 = 62 - gt$, woraus ebenfalls $t = 2$ folgt.) Während zwei Secunden fällt aber ein Körper durch die Höhe $h = 15{\cdot}5 \times 4 = 62$ Fufs, folglich ist diefs auch zugleich die Höhe, welche der Körper erreicht. Kürzer folgt dieses Ergebnifs aus der Formel (4 des vorigen Paragraphes, indem der Körper mit der

Anfangsgeschwindigkeit von 62 Fuſs genau so hoch steigen muſs, um diese Geschwindigkeit zu verlieren, als er fallen müſste, um dieselbe zu gewinnen; es ist also nach dieser Formel

$$h = \frac{62 \times 62}{62} = 62 \text{ Fuſs, wie zuvor.}$$

Anmerkung. Der steigende Körper legt in diesem Beispiele in der ersten Secunde den Weg von $62 - 15\frac{1}{2} = 46\frac{1}{2} = 3 \times 15\frac{1}{2}$, und in der zweiten Secunde jenen $62 - 46\frac{1}{2} = 1 \times 15\frac{1}{2}$, dagegen beim Fallen gerade umgekehrt in der ersten und zweiten Secunde die Wege $1 \times 15\frac{1}{2}$ und $3 \times 15\frac{1}{2}$ Fuſs zurück.

2. Welche Höhe hat ein mit 100 Fuſs Geschwindigkeit vertical aufwärts steigender Körper nach drei Secunden erreicht?

Ohne Einwirkung der Schwere wäre der in drei Secunden zurückgelegte Weg = 300 Fuſs, da aber die Schwerkraft während drei Secunden einen Weg von $15{\cdot}5 \times 9 = 139{\cdot}5$ Fuſs aufhebt (weil sie im umgekehrten Fall eben so viel erzeugt), so bleiben noch $300 - 139{\cdot}5 = 160{\cdot}5$ Fuſs für die gesuchte Höhe. (Diese Auflösung ist auch durch die in §. 135 für $s$ aufgestellte Gleichung gegeben.)

Nach vier Secunden hat er eben so die Höhe von $4 \times 100 - 15{\cdot}5 \times 16 = 152$ Fuſs über den Anfangspunct der aufsteigenden Bewegung (da die gröſste Höhe, welche er erreichen kann, $= \frac{10000}{62} = 161{\cdot}29$ Fuſs ist, wozu er $\frac{100}{31} = 3{\cdot}226$ Secunden braucht, so ist er am Ende der vierten Secunde schon wieder um $161{\cdot}29 - 152 = 9{\cdot}29$ Fuſs gefallen, nach der fünften Secunde von $500 - 15{\cdot}5 \times 25 = 112{\cdot}5$, nach der sechsten Secunde von $600 - 15{\cdot}5 \times 36 = 42$, nach der siebenten Secunde von $700 - 15{\cdot}5 \times 49 = - 59{\cdot}5$ Fuſs, d. h. da er zum Steigen und Fallen zusammen die Zeit von $2 \times 3{\cdot}226 = 6{\cdot}45$ Secunden braucht, so befindet er sich nach der siebenten Secunde schon um $59\frac{1}{2}$ Fuſs unter dem Horizont, oder allgemeiner, unter jenem Puncte, von wo aus sein Aufsteigen begann.

3. Nach welcher Zeit wird der Körper im vorigen Beispiele wieder unten angelangt seyn?

Da er zum Steigen dieselbe Zeit wie zum Fallen braucht, so darf man nur die Fallzeit aus der Formel (1 des vorigen Paragraphes für die Endgeschwindigkeit von 100 Fuſs bestimmen, so hat man dafür $t' = \frac{100}{31} = 3{\cdot}226$, mithin für die gesuchte Zeit das Doppelte, d. i. $6{\cdot}452$, oder nahe genug $6\frac{1}{2}$ Secunden.

4. Von zwei Puncten $A$ und $B$ (Fig. 119), welche in einer Verticallinie um 100 Fuſs von einander entfernt liegen, steigt von $A$ aus ein Körper mit 50 Fuſs Geschwindigkeit, und in demselben Augenblick fällt ein anderer Körper von $B$ frei herab; in welchem Puncte $C$ dieser Geraden $AB$ werden sich diese beiden Körper begegnen?

Tritt das Begegnen nach $t$ Secunden ein, so ist $BC = \frac{1}{2} g t^2$ und $AC$

$= 50t - \frac{1}{2}gt^2$, folglich wegen $BC + AC = 100$, sofort $100 = 50t$ oder $t = 2$ Secunden, und mit diesem Werthe ist $BC = 62$ und $AC = 38$ Fuſs, wodurch der Begegnungspunct $C$ bestimmt ist.

**§. 144. Schief geworfene Körper.** Wird ein Körper mit der Geschwindigkeit $v$ in der Richtung $AT$ (Fig. 120) aufwärts geworfen, so würde er ohne Einwirkung der Schwere in der Zeit $t$ den Weg $AM = vt$ mit gleichförmiger Bewegung zurücklegen. Durch die Schwerkraft wird er aber in derselben Zeit um den Weg $Mm = \frac{1}{2}gt^2$ herabgebracht, so, daſs er sich am Ende dieser Zeit im Puncte $m$ befindet. Eben so wird er sich nach $t'$ Secunden nicht im Puncte $M'$, wofür $AM' = vt'$ ist, sondern vertical unter diesem im Puncte $m'$ befinden, wofür $M'm' = \frac{1}{2}gt'^2$ ist u. s. w. Trägt man also auf $AT$ eine beliebig kleine Gröſse $AN$ mehrere Male auf, so, daſs $AN = NM = MM'$... wird und läſst $AN$ die Geschwindigkeit $v$, folglich $AN$, $AM$... die Wege bedeuten, welche mit gleichförmiger Bewegung nach 1, 2, 3... Secunden zurückgelegt würden, zieht durch die Puncte $N$, $M$, $M'$... die lothrechten Linien und trägt darauf nach abwärts die berechneten Werthe von 15·5, $4 \times 15{\cdot}5$, $9 \times 15{\cdot}5$... nach einem verjüngten (am besten tausendtheiligen) Maſsstab auf, nach welchem $AN = v$ Fuſs genommen wurde; so erhält man die Puncte $n$, $m$, $m'$... die mit einander vereinigt die W u r f l i n i e geben, welche (in der steten Voraussetzung, daſs der Widerstand der Luft vernachläſsigt werden darf) eine gewöhnliche P a r a b e l ist, wobei $CF = h$ die g r ö ſ s t e H ö h e, welche der Körper erreichen kann, und $AB = b$ die W u r f w e i t e darstellt.

A n m e r k u n g. Setzt man den Winkel $BAT = \alpha$, so findet man nach geometrischen Gründen $h = \frac{(v \, Sin \, \alpha)^2}{2g}$ und $b = \frac{v^2 \, Sin \, 2\alpha}{g}$, woraus sofort folgt, daſs die gröſste Wurfweite bei demselben Werth von $v$, für $\alpha = 45°$, wofür $h = \frac{v^2}{4g}$ ist, erreicht wird. Die Zeit, die der Körper braucht, um von $A$ durch den Bogen $AFB$ nach $B$ zu kommen, ist

$$t = \frac{2v \, Sin \, \alpha}{g}.$$

Für $\alpha = 90°$ entstehen die Fälle des vorigen Paragraphes, weil der Körper dann vertical aufwärts steigt; es ist dafür $h = \frac{v^2}{2g}$, $b = 0$ und $t = \frac{2v}{g}$, wie es seyn soll.

Fällt endlich die Richtung des Wurfes in den H o r i z o n t $AM$ (Fig. 121), so ist für $AM = x$ und $Mm = h$, sofort $h = \frac{g}{2v^2}x^2$; ist $x = v$, so ist $h = \frac{1}{2}g$, für $x = 2v$ ist $h = 4 \cdot \frac{1}{2}g$, für $x = 3v$ ist $h = 9 \cdot \frac{1}{2}g$ u. s. w., wodurch sich die Puncte $m$, $m'$.., der Parabel $Ams$ bestimmen.

**§. 145. Bewegung zweier ungleicher Massen oder Gewichte über eine Rolle (Bewegung durch Überwucht).** Hängen an den Endpuncten $A$ und $B$ eines über eine feste Rolle $C$ (Fig. 122) gelegten Fadens zwei gleiche Massen oder Gewichte $m$, so halten sich diese das Gleichgewicht, weil die Anziehung der Erde auf beide gleich stark wirkt. Legt man aber auf der einen Seite $A$ noch eine Masse $m'$ hinzu, so wird durch die darauf wirkende Schwerkraft das Gleichgewicht gestört und der Punct $A$ mit gleichförmig beschleunigter Bewegung herab-, also der Punct $B$ eben so hinaufgezogen. Das in $A$ angebrachte Gewicht $m + m'$ kann jedoch nicht jene Geschwindigkeit, wie beim freien Fall annehmen, indem sich das Gewicht $m'$ als beschleunigende Kraft auf die ganze Masse $m+m+m' = M + m$ (wenn man Kürze halber $m + m' = M$ setzt) vertheilt. Wirkt aber eine constante Kraft in ungleiche Massen, so sind die in gleichen Zeiten, also auch in der Zeiteinheit erzeugten Geschwindigkeiten den Massen umgekehrt proportional, indem dieselbe Kraft in der doppelten Masse nur die halbe Geschwindigkeit erzeugen kann, u. s. w. Ist also $g$ die Beschleunigung der Schwerkraft (d. h. die Endgeschwindigkeit der ersten Secunde, wenn die constante Kraft $m'$ in die Masse $m'$ wirkt) und $G$ die Beschleunigung der Massen $M + m$ (d. h. die Endgeschwindigkeit der ersten Secunde, wenn die Kraft $m'$ in die Masse $M + m$ wirkt); so ist

$$g : G = M + m : m' \quad \text{oder} \quad G = \frac{m'}{M+m} g = \frac{M-m}{M+m} g \ldots (1.$$

Mit diesem Werthe von $G$ lassen sich nun alle hieher gehörigen Fragen durch Anwendung der für den freien Fall (§. 142) geltenden Formeln beantworten, wenn man in diesen Formeln durchaus $G$ statt $g$ schreibt.

Beispiel. Ist z. B. $M = 187$ und $m = 185$ (gleichgiltig ob Pfunde, Lothe u. s. w.), so ist $G = \frac{1}{186} \times 31 = \frac{1}{6}$ Fufs $= 2$ Zoll, also der Fallraum der ersten Secunde $\frac{1}{2} G = 1$ Zoll.

Nach fünf Secunden z. B. wäre die erlangte Geschwindigkeit $v = Gt = 2 \times 5 = 10$ Zoll und der zurückgelegte Weg $h = \frac{1}{2} G t^2 = 25$ Zoll.

Anmerkung. Auf diesem Princip beruht die von Atwood angegebene Fallmaschine, mittelst welcher man alle Gesetze des freien Falles oder eigentlich der gleichförmig beschleunigten Bewegung sehr bequem beobachten kann, was bei wirklich frei fallenden Körpern defshalb nicht möglich ist, weil der Fallraum der ersten Secunde schon $15\frac{1}{2}$ Fuſs beträgt, also für eine Beobachtungszeit von selbst nur einigen Secunden schon sehr bedeutende Höhen zu Gebote stehen müſsten.

**§. 146. Allgemeiner Ausdruck für die Beschleunigung der Massen.** Bei dem freien Falle erlangen verschiedene Massen immer dieselbe Geschwindigkeit, weil in die grössere Masse auch in demselben Verhältniſs die gröſsere Kraft wirkt, folglich auf einen gleich groſsen Theil der Masse immer auch eine gleiche Kraft kommt. Wirken aber constante Kräfte untern andern Umständen auf ungleiche Massen, so werden die am Ende der Zeiteinheit erlangten Geschwindigkeiten oder die Beschleunigungen (§§. 136 und 145) den Kräften direct oder gerade, und den Massen umgekehrt proportional. Wirken nämlich zwei constante Kräfte $F$, $F'$ in zwei ungleiche Massen $M$, $M'$ und bringen sie in diesen in einerlei Zeit gleiche Geschwindigkeiten hervor, so ist $F : F' = M : M'$. Wirken diese Kräfte auf gleiche Massen und erzeugen sie in diesen ungleiche Geschwindigkeiten $v$ und $v'$, so ist $F : F' = v : v'$, folglich ist, wenn die Massen und Geschwindigkeiten ungleich sind, $F : F' = Mv : M'v' \ldots (\alpha$ oder auch

$$v : v' = \frac{F}{M} : \frac{F'}{M'} \ldots (1,$$

wodurch der vorhin ausgesprochene Satz bestätiget wird.

Da für den freien Fall (wenn $F'$ die Schwerkraft und $M'$ die fallende Masse bezeichnet) $\frac{F'}{M'} = 1$ ist, und wenn man $v$ und $v'$ für die Endgeschwindigkeiten der ersten Secunde nimmt, diese Gröſsen also mit $G$ und $g$ vertauscht, diese Proportion (1 in folgende $G : g = \frac{F}{M} : 1$ übergeht, so folgt daraus $G = \frac{F}{M} g \ldots (2$, durch welche Formel sofort die Beschleunigung der Masse $M$, in welche die in Gewichtstheilen ausgedrückte constante Kraft $F$ wirkt, bestimmt ist.

Anmerkung 1. Wirkt die constante Kraft $F$ in die Masse $M$ und stellt man sich vor, daſs von dieser Kraft auf die Einheit der Masse der Antheil $f$ kommt, so ist (da die Geschwindigkeiten gleich sind)

$$F : f = M : 1 \quad \text{oder} \quad F = Mf \ldots (n.$$

Französische Schriftsteller nennen dabei $f$ die beschleunigende und $F$ oder $Mf$ die bewegende Kraft. So wäre bei dem freien Falle der Körper $f = g$ die beschleunigende und $Mg$ die bewegende Kraft der fallenden Masse $M$ (und zugleich auch §. 35, Anmerkung, das Gewicht derselben).

Ist nun $M$ eine Masse, in welche eine constante oder beschleunigende Kraft wirkt, die dem Gewichte einer Masse $P$ gleich ist, und $G$ die in der Masse $M$ erzeugte Beschleunigung (Endgeschwindigkeit der ersten Secunde oder Geschwindigkeitszunahme in jeder Secunde); ist ferner $M$ eine andere eben so grofse Masse, die man frei fallen läfst, wodurch ihre Beschleunigung gleich $g$ wird; so hat man, da die bewegenden Kräfte beziehungsweise $Pf$ und $Mf$ sind, wenn man nämlich, um sich von jeder Masseneinheit unabhängig zu machen, das Gewicht der Masseneinheit mit $f$ bezeichnet, wegen Gleichheit der Massen, sofort $Pf : Mf = G : g$, woraus wieder, wie vorhin, $G = \frac{P}{M} g$ folgt, und wobei das Gewicht der Masse $M$ gar nicht in Betracht kommt. Auch ist hier, der Gleichartigkeit der Formel wegen, $P$ ebenfalls als eine Masse dargestellt; da aber diese (§. 35) durch dieselbe Zahl wie ihr Gewicht ausgedrückt wird, so gibt $P$ zugleich den Zahlenwerth der bewegenden Kraft an und kann als die Kraft selbst angesehen werden.

Anmerk. 2. Drückt man mit den französischen Schriftstellern das Gewicht $P$ einer Masse $M$ durch $P = Mg$, also das Gewicht der Masseneinheit durch $g$ aus, so bleibt zwar die obige Formel für $G$, wie die Ableitung zeigt, die nämliche, allein, wenn nach unserer Bezeichnungsart für die Masseneinheit $M = 1$ und Kräfteneinheit $P = 1$, die Beschleunigung $G = g$ wird, so wird nach der Annahme und Bezeichnungsart der erstern, für die Krafteinheit $P = 1$ und Masseneinheit $M = g$ die Beschleunigung derselben $G = 1$.

Auch wird dabei die auf die Masseneinheit (gleich $g$) wirkende beschleunigende Kraft durch $P = G$ und daher die auf die Masse $M$ kommende Kraft durch $MG$ ausgedrückt; aus diesem Grunde nennen die französischen Schriftsteller $G$ oder auch $g$ die beschleunigende und $MG$ oder $Mg$ die bewegende Kraft.

## Fall oder Bewegung auf der schiefen Ebene.

**§. 147.** Liegt ein Körper $O$ (Fig. 123), dessen Gewicht $P$ seyn mag, auf einer schiefen Ebene $AB$, so treibt ihn die Kraft $P$ nach lothrechter Richtung und würde in ihm die Beschleunigung $g$ erzeugen. Zerlegt man $P$ in zwei auf einander senkrechte Kräfte $p$ und $q$, parallel und senkrecht zu $AB$, so ist die erstere (§. 109, Gleichung 1)

$$p = \frac{BC}{AB} P = \frac{h}{l} P \ldots (1,$$

wenn man $BC = h$ und $AB = l$ setzt, von derselben Natur wie die Kraft $P$, also ebenfalls constant, welche sofort in der Masse des Körpers eine gleichförmig beschleunigte Bewegung erzeugt, während die letztere oder drückende Kraft (§. 109, Gleichung 2)

$$q = \frac{AC}{AB} P = \frac{b}{l} P \ldots (2$$

von der Festigkeit der Ebene aufgehoben wird.

Ist $Oc = g$ die Beschleunigung der Schwere beim freien Fall, so ist $Oa$ die Beschleunigung $G$ auf der schiefen Ebene, folglich

$$G = \frac{h}{l} g \ldots (3$$

(dasselbe folgt auch aus der Gleichung 2 des vorigen Paragraphes, wo $P = Oa = \frac{h}{l} P$ und $M = P$ zu setzen ist).

Ist $\alpha$ der Neigungswinkel $BAC$ der schiefen Ebene, so ist

$$\frac{h}{l} = Sin\,\alpha, \quad \text{folglich auch} \quad G = g\,Sin\,\alpha \ldots (3'.$$

**§. 148. Endgeschwindigkeit auf der schiefen Ebene.** Zur Bestimmung der Geschwindigkeit, welche ein Körper beim Herabgleiten über die schiefe Ebene $BA = l$ im Puncte $A$ erlangt, hat man (§. 142, Gl. 3)

$$v = \sqrt{(2\,G\,l)} = \sqrt{\left(2\frac{h}{l}gl\right)} = \sqrt{(2\,g\,h)}$$

(wenn man nämlich für $G$ den Werth aus (3 des vorigen Paragraphes setzt).

Diese Geschwindigkeit ist also gerade so groſs, als wenn der Körper von der Höhe $BC = h$ der schiefen Ebene frei herabgefallen wäre. Da diese Endgeschwindigkeit von der Neigung der schiefen Ebene unabhängig ist, so ist sie für alle die schiefen Ebenen $AB$, $A'B\ldots$ (Fig. 124) von derselben Höhe $BC$ die nämliche.

So wie ein mit der Geschwindigkeit $v$ vertical aufwärts geworfener Körper jene Höhe erreicht, durch welche er fallen muſs, um diese Geschwindigkeit $v$ zu erlangen, so wird auch eine über die schiefe Ebene mit der in $A$ durch das Herabgleiten über $BA$ erlangte Geschwindigkeit aufwärts geworfener Körper genau wieder bis zu dem Puncte $B$ gelangen und dort seine ganze Geschwindigkeit verloren haben.

Soll auch noch die Zeit gefunden werden, welche der Körper braucht, um über die schiefe Ebene $BA = l$ herabzugleiten, so ist (aus §. 142, Gl. 2) $l = \frac{1}{2} G t^2 = \frac{1}{2} g \frac{h}{l} t^2$, und daraus $t = \sqrt{\left(\frac{2\,l^2}{g\,h}\right)} \ldots (4.$

Zieht man in einem, in einer verticalen Ebene liegenden Kreis $C$ (Fig. 125) vom Halbmesser $r$ auſser dem lothrechten Durchmesser $BD$ noch durch den Punct $B$ eine beliebige Sehne $BA$, so kann diese als eine schiefe Ebene angesehen werden, wofür nach der vorigen Formel (4 $t = \sqrt{\left(2\frac{AB^2}{g.BE}\right)}$ oder, da nach einem Satze der Geometrie $AB^2 = BE.BD = 2rBE$ ist, auch $t = \sqrt{\left(\frac{4r.BE}{g.BE}\right)} = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$ wird.

Da nun dieser Ausdruck von der Länge $l$ der schiefen Ebene oder der Sehne $BA$ unabhängig ist, so bleibt er für alle Sehnen desselben Kreises, wie z. B. $BA'$, $BD$ u. s. w., derselbe, folglich fällt ein Körper über alle diese Sehnen in der nämlichen Zeit, wie durch den lothrechten Durchmesser dieses Kreises herab.

**§. 149. Fall über eine krumme Linie** *(eigentlich krumme Fläche).* Liegt die Curve $AB$ (Fig. 126) in einer verticalen Ebene $ABC$ und theilt man diese in den Puncten $a$, $b$, $c$... in sehr viele kleine Theile, so zwar, dafs man die Curvenelemente $Ba$, $ab$... als gerade Linien ansehen kann, so erlangt ein über die Curve $BA$ (als Durchschnitt einer krummen Fläche mit der verticalen Ebene $ABC$), also über eine ununterbrochene Reihe von schiefen Ebenen $Ba$, $ab$... herabgleitender Körper in den Puncten $a$, $b$...$A$ jene Geschwindigkeit, welche er durch den freien Fall von $B$ durch $BC$ in den Puncten $a'$, $b'$... $C$ erlangt hätte.

Anmerkung. Hiebei wird vorausgesetzt, dafs der Körper beim Übergang von einer schiefen Ebene zur nächst folgenden von der erlangten Geschwindigkeit nichts verliere, was bei einer Curve in der That auch der Fall ist. Denn hat ein Körper im Puncte $B$ (Fig. 127), wo er von der Ebene $AB$ auf jene $BC$ übergeht, die Geschwindigkeit $Bc$ erlangt, und wird diese in die zwei Geschwindigkeiten $Bb$ und $Ba$, senkrecht auf $BC$ und parallel mit $BC$, zerlegt; so geht die erstere verloren und der Körper beginnt seinen Lauf auf der Ebene $BC$ mit der Geschwindigkeit $Ba$. Wird nun, wie es bei den auf einander folgenden Elementen einer continuirlichen Curve der Fall ist, der Winkel $ABD = Bcb$ unendlich klein, so wird auch $Bb$, d. i. der Verlust an Geschwindigkeit, unendlich klein oder gleich Null.

## Einfaches und zusammengesetztes Pendel.

**§. 150. Erklärung.** Im Allgemeinen versteht man unter einem Pendel jeden festen Körper, welcher vermöge seiner Schwere um einen festen Punct oder eigentlich um eine horizontale Achse schwingt.

Nimmt man zur Vereinfachung der Untersuchung eine in einer verticalen Ebene liegende gerade Linie $CA$ (Fig. 128), welche sich um den Endpunct $C$ drehen kann und mit derem anderen Endpunct $A$ ein schwerer Punct verbunden ist, oder auch einen gewichtlosen Faden $AC$, welcher in $C$ befestiget ist und in $A$ einen schweren materiellen Punct trägt; so nennt man ein solches Pendel ein einfaches oder auch mathematisches Pendel, während alle wirklich bestehenden zusammengesetzte oder physiche Pendel heifsen. Man nähert sich dem

Begriffe des mathematischen Pendels, wenn man an einen sehr feinen Faden ein kleines Blei- oder besser noch Platinkügelchen befestiget und dieses um den Aufhängpunct $C$ des Fadens schwingen läſst.

Wird das Pendel aus seiner verticalen Lage $CA$, in der es allein nur ruhen kann (§. 64, Anmerk.) in die Lage $CA'$ gebracht und frei gelassen, so wird es durch die Schwere getrieben und durch den Faden geführt, den Kreisbogen $A'A$ herab und auf der andern Seite, durch die in $A$ erlangte Geschwindigkeit (§. 148, Anmerk.) in einen gleichen Bogen, wieder eben so hoch, nämlich bis $A''$ hinaufgehen; hier angekommen geht es wieder durch den Bogen $A''A$ herab und über jenen $AA'$ hinauf u. s. w., so, daſs es also ohne das Vorhandenseyn von Nebenhindernissen, diese Schwingungen oder Oscillationen durch die Bögen $A'A''$ oder $A''A'$ (auch Pendelschläge genannt) ohne Ende wiederholen oder fortsetzten müſste. Die Zeit, welche das Pendel zur Vollendung einer Schwingung $A'A''$ oder $A''A'$ braucht, heiſst die Schwingungszeit, der Winkel $ACA' = ACA''$ Elongationswinkel und der in Gradmaſs ausgedrückte Bogen $A'AA''$ die Schwingungsweite oder Amplitude.

Anmerkung. Weil der Bogen $A'AA''$ ein Kreisbogen ist, so nennt man ein solches Pendel öfter auch ein Kreispendel.

**§. 151. Schwingungszeit des einfachen Pendels.** Nimmt man in dem Kreise $O$ (Fig. 129) vom Halbmesser $r$ den Pfeil (oder Sinusversus) $AB$ und beschreibt darüber als Durchmesser einen Kreis, nimmt ferner im erstern Kreis einen kleinen Bogen $ab$, halbirt diesen in $c$ und fällt auf $AC$ die Perpendikel $af$, $cg$ und $bh$, zieht $bd$ parallel mit $AC$; so ist nach geometrischen Gründen, wenn man Bogen $ab = a$, jenen zwischen den beiden Parallelen $af$, $bh$ liegenden Bogen $a'b' = a'$, $AB = b$ und $Bg = h$, und noch voraussetzt, daſs der Pfeil $b$ gegen den Durchmesser $2r$ sehr klein und der Bogen $ab$ unendlich klein ist, sofort $\frac{a^2}{a'^2} = \frac{2rh}{b^2} \ldots (m\,*)$.

---

*) Es folgt nämlich aus den ähnlichen Dreiecken $Cgc$ und $abd$:

$$ab : bd = Cc : gc \text{ , oder } ab = \frac{r.bd}{gc};$$

eben so ist auch $a'b' = \frac{r'.bd}{gc'}$, wobei $r' = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}b$ ist. Man hat daher $\frac{ab}{a'b'}$, d. i. $\frac{a}{a'} = \frac{r.gc'}{\frac{1}{2}b.gc}$ oder $\frac{a^2}{a'^2} = \frac{4r^2}{b^2} \cdot \frac{gc'^2}{gc^2}$ oder da $gc^2 = Dg.Ag = 2r.Ag$ (wenn man nämlich unter der gemachten

Diefs vorausgesetzt, sey bei der Pendelschwingung der schwere Punct von $A'$ bis zu irgend einem Punct $c$ gekommen und habe hier die Geschwindigkeit $v$ erlangt, so entspricht diese (§. 149) der Fallhöhe $BG = h$ und ist durch die Gleichung $v^2 = 2gh$ . . . (n bestimmt. Verfolgt man von hier an die Bewegung noch durch einen unendlich kleinen Bogen $a$, wozu auch nur eine unendlich kleine Zeit $t'$ gehört, so kann man während dieser kleinen Zeit die Bewegung als eine gleichförmige ansehen und sonach $a = vt'$ setzen, woraus $t' = \frac{a}{v}$ oder $t'^2 = \frac{a^2}{v^2}$, oder wenn man für $a^2$ den aus der vorigen Gleichung (m folgenden Werth, und für $v^2$ den Werth aus (n setzt und abkürzt,

$$t'^2 = \frac{r\,a'^2}{g\,b^2} \quad \text{oder} \quad t' = \frac{a'}{b}\sqrt{\frac{r}{g}} \quad \text{folgt.}$$

Bezeichnet man für das folgende Element $a_1$ des Bogens $A'bA$ den auf den Halbkreis $Ba'A$ entsprechenden unendlich kleinen Bogen mit $a''$ (so dafs $a''$ mit $a_1$ eben so wie $a'$ mit $a$ zusammenhängt) und mit $t''$ die Zeit, welche der schwere Punct braucht, um durch den Bogen $a_1$ zu gehen; so ist genau eben so $t'' = \frac{a''}{b}\sqrt{\frac{r}{g}}$. Wiederholt man dieses Verfahren von $A'$ bis $A$, so gibt die Summe aus allen diesen Zeiten $t', t''$. . . (wo dann $a$ das erste Bogenelement an $A'$ und $t'$ die zugehörige Zeit bezeichnet) die Zeit $t$ für einen halben Schwung von $A'$ bis $A$, so, dafs also $t = t' + t'' + \ldots = \sqrt{\frac{r}{g}}\left(\frac{a' + a'' + \ldots}{b}\right)$, oder da $a' + a'' + \ldots$ die Länge der halben Kreisperipherie $Ba'A$ vom Durchmesser $b$, also $= \frac{1}{2}b\pi$ ist, auch $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ wird. Da nun das Pendel zum Steigen durch den Bogen $AA''$ dieselbe Zeit wie zum Fallen des gleichen Bogens $A'A$ braucht, so ist die ganze Schwingungszeit: $T = 2t$ oder $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . . . (1, wenn man nämlich unter einem $l$ statt $r$ für die Länge des Pendels setzt.

Anmerkung. Wie aus der Ableitung dieser Formel (1 erhellt, so wird dabei vorausgesetzt, dafs der Elongationswinkel $A\,{}'\,A' = \alpha$ sehr klein sey; ist diefs nicht der Fall, so gibt diese Formel die Schwingungszeit etwas zu klein. Drückt man $\alpha$ in Theilen des Halbmessers 1 aus, so ist dann

---

Voraussetzung $Ag$ als sehr klein gegen $AD$ vernachläfsigen und anstatt $Dg$ den Durchmesser $DA$ setzen kann) und $gc'^2 = Bg\,.\,Ag = h\,.\,Ag$ ist, auch $\frac{a^2}{a'^2} = \frac{4r^2}{b^2}\,.\,\frac{h}{2r} = \frac{2rh}{b^2}$, wie oben angenommen wurde.

genauer $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$. So wäre für $\alpha = 1$ Grad, die Länge von $\alpha$ in Theilen des Halbmessers $= \frac{\pi}{180} = \frac{3{\cdot}1416}{180} = {\cdot}01745$, also $T = 1{\cdot}000019\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, so, dafs man durch Anwendung der Formel (1 bei diesem Elongationswinkel einen Fehler von nahe den 50000sten Theil der Schwingungszeit begeht, was auf 50000 Secunden eine, oder auf 24 Stunden nicht volle zwei Secunden beträgt.

## §. 152. Gesetze der Pendelschwingungen.

Aus der vorigen Formel (1 ergeben sich folgende Gesetze für das Pendel:

1. Da bei kleinen Schwingungen die Schwingungszeit von der Gröfse des Schwingungsbogens (der Amplitude) $A'AA''$ unabhängig ist, so finden diese Schwingungen alle in derselben Zeit Statt oder sie sind isochronisch.

2. Sind $t$ und $t'$ die Schwingungszeiten für zwei Pendel von den Längen $l$ und $l'$, so ist, für ein und denselben Ort der Erde (wofür $g$ denselben Werth behält) $t : t' = \sqrt{l} : \sqrt{l'}$ oder auch $l : l' = t^2 : t'^2$, d. h. die Schwingungszeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen, oder diese Längen wie die Quadrate der Schwingungszeiten.

Macht das erste Pendel $n$, das zweite $n'$ Schwingungen in derselben Zeit $T$, so ist $t = \frac{T}{n}$ und $t' = \frac{T}{n'}$, folglich auch

$$l : l' = \frac{T^2}{n^2} : \frac{T^2}{n'^2} = n'^2 : n^2,$$

d. h. die Pendellängen verhalten sich auch umgekehrt wie die Quadrate der Zahlen, welche angeben, wie viele Schwingungen in gleicher Zeit gemacht werden.

3. Befindet sich das zweite Pendel von der Länge $l'$ an einem andern Orte, wo die Beschleunigung der Schwere $g'$ ist, so hat man

$$t : t' = \sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{l'}{g'}}.$$

Sollen nun die Schwingungszeiten gleich seyn, so mufs auch $\frac{l}{g} = \frac{l'}{g'}$ oder $g : g' = l : l'$ seyn, d. h. es ist bei gleichen Schwingungszeiten die Schwere den Pendellängen proportional.

4. Sind dagegen die Pendellängen gleich, so ist $t : t' = \sqrt{g'} : \sqrt{g}$ oder $g : g' = t'^2 : t^2 = n^2 : n'^2$,

d. h. die Schwerkräfte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszeiten oder gerade wie die Quadrate der Zahlen, welche anzeigen, wie viele Schwingungen dasselbe, oder Pendeln von gleichen Längen in derselben Zeit machen.

Für die absolute Intensität der Schwere an irgend einem Ort der Erde hat man $g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$.

5. Für die Länge des Secundenpendels $L$ hat man, wegen $T = 1$:

$$L = \frac{g}{\pi^2} = \frac{g}{9{\cdot}87}, \text{ also auch } g = 9{\cdot}87\,L.$$

Da man für Wien (im luftleeren Raum und auf das Niveau des Meeres reducirt) nahe $L = 3{\cdot}144$ Fuſs fand, so ist für diesen Ort die Beschleunigung der Schwere $g = 31{\cdot}03$ Fuſs (vergleiche §. 142. Genauer ist für Wien $L = {\cdot}99394825$ Meter).

**§. 153. Mittelpunct des Schwunges eines zusammengesetzten Pendels.** Legt man durch den Schwerpunct $O$ (Fig. 130) eines physischen oder zusammengesetzten Pendels, senkrecht auf die horizontale Schwingungsachse $C$ eine Ebene und nimmt darin die beliebigen Puncte $a$, $b$... an, so schwingen diese mit dem Pendel gleichzeitig, während sie, wenn sie frei oder von einander unabhängig wären, ungleich, und zwar der schwere Punct $a$ schneller als jener $b$ schwingen würde u. s. w.; es wird also durch diese Verbindung der Punct $a$ zurückgehalten und jener $b$ beschleunigt. Es gibt jedoch einen Punct $F$ (eigentlich sind es mehrere Puncte), welcher weder beschleunigt noch retardirt wird und in seiner Verbindung mit dem Pendel genau eben so schwingt als ob er frei wäre, und dieser Punct heiſst Mittelpunct des Schwunges; man findet ihn, wenn man nach der Formel (1 §. 151 die Länge $l$ eines einfachen Pendels berechnet, welches mit diesem zusammengesetzten Pendel gleiche Schwingungszeiten $T$ hat (die man also beobachten muſs), und diesen Werth von $l$ auf der durch $C$ und $O$ gehenden Geraden von $C$ bis $F$ aufträgt; dieser Abstand $CF = l$ des Schwingungsmittelpunctes $F$ vom Aufhängpuncte $C$ bestimmt zugleich die Länge des zusammengesetzten Pendels, weil es in der That mit einem einfachen Pendel von derselben Länge gleiche Schwingungszeiten besitzt. (Ein anderer Ausdruck für die Bestimmung dieses Punctes $F$ folgt in §. 170.).

Anmerkung. Der Mittelpunct des Schwunges besitzt gegen den Aufhängpunct eines zusammengesetzten Pendels die merkwürdige Eigenschaft oder Beziehung, daſs, wenn man das Pendel umkehrt und in diesem Mittelpuncte aufhängt, sofort der vorige Aufhängpunct zum Mittelpuncte des Schwunges wird, das Pendel also in beiden Fällen dieselbe Schwingungszeit (und zwar wie das einfache Pendel von der Länge $CF$) besitzt (M. s. §. 170, Anmerkung 2). Man benützt diese Eigenschaft um den Mittelpunct des Schwunges bei dem eigens dafür construirten Reversionspendel, wobei sich von zwei durch $C$ und $F$ gehenden Schwingungsachsen (in Form von Schneiden) die eine verschieben, oder die Entfernung $CF$ reguliren (oder wo diefs nicht der Fall, ein kleines Gewicht $m$ an der Stange verschieben) läfst, practisch zu bestimmen.

Bekanntlich benützt man das Pendel als Zeitmesser, und bei den Uhren zur Regulirung der Bewegung. Man befestigt eine schwere linsenförmige Masse, um den Widerstand der Luft leichter zu überwinden, an eine dünne Stange, welche oben mittelst einer Messerschneide, oder vielleicht noch besser, einer Uhrfeder aufgehängt wird.

# Drittes Kapitel.

## *Von der Centrifugal- oder Fliehkraft.*

**§. 154. Erklärung.** Befindet sich an dem Endpuncte $A$ (Fig. 131) eines in $C$ befestigten gewicht- und massenlosen Fadens $CA$ ein blofs materieller Punct von der Masse $M$ (deren Gewicht also dabei gar nicht in Betracht kommt), und wird diese durch eine momentane Kraft nach der Richtung $AT$ mit irgend einer Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt, so kann sich diese Masse vermöge der Verbindung mit dem Puncte $C$ nur im Kreise $AMB$ fortbewegen, und diese wird sonach während der Zeit, in welcher sie ohne diese Verbindung den Weg $AE$ zurückgelegt hätte, um das Stück $EM$ gegen den Mittelpunct $C$ gezogen, oder was dasselbe ist, die Masse $M$ hat das Bestreben, sich in dieser Zeit um $ME$ von $C$ zu entfernen. Die Kraft nun, mit welcher der Faden, welcher dieses Entfernen vom Mittelpuncte $C$ jeden Augenblick verhindert (indem die Masse nach dem Beharrungsvermögen in jedem Puncte der krummlinigen Bahn nach der Tangente fortgehen will), dadurch gespannt wird, heifst Centrifugal-, Flieh- oder Schwungkraft, und sie ist genau jener Kraft gleich, welche die Masse $M$ beständig gegen den Mittelpunct hinziehen mufs, um der Fliehkraft das Gleichgewicht zu halten, und welche defshalb Centripedal- oder Centralkraft genannt wird.

**§. 155. Bestimmung der Fliehkraft.** Hat die Masse $M$ im Puncte $A$ durch eine momentane Kraft nach der Richtung