Erstes Kapitel.

Von den Gesetzen der gleichförmigen und gleichförmig veränderten Bewegung und dem Maſse der Kräfte. Zerlegung und Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

§. 129. Gesetze für die gleichförmige Bewegung. Bezeichnet c die Geschwindigkeit, mit welcher das Bewegliche gleichförmig fortgeht, also (§. 125) den in jeder Secunde zurückgelegten Weg; so sind $2c$, $3c$ . . . tc die Wege, welche das Bewegliche in 2, 3 . . . t Secunden durchläuft, so, daſs, wenn man diesen Weg allgemein mit s bezeichnet, sofort

$$s = ct \; . \; . \; . \; (1$$

die Gleichung für die gleichförmige Bewegung ist.

Da also der Weg gefunden wird, indem man die Geschwindigkeit, d. h. die Absolutzahl, welche anzeigt, wie oft die Linieneinheit in c, mit der Zeit, d. i. mit der unbenannten Zahl, welche angibt, wie oft die Zeiteinheit in t enthalten ist, multiplicirt; so kann man diesen auch geometrisch durch die Fläche eines Rechteckes AD (Fig. 112) darstellen, in welchem die Grundlinie $AB = t$ und Höhe $AC = c$, d. h. in welchem AC der in einer Secunde zurückgelegte Weg ist, und AB eben so viele Linieneinheiten als t Zeiteinheiten enthält. Die Fläche AD enthält nämlich dann eben so viele Flächeneinheiten, die sich auf die übrigens willkürlich gewählte Linieneinheit beziehen, als der Weg s Linieneinheiten enthält.

Bewegt sich z. B. ein Körper gleichförmig mit 2 Fuſs Geschwindigkeit, so ist der nach vier Secunden zurückgelegte Weg (Gleich. 1) $s = 2 . 4 = 8$ Fuſs. Trägt man eine beliebige Linienheit, welche 1 Fuſs bedeuten soll, 4 Mal von A bis B (Fig. 112) und 2 Mal von A bis C, construirt aus diesen beiden Linien das Rechteck AD, so enthält dieses 8 Quadratfuſs Fläche, so daſs die Absolutzahl 8 mit der vorigen für s gefundenen Zahl übereinstimmt.

§. 130. Aus der obigen Gleichung (1 folgt auch $c = \frac{s}{t} \; . \; . \; . \; (2$ und $t = \frac{s}{c} \; . \; . \; . \; (3$, d. h. die Geschwindigkeit ist der Quotient aus der Zeit in den Weg, die Zeit degegen die Verhältniſszahl aus der Geschwindigkeit in den Weg. Sind die Zeiten gleich, so verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die zurückgelegten Wege u. s. w.

Beispiel 1. Ein Punct in der Peripherie eines Wasserrades bewegt sich mit 3 Fuſs Geschwindigkeit (per Secunde); welchen Weg beschreibt dieser Punct während $2\frac{1}{2}$ Minuten?

Hier ist $c = 3$ und $t = 2\frac{1}{2} \times 60 = 150$, folglich (Gl. 1)

$$s = 3 \times 150 = 450 \text{ Fuſs}.$$

Beispiel 2. Wie viele Umläufe muſs ein Mühlstein von 3 Fuſs Durchmesser in einer Minute machen, damit ein Punct in dessen äuſseren Peripherie eine Geschwindigkeit von 25 Fuſs erlange.

Der in einer Minute mit 25 Fuſs Geschwindigkeit zurückgelegte Weg beträgt $25 \times 60 = 1500$ Fuſs. Da nun die Peripherie von 3 Fuſs Durchmesser nahe 9·42 Fuſs beträgt, so ist die gesuchte Umlaufszahl

$$n = \frac{1500}{9{\cdot}42} = 159 \text{ sehr nahe.}$$

Beispiel 3. Welche Geschwindigkeit besitzt ein Punct in der Peripherie eines solchen Mühlsteins, welcher per Minute 200 Mal umläuft?

Hier ist der in einer Minute zurücklegte Weg $s = 200 \times 9{\cdot}42 = 1884$ Fuſs, folglich die gesuchte Geschwindigkeit (per Secunde) nach der Gl. (2

$$c = \tfrac{1884}{60}\ 31{\cdot}4 \text{ Fuſs}.$$

Auf dieselbe Weise findet man auch die mittlere Geschwindigkeit einer regelmäſsigen periodischen Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit (§. 123) innerhalb gewisser Gränzen veränderlich ist.

Beispiel 4. In welcher Zeit wird ein Rad von 4 Fuſs 8 Zoll Halbmesser 100 Umdrehungen vollenden, wenn dasselbe in jeder Minute 36 Umdrehungen macht?

Da der Umfang dieses Rades $(2 \times 4{\cdot}67 \times 3{\cdot}1416 =)$ 29·33 Fuſs beträgt, so beschreibt ein Punct desselben in einer Minute den Weg von $36 \times 29{\cdot}33 = 1055{\cdot}88$ Fuſs, und es ist daher seine Geschwindigkeit

$$c = \frac{1055{\cdot}88}{60} = 17{\cdot}598 \text{ Fuſs}.$$

Der nach 100 Umdrehungen des Rades von diesem Puncte durchlaufene Weg ist aber $100 \times 29{\cdot}33 = 2933$ Fuſs, demnach ist endlich die hierzu nöthige Zeit nach Gleich. (3: $t = \frac{2933}{17{\cdot}598} = 166{\cdot}7$ Sec., oder das Rad wird zu 100 Umgängen die Zeit von 2 Minuten 46·7 Sec. brauchen.

Anmerkung. Da sich die Umdrehungszeiten wie die Anzahl der Umdrehungen verhalten, so kann diese Frage einfacher durch die Proportion

$$36 : 100 = 1 : x$$

aufgelöst werden, indem man daraus unmittelbar

$$x = \tfrac{100}{36} = 2{\cdot}78 \text{ M.} = 2 \text{ M}, 46{\cdot}8 \text{ S.},$$

wie zuvor findet.

§. 131. Maſs für momentan wirkende Kräfte.

Da uns die Natur der Kräfte gänzlich unbekannt ist, so können wir sie bloſs aus und nach ihren Wirkungen beurtheilen. Was nun die sogenannten momentan wirkenden Kräfte insbesondere anbelangt, so hält man eine solche für gröfser oder kleiner, je nachdem sie unter gleichen Umständen fähig ist, ein und demselben Körper eine gröfsere oder kleinere Geschwindigkeit mitzutheilen, und man nimmt sonach an, dafs diese Kräfte den Geschwindigkeiten proportional seyen, welche sie dem nämlichen Körper mittheilen können. Diese Annahme oder Hypothese kann, da sie nirgends widersprochen, sondern im Gegentheil durchaus bestätigt wird, als ein Grundsatz, und sonach diese in einem bestimmten Körper erzeugte Geschwindigkeit als Mafs der momentan wirkenden Kraft gelten, durch welche diese Geschwindigkeit erzeugt wurde.

Anmerkung. Dieser hier ausgesprochene Grundsatz bildet mit jenem, von dem Beharrungsvermögen (§. 2, 6) oder der Trägheit der Körper oder Materie die einzigen beiden Grundsätze oder Axiome der ganzen Mechanik.

§. 132. Gröfse der Bewegung. Erzeugen zwei Kräfte P und P' in verschiedenen Massen M und M' dieselbe Geschwindigkeit, so verhalten sich diese wie die Massen, oder es ist $P : P' = M : M'$; denn um der doppelten Masse dieselbe Geschwindigkeit wie der einfachen beizubringen, ist auch die doppelte Kraft nothwendig, indem $2M$ aus $M + M$ und $2P$ aus $P + P$ besteht, und sonach in jede Masse M wieder eine gleich grofse Kraft P einwirkt; dasselbe gilt allgemein von der Masse nM, in welche die $n$fache Kraft nP wirkt.

Erzeugen diese Kräfte aber in ein und derselben Masse ungleiche Geschwindigkeiten v und v', so verhalten sie sich zu Folge des im vorigen Paragraphe ausgesprochenen Satzes wir diese Geschwindigkeiten, oder es ist $P : P' = v : v'$. Es stehen daher die Kräfte im zusammengesetzten Verhältnifs der Massen und Geschwindigkeiten, oder es ist allgemein, wenn die Massen und Geschwindigkeiten ungleich sind:

$$P : P' = Mv : M'v' \quad \ldots \text{(1.}$$

Setzt man $P' = 1$ für $M' = 1$ und $v' = 1$, so folgt aus dieser Relation $P = Mv$, d. h. wenn man jene momentan wirkende Kraft, welche in der Masse $= 1$ eine Geschwindigkeit $= 1$ erzeugt, zur Einheit nimmt; so wird jede andere Momentankraft durch das Product aus der Masse in die Geschwindigkeit ausgedrückt, welche sie in dieser Masse erzeugt.

Dieses Product Mv heifst auch Gröfse der Bewegung.

§. 133. Gleichförmig veränderte Bewegung. Wirkt auf einen Körper eine constante Kraft (§. 128), und nimmt man die in ihm während eines beliebigen Zeittheilchens erzeugte Geschwindigkeit zur Einheit, oder setzt diese $= 1$, so erlangt der Körper während des zweiten eben so grofsen Zeittheilchens die Geschwindigkeit $= 2$ (weil jene $= 1$ vermöge dem Beharrungsvermögen aus dem ersten Zeittheilchen auf das zweite übertragen, und dann durch die gleich bleibende Einwirkung der Kraft während des zweiten Zeittheilchens neuerdings die Geschwindigkeit $= 1$ erzeugt wird, und zu der vorigen hinzukommt), in dem dritten Zeittheilchen die Geschwindigkeit $= 3$ u. s. w., so, dafs also die Geschwindigkeit genau so wie die Zeit zunimmt; eine solche Bewegung heifst eine gleichförmig beschleunigte, während, wenn die constante Kraft der Bewegung entgegenwirkt, und sonach die Geschwindigkeit eben so abnimmt, wie die Zeit zunimmt, eine gleichförmig verzögerte Bewegung entsteht; beide diese Bewegungen sind in der gleichförmig veränderten Bewegung enthalten.

§. 134. Gesetze für die gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung. Ist die Geschwindigkeit des Körpers oder Punctes am Ende der ersten Secunde (jene Geschwindigkeit nämlich, mit welcher das Bewegliche gleichförmig fortgehen würde, wenn am Ende dieser ersten Secunde die beschleunigende Kraft zu wirken aufhörte) $= c$, also am Ende der 2ten, 3ten . . $t$ten Secunde $= 2c, 3c \ldots tc$; so hat man zuerst für die Endgeschwindigkeit nach t Secunden die Gleichung

$$v = ct \ldots (1.$$

Um auch eine Gleichung für den zurückgelegten Weg zu finden, so stelle die Gerade AB (Fig. 113) die Zeit t, und das in B auf AB errichtete Perpendikel BC die Endgeschwindigkeit v dar; zieht man die Gerade AC, so wird jedes Perpendikel, wie ad die der Zeit $Aa = t'$ entsprechende Endgeschwindigkeit v' vorstellen; denn es ist nach dem Satze der ähnlichen Dreiecke $ad : BC = Aa : AB$, d. i. $v' : v = t' : t$, es sind also, wie es nach der vorigen Gleichung 1) seyn soll, die Endgeschwindigkeiten den Zeiten proportional.

Denkt man sich nun die Zeit t oder Gerade AB in eine sehr grofse Anzahl gleicher Theile, wie ab, $bc \ldots$ getheilt, und in den Theilungspuncten die Perpendikel ad, be, $cf \ldots$, so wie auch die parallelen dr, $es \ldots$ mit AB gezogen; so kann man sich vorstellen, dafs die Bewegung während eines jeden einzelnen dieser sehr kleinen Zeittheilchen ab, $bc \ldots$ gleichförmig bleibt, folglich die zurückgelegten

Wege (§. 129, Anmerk.) durch die entsprechenden Rechtecke ar, bs u. s. w., also der gesammte Weg durch die Summe aller dieser Rechtecke ausgedrückt werde. Je kleiner man diese einzelnen Zeitintervalle ab, bc . . . nimmt, desto mehr nähert sich diese Annahme der Wahrheit, und wenn man AB in unendlich viele gleiche Theile theilt, wodurch die einzelnen Zeitintervalle unendlich klein werden, so hat man sich dem Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung vollkommen genähert, und da in diesem Falle die Summe aller dieser unendlich schmalen Rechtecke die Fläche des Dreieckes ABC ausmacht, und diese durch $\frac{1}{2}AB \times BC$ ausgedrückt wird, so hat man auch für AB und BC die Werthe oder ihre Bedeutungen gesetzt, für den gesuchten Weg: $s = \frac{1}{2}tv$, oder wenn man für v aus der Gleich. 1) substituirt:

$$s = \tfrac{1}{2}ct^2 \quad . \; . \; . \; (2.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen zeigt, dafs, wenn das Bewegliche schon im Anfange der Bewegung die am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit v gehabt, und mit dieser gleichförmig fortgegangen wäre, der in derselben Zeit t zurückgelegte Weg $= vt$ doppelt so grofs ausgefallen wäre. Zugleich ist ersichtlich, dafs das Bewegliche denselben Weg in der nämlichen Zeit mit gleichförmiger Bewegung zurückgelegt, wenn es dabei die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}v$, d. h. die mittlere zwischen der Anfangsgeschwindigkeit (= Null) und der Endgeschwindigkeit (= v) besitzt.

§. **135.** Hat ein in Bewegung befindlicher Körper in dem Augenblicke als eine constante (d. i. gleichförmig verzögernde) Kraft seiner Bewegung entgegenwirkt, die Geschwindigkeit C, so wird nach Verlauf der Zeit t diese noch die Gröfse $v' = C - ct$ (nach der Gleich. 1) besitzen. Der während dieser Zeit zurückgelegte Weg dagegen ist (mit Rücksicht auf die Gleich. (2 des vorigen Paragraphs)

$$s = Ct - \tfrac{1}{2}ct^2.$$

Wirkt die constante Kraft nach derselben Richtung, nach welcher diese Geschwindigkeit C vorhanden ist, also beschleunigend, so gehen diese beiden Gleichungen in folgende über:

$$v' = C + ct \text{ und } s = Ct + \tfrac{1}{2}ct^2,$$

und es bezeichnet in allen diesen Formeln, c die Geschwindigkeit, welche die constante Kraft dem Beweglichen am Ende der Zeiteinheit, hier also nach der ersten Secunde mitgetheilt hat, oder was dasselbe ist, jene Geschwindigkeit, um welche der Körper in jeder Secunde beschleunigt wird.

§. **136. Mafs der constanten Kräfte.** Da eine constante Kraft in einem Körper in einer bestimmten Zeit, z. B. in einer

Secunde, eine um so gröfsere Endgeschwindigkeit hervorbringt, je gröfser die Intensität der einzelnen Impulse der Kraft während dieser Zeit ist; so kann man auch die Gröfse oder Intensität der Kraft selbst dieser Endgeschwindigkeit proportional setzen, und eine beständige Kraft nach dieser Geschwindigkeit beurtheilen, also diese als Mafs für die constante Kraft nehmen.

§. **137. Mafs einer veränderlichen Kraft.** Um die Gröfse einer veränderlichen Kraft, bei welcher also die Geschwindigkeitsänderung des Beweglichen in den einzelnen Zeiteinheiten nicht mehr constant ist, zu beurtheilen, sieht man diese in dem Augenblicke, in welchem sie gemessen werden soll, und zwar während eines unendlich kleinen Zeittheilchens als constant an, und vergleicht sie mit einer andern bekannten constanten Kraft, wobei diese beiden Kräfte den unendlich kleinen Geschwindigkeitsänderungen, welche sie in demselben Körper während dieses Zeitelementes hervorbringen können, proportional sind.

Von der Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.

§. **138.** Wirken auf einen beweglichen Körper zwei oder mehrere gleichartige Kräfte nach verschiedenen Richtungen, so folgt er der Resultirenden aus diesen Kräften mit einer Geschwindigkeit, welche sich eben so aus den Seitengeschwindigkeiten, d. h. jenen, welche die einzelnen Kräfte jede für sich erzeugen würden, wie die Mittelkraft aus den Seitenkräften ableiten und bestimmen läfst.

Wird nämlich der bewegliche Punct M (Fig. 8) gleichzeitig von zwei momentan oder auch constant wirkenden Kräften P und Q nach den Richtungen MA und MB getrieben, wovon die erstere die Geschwindigkeit MA, und die letztere jene MB hervorbringt; so mufs, da (§. 131 und 136) die Kräfte den Geschwindigkeiten proportional sind, also die Linien MA und MB zugleich die beiden Seitenkräfte darstellen, eben so auch umgekehrt die daraus hervorgehende Resultirende MC, die aus den beiden Geschwindigkeiten MA und MB resultirende Mittelgeschwindigkeit vorstellen.

§. **139.** Das Parallelogramm AB heifst im vorliegenden Falle, in welchem nämlich die Seiten MA und MB Geschwindigkeiten bezeichnen, Parallelogramm der Geschwindigkeiten, und

Alles das, was oben (Stat. Kapit. 1) von der Zerlegung und Zusammensetzung der **Kräfte** entwickelt wurde, gilt auch hier von der Zerlegung und Zusammensetzung der **Geschwindigkeiten.**

So ist z. B. für zwei Geschwindigkeiten $v = 3$ und $v' = 4$, welche (Fig. 114) einen rechten Winkel einschliefsen, die mittlere Geschwindigkeit $V = MC = 5$, wenn man $MA = 3$, $MB = 4$ abschneidet, und daraus das Rechteck AB construirt; dabei findet man den Winkel AMC oder m sehr nahe $= 37$ Grad. Durch Rechnung findet man

$$V = \sqrt{(v^2 + v'^2)} = \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5,$$

und $tang\, m = \frac{V'}{V} = \frac{3}{4} = \cdot 75$, und damit aus der Logarithmentafel

$$m = 36^\circ 52' \text{ sehr nahe.}$$

2. Um ferner die aus den beiden Geschwindigkeiten $v = 18{\cdot}25$, und $v' = 12{\cdot}45$ Fufs entspringende mittlere Geschwindigkeit V zu finden, wenn diese einen Winkel AMB (Fig. 115) von $112^\circ, 44'$ einschliefsen, erhält man, wenn MA und MB unter diesen gegebenen Winkel gezogen, und den beiden Geschwindigkeiten proportional abgeschnitten werden, durch Ergänzung des Parallelogramms (oder auch analytisch nach der Auflösung eines Dreieckes aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel) $V = MC = 17{\cdot}68$ Fufs und W. $m = 40^\circ\ 30'\ 44''$.

Anmerkung. Die Fälle, in welchen Geschwindigkeiten zerlegt oder zusammengesetzt werden müssen, um gewisse Erscheinungen richtig zu beurtheilen, kommen in der Anwendung oder im gewöhnlichen Leben sehr häufig vor.

Wird z. B. ein Rad CM (Fig. 116) wie bei einer Drehbank durch eine Stange MV, welche in einem Stifte oder Zapfen bei M eingehängt ist, in drehende Bewegung gesetzt, und hat die Stange in der gezeichneten Lage die Geschwindigkeit V, so erhält man die in diesem Augenblicke Statt findende Geschwindigkeit eines Punctes M in der Peripherie des Rades, indem man V in zwei Seitengeschwindigkeiten Ma und Mb zerlegt, wovon die erstere nach der Tangente des Kreises gerichtet, und die zweite darauf senkrecht ist, also nach dem Mittelpuncte C geht. Stellt nämlich Mc die gegebene Geschwindigkeit V vor, so ist Ma die gesuchte für die Kreisperipherie in diesem Augenblicke, während die zweite Mb verloren geht, oder eigentlich gar nicht erzeugt wird.

Springt Jemand aus einem, mit voller Geschwindigkeit gehenden Wagen, z. B. aus einem Eisenbahn-Waggon, so wird er von zwei Geschwindigkeiten, nämlich von der horizontalen des Wagens AB (Fig. 117) und der verticalen AC der Schwere getrieben, er erlangt daher eine mittlere Geschwindigkeit nach der schiefen Richtung AD, die ihn zu Boden stürzen und bedeutend beschädigen kann. (Streng genommen bildet, wie weiter unten gezeigt wird, AD eine krumme Linie, weil die beiden Geschwindigkeiten AB und AC von zwei ungleichartigen Kräften, einer momentan und einer constant wirkenden Kraft erzeugt werden.)

Springt der Mensch mit eigener Anstrengung seitwärts, und z. B. senkrecht auf die Richtung des Wagenlaufes AB (Fig. 117, a), nämlich gegen AE, so kommt er auf den Boden in einer Richtung und mit einer Geschwindigkeit an, welche durch die Diagonale AD der aus den drei Seitengeschwindigkeiten AB, AE und AC construirten Parallelopipedes dargestellt wird.

Wird eine Billardkugel gegen die elastische Bande BB' (Fig. 118) in der Richtung AM mit einer Geschwindigkeit gleich V gestofsen, so kann man diese in die zwei auf einander senkrechten Geschwindigkeiten $aM = v$ und $bM = v'$ zerlegen, wenn man die Linie $cM = V$ abschneidet und das Rechteck ab construirt; von diesen beiden Geschwindigkeiten geht die erstere nach dem Stofs unverändert gegen MB', während die letztere durch die Eigenschaft der elastischen Bande in die gerad entgegengesetzte von gleicher Gröfse, also in Mb verwandelt wird, welche mit der vorigen $Ma' = Ma$ die Resultirende Mc' gibt, die wegen Gleichheit der Dreiecke bMc' und bMc, der ursprünglichen Geschwindigkeit $Mc = V$ gleich ist, und wobei die Richtung MD mit der auf BB' senkrechten Geraden MC denselben Neigungswinkel DMC, wie die ursprüngliche Richtung AM bildet, so dafs Winkel $DMC = $ W. AMC (also auch $B'MD = BMA$) ist. Da die Bande niemals vollkommen elastisch, folglich die zurückgeworfene Geschwindigkeit immer etwas kleiner als Mb ist, so ist auch in der Wirklichkeit der Winkel bMD etwas (wenn auch sehr unbedeutend) gröfser als jener bMA.

Auf gleiche Weise liefsen sich noch viele Beispiele der Art über die Zerlegung der Geschwindigkeiten anführen.

Zweites Kapitel.

Vom freien und gehinderten Fall der Körper.

§. 140. Wirkung der Schwerkraft. Nach §. 34 fallen alle frei oder sich selbst überlassenen Körper, und zwar in Folge der Anziehung der Erdmasse, nach lothrechter Richtung gegen den Mittelpunct der Erde zu. Genaue Versuche haben überdiefs noch gelehrt, dafs alle Körper ohne Rücksicht auf ihre Natur und Beschaffenheit an demselben Orte und im absolut leeren Raume gleich schnell fallen, so, dafs also die Ursache, aus welcher z. B. eine Flaumfeder in der Luft langsamer als ein Stückchen Blei herabfällt, lediglich in dem Widerstande der Luft liegt, welchen das dichtere Blei leichter als die Feder überwinden kann.

§. 141. Die Schwerkraft erscheint uns als eine constant wirkende, beschleunigende