Zweiter Abschnitt.

Dynamik.

Einleitung.

§. **120. Erklärungen.** Bei der Bewegung eines Körpers, welche (§. 4) in einer successiven Ortsveränderung desselben besteht, ist es in den meisten Fällen hinreichend, nur einen seiner Puncte, wofür man gewöhnlich den Schwerpunct nimmt, zu betrachten, so, dafs wir auch zuerst nur von der Bewegung eines Punctes handeln werden.

§. **121. Bahn und Richtung.** Die Linie, welche ein Punct bei seiner Bewegung beschreibt, heifst sein Weg oder seine Bahn, und je nachdem diese gerad oder krumm ist, wird die Bewegung gerad- oder krummlinig genannt. Im erstern Falle bestimmt die gerade Linie, nach welcher die Bewegung Statt findet, zugleich die Richtung der Bewegung; bei der krummlinigen Bewegung ändert sich die Richtung jeden Augenblick, und man kann dabei nur von der Richtung reden, welche der bewegliche Punct (oder das Bewegliche) in irgend einem Puncte seiner Bahn hat; diese wird durch die Tangente bestimmt, welche man in diesem Puncte an die krumme Linie nach der Seite hin zieht, nach welcher die Bewegung Statt findet.

§. **122. Zeit.** Ein in Bewegung befindlicher Punct gelangt nur nach und nach von einem Puncte seiner Bahn zu einem folgenden, und in dieser Aufeinanderfolge von Begebenheiten liegt der Begriff von Zeit, ein Element, welches in der Statik durchaus nicht, wohl aber in der Dynamik besonders in Betracht kommt.

Da die Zeit eine gröſsere oder kleinere seyn kann, so ist sie meſs- und vergleichbar, und kann sowohl durch Zahlen als Linien dargestellt werden, wenn man eine gewisse Zeit zur Einheit nimmt. In der Regel legt man den mittlern Sonnentag, d. i. die auf das ganze Jahr gleich vertheilte, oder mittlere Dauer von einem Mittag (oder Durchgang der Sonne durch den Meridian) bis zum nächstfolgenden zum Grunde, wovon (so wie beim wahren Sonnentag und Sterntag) der 24ste Theil eine Stunde, davon der 60ste Theil eine Minute, von dieser der 60ste Theil eine Secunde u. s. w. genannt wird. In den folgenden Untersuchungen wird unter der Zeiteinheit immer stillschweigend die Secunde dieses mittlern Sonnentages verstanden. Im Allgemeinen dagegen versteht man unter Zeit eine Anzahl von Secunden, Minuten, Stunden u. s. w., und diese wird am einfachsten und genauesten durch die Uhren gemessen und bestimmt.

§. 123. Verschiedene Arten von Bewegungen. Legt das Bewegliche (oder der bewegliche Punct) in gleichen Zeiten, mögen diese auch noch so klein genommen werden, auch gleiche Wege zurück, so heiſst die Bewegung gleichförmig, im entgegengesetzten Falle wird sie ungleichförmig oder veränderlich genannt.

Sind zwar die in gleichen Zeitintervallen von bestimmter Gröſse zurückgelegten Wege gleich groſs, dagegen jene der einzelnen unendlich kleinen Zeiten, woraus man sich ein solches Zeitintervall bestehend denken kann, ungleich; so heiſst eine solche Bewegung (wie z. B. beim Hin- und Herschwingen eines Pendels) eine periodische, und man vereinfacht eine solche oft durch die Annahme einer mittlern gleichförmigen Bewegung, durch welche derselbe Weg in derselben Zeit zurückgelegt werden könnte.

§. 124, Momentan wirkende Kräfte erzeugen gleichförmige Bewegungen. Wirkt eine Kraft nur einen Augenblick auf ein Bewegliches, so muſs dasselbe, zu Folge des Beharrungsgesetzes (§. 2, 6) sowohl in gerader Linie, als auch mit gleichförmiger Bewegung ohne Ende fortgehen, weil dasselbe weder die erlangte Richtung noch die demselben mitgetheilte Bewegung selbstthätig ändern kann.

Wirkt zwar die Kraft durch eine längere Zeit auf das Bewegliche, hört aber dann zu wirken auf, so tritt von diesem Augenblicke an ebenfalls eine gleichförmige Bewegung ein.

§. 125. Geschwindigkeit. Die Vergleichung oder Beziehung des in einer bestimmten Zeit gleichförmig zurückgelegten Weges gibt einen Begriff von der Geschwindigkeit des Beweglichen; bestimmter dagegen versteht man unter Geschwindigkeit den in der Zeiteinheit gleichförmig zurückgelegten Weg.

Da nur bei der gleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit durchaus dieselbe bleibt, dagegen bei der veränderlichen Bewegung in jedem Augenblicke wechselt; so kann man bei dieser letztern nur (auf ähnliche Art wie bei der krummlinigen Bewegung von der Richtung) von der Geschwindigkeit reden, welche in einem bestimmten Augenblicke Statt findet, und diese wird durch jenen Weg bestimmt oder ausgedrückt, welchen das Bewegliche in der Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn es mit dieser Geschwindigkeit gleichförmig fortginge.

§. 126. Fortschreitende und drehende Bewegung eines Körpers. Bewegen sich alle Puncte eines Körpers nach parallelen Linien mit gleichen Geschwindigkeiten, so sagt man, er habe eine fortschreitende oder progressive Bewegung. Bewegen sich dagegen alle Puncte bis auf einen, welcher ruht, um diesen Punct in Kugelflächen, deren Halbmesser die Abstände dieser Puncte von dem ruhenden Puncte sind, so sagt man, der Körper habe eine drehende, rotirende oder rotatorische Bewegung um diesen Punct, welcher der Drehungspunct heifst. Beschreiben endlich die Puncte um eine ruhende gerade Linie Kreise, deren Ebenen auf dieser Geraden senkrecht stehen, und deren Halbmesser die Entfernungen dieser Puncte von der ruhenden Geraden sind; so hat der Körper eine drehende oder rotirende Bewegung um diese Gerade, welche die Umdrehungsachse oder blofs Achse genannt wird.

§. 127. Winkelgeschwindigkeit. Bewegt sich die gerade Linie AC (Fig. 111) um den Punct C (oder ein Körper um eine durch C auf AC senkrechte Achse) mit gleichförmiger Bewegung, so beschreibt ein Punct a dieser Geraden, welcher vom Drehpuncte um die Einheit absteht, einen Kreis vom Halbmesser $= 1$; dabei heifst der von diesem Puncte a in der Zeiteinheit beschriebene Bogen $ab = \alpha$ die Winkelgeschwindigkeit der sich um C drehenden Geraden AC.

Dreht sich diese Gerade AC in einer Minute n Mal um den Punct C, so durchläuft der Punct a die Kreisperipherie vom Halbmesser 1,

d. i. den Weg 2π ebenfalls in dieser Zeit n, also in einer Secunde $\frac{n}{60}$ Mal, folglich ist sein in einer Secunde zurückgelegter Weg, d. i. die Winkelgeschwindigkeit der Geraden AC sofort $v = \frac{2n\pi}{60} = \frac{n\pi}{30}$.

Für einen Punct M dieser Geraden, dessen Abstand vom Drehungspuncte $CM = r$ ist, hat man, da sich die Geschwindigkeiten wie die gleichzeitig zurückgelegten Wege verhalten, wenn V die Geschwindigkeit von M ist, $v : V = \frac{n\pi}{30} : \frac{2rn\pi}{60} = 1 : r$, oder $V = rv \ldots (1,$ und daraus auch $v = \frac{V}{r} \ldots (2.$

§. 128. Beschleunigende Kräfte erzeugen veränderliche Bewegungen. Unter einer beschleunigenden Kraft versteht man eine solche, welche ihre Wirkung auf das Bewegliche fortwährend, und zwar im Sinne oder in der Richtung der Bewegung wiederholt. (Wirkt eine solche Kraft der Bewegung entgegen, so heifst sie eine verzögernde Kraft.)

Ist nun eine solche Kraft veränderlich, so kann sie unmöglich eine andere Bewegung als eine veränderliche erzeugen; ist sie aber constant, d. h. wirkt sie, ohne dafs die Geschwindigkeit des Beweglichen darauf einen Einflufs hat, fortwährend mit gleicher Stärke oder Intensität, so mufs der von dem Beweglichen, im zweiten unendlich kleinen Zeittheilchen zurückgelegte Weg gröfser als jener im ersten Zeitelemente seyn, indem dieser aus dem Wege des ersten Zeittheilchens (nach dem Beharrungsgesetze), und noch aus jenem Zuwachse besteht, welcher durch die Einwirkung der Kraft auch während dieses zweiten Zeitelementes erzeugt wird. Eben so mufs der Weg in dem dritten Zeittheilchen wieder gröfser, als jener im zweiten seyn u. s. w. fort, so, dafs also auch in diesem Falle die Bewegung eine veränderliche, und zwar hier insbesondere eine beschleunigte ist.

Anstatt dafs hier die Wege immer gröfser werden, nehmen diese im Gegentheile immerfort ab, wenn die Kraft der Bewegung, welche wie immer entstanden seyn mag, entgegen, also verzögernd wirkt.

Von dem Augenblicke an, in welchem die veränderliche, oder im zweiten Falle, constante Kraft zu wirken aufhört, wird die Bewegung gleichförmig; denn in Folge des Beharrungsgesetzes mufs dann das Bewegliche, sich selbst überlassen, mit der Geschwindigkeit, die es im letzten Augenblicke noch durch die Einwirkung der Kraft erlangt hat, gleichförmig fortgehen.

Erstes Kapitel.

Von den Gesetzen der gleichförmigen und gleichförmig veränderten Bewegung und dem Maſse der Kräfte. Zerlegung und Zusammensetzung der Geschwindigkeiten.

§. 129. Gesetze für die gleichförmige Bewegung. Bezeichnet c die Geschwindigkeit, mit welcher das Bewegliche gleichförmig fortgeht, also (§. 125) den in jeder Secunde zurückgelegten Weg; so sind $2c$, $3c$ . . . tc die Wege, welche das Bewegliche in 2, 3 . . . t Secunden durchläuft, so, daſs, wenn man diesen Weg allgemein mit s bezeichnet, sofort

$$s = ct \ldots (1$$

die Gleichung für die gleichförmige Bewegung ist.

Da also der Weg gefunden wird, indem man die Geschwindigkeit, d. h. die Absolutzahl, welche anzeigt, wie oft die Linieneinheit in c, mit der Zeit, d. i. mit der unbenannten Zahl, welche angibt, wie oft die Zeiteinheit in t enthalten ist, multiplicirt; so kann man diesen auch geometrisch durch die Fläche eines Rechteckes AD (Fig. 112) darstellen, in welchem die Grundlinie $AB = t$ und Höhe $AC = c$, d. h. in welchem AC der in einer Secunde zurückgelegte Weg ist, und AB eben so viele Linieneinheiten als t Zeiteinheiten enthält. Die Fläche AD enthält nämlich dann eben so viele Flächeneinheiten, die sich auf die übrigens willkürlich gewählte Linieneinheit beziehen, als der Weg s Linieneinheiten enthält.

Bewegt sich z. B. ein Körper gleichförmig mit 2 Fuſs Geschwindigkeit, so ist der nach vier Secunden zurückgelegte Weg (Gleich. 1) $s = 2.4 = 8$ Fuſs. Trägt man eine beliebige Linienheit, welche 1 Fuſs bedeuten soll, 4 Mal von A bis B (Fig. 112) und 2 Mal von A bis C, construirt aus diesen beiden Linien das Rechteck AD, so enthält dieses 8 Quadratfuſs Fläche, so daſs die Absolutzahl 8 mit der vorigen für s gefundenen Zahl übereinstimmt.

§. 130. Aus der obigen Gleichung (1 folgt auch $c = \frac{s}{t} \ldots (2$ und $t = \frac{s}{c} \ldots (3$, d. h. die Geschwindigkeit ist der Quotient aus der Zeit in den Weg, die Zeit degegen die Verhältniſszahl aus der Geschwindigkeit in den Weg. Sind die Zeiten gleich, so verhalten sich die Geschwindigkeiten wie die zurückgelegten Wege u. s. w.

Beispiel 1. Ein Punct in der Peripherie eines Wasserrades bewegt sich mit 3 Fuſs Geschwindigkeit (per Secunde); welchen Weg beschreibt dieser Punct während $2\frac{1}{2}$ Minuten?

Hier ist $c = 3$ und $t = 2\frac{1}{2} \times 60 = 150$, folglich (Gl. 1)

$$s = 3 \times 150 = 450 \text{ Fuſs.}$$

Beispiel 2. Wie viele Umläufe muſs ein Mühlstein von 3 Fuſs Durchmesser in einer Minute machen, damit ein Punct in dessen äuſseren Peripherie eine Geschwindigkeit von 25 Fuſs erlange.

Der in einer Minute mit 25 Fuſs Geschwindigkeit zurückgelegte Weg beträgt $25 \times 60 = 1500$ Fuſs. Da nun die Peripherie von 3 Fuſs Durchmesser nahe 9·42 Fuſs beträgt, so ist die gesuchte Umlaufszahl

$$n = \frac{1500}{9{\cdot}42} = 159 \text{ sehr nahe.}$$

Beispiel 3. Welche Geschwindigkeit besitzt ein Punct in der Peripherie eines solchen Mühlsteins, welcher per Minute 200 Mal umläuft?

Hier ist der in einer Minute zurücklegte Weg $s = 200 \times 9{\cdot}42 = 1884$ Fuſs, folglich die gesuchte Geschwindigkeit (per Secunde) nach der Gl. (2

$$c = \frac{1884}{60}\ 31{\cdot}4 \text{ Fuſs.}$$

Auf dieselbe Weise findet man auch die mittlere Geschwindigkeit einer regelmäſsigen periodischen Bewegung, bei welcher die Geschwindigkeit (§. 123) innerhalb gewisser Gränzen veränderlich ist.

Beispiel 4. In welcher Zeit wird ein Rad von 4 Fuſs 8 Zoll Halbmesser 100 Umdrehungen vollenden, wenn dasselbe in jeder Minute 36 Umdrehungen macht?

Da der Umfang dieses Rades ($2 \times 4{\cdot}67 \times 3{\cdot}1416 =$) 29·33 Fuſs beträgt, so beschreibt ein Punct desselben in einer Minute den Weg von $36 \times 29{\cdot}33 = 1055{\cdot}88$ Fuſs, und es ist daher seine Geschwindigkeit

$$c = \frac{1055{\cdot}88}{60} = 17{\cdot}598 \text{ Fuſs.}$$

Der nach 100 Umdrehungen des Rades von diesem Puncte durchlaufene Weg ist aber $100 \times 29{\cdot}33 = 2933$ Fuſs, demnach ist endlich die hierzu nöthige Zeit nach Gleich. (3: $t = \frac{2933}{17{\cdot}598} = 166{\cdot}7$ Sec., oder das Rad wird zu 100 Umgängen die Zeit von 2 Minuten 46·7 Sec. brauchen.

Anmerkung. Da sich die Umdrehungszeiten wie die Anzahl der Umdrehungen verhalten, so kann diese Frage einfacher durch die Proportion

$$36 : 100 = 1 : x$$

aufgelöst werden, indem man daraus unmittelbar

$$x = \frac{100}{36} = 2{\cdot}78 \text{ M.} = 2 \text{ M}, 46{\cdot}8 \text{ S.},$$

wie zuvor findet.

§. 131. Maſs für momentan wirkende Kräfte.

Da uns die Natur der Kräfte gänzlich unbekannt ist, so können wir sie bloſs aus und nach ihren Wirkungen beurtheilen. Was nun die sogenannten momentan wirkenden Kräfte insbesondere anbelangt, so hält man eine solche für gröſser oder kleiner, je nachdem sie unter gleichen Umständen fähig ist, ein und demselben Körper eine gröſsere oder kleinere Geschwindigkeit mitzutheilen, und man nimmt sonach an, daſs diese Kräfte den Geschwindigkeiten proportional seyen, welche sie dem nämlichen Körper mittheilen können. Diese Annahme oder Hypothese kann, da sie nirgends widersprochen, sondern im Gegentheil durchaus bestätigt wird, als ein Grundsatz, und sonach diese in einem bestimmten Körper erzeugte Geschwindigkeit als Maſs der momentan wirkenden Kraft gelten, durch welche diese Geschwindigkeit erzeugt wurde.

Anmerkung. Dieser hier ausgesprochene Grundsatz bildet mit jenem, von dem Beharrungsvermögen (§. 2, 6) oder der Trägheit der Körper oder Materie die einzigen beiden Grundsätze oder Axiome der ganzen Mechanik.

§. 132. Gröſse der Bewegung. Erzeugen zwei Kräfte P und P' in verschiedenen Massen M und M' dieselbe Geschwindigkeit, so verhalten sich diese wie die Massen, oder es ist $P : P' = M : M'$; denn um der doppelten Masse dieselbe Geschwindigkeit wie der einfachen beizubringen, ist auch die doppelte Kraft nothwendig, indem $2M$ aus $M + M$ und $2P$ aus $P + P$ besteht, und sonach in jede Masse M wieder eine gleich groſse Kraft P einwirkt; dasselbe gilt allgemein von der Masse nM, in welche die $n$fache Kraft nP wirkt.

Erzeugen diese Kräfte aber in ein und derselben Masse ungleiche Geschwindigkeiten v und v', so verhalten sie sich zu Folge des im vorigen Paragraphe ausgesprochenen Satzes wir diese Geschwindigkeiten, oder es ist $P : P' = v : v'$. Es stehen daher die Kräfte im zusammengesetzten Verhältniſs der Massen und Geschwindigkeiten, oder es ist allgemein, wenn die Massen und Geschwindigkeiten ungleich sind:

$$P : P' = Mv : M'v' \quad . . . (1.$$

Setzt man $P' = 1$ für $M' = 1$ und $v' = 1$, so folgt aus dieser Relation $P = Mv$, d. h. wenn man jene momentan wirkende Kraft, welche in der Masse $= 1$ eine Geschwindigkeit $= 1$ erzeugt, zur Einheit nimmt; so wird jede andere Momentankraft durch das Product aus der Masse in die Geschwindigkeit ausgedrückt, welche sie in dieser Masse erzeugt.

Dieses Product Mv heiſst auch Gröſse der Bewegung.

§. 133. Gleichförmig veränderte Bewegung. Wirkt auf einen Körper eine constante Kraft (§. 128), und nimmt man die in ihm während eines beliebigen Zeittheilchens erzeugte Geschwindigkeit zur Einheit, oder setzt diese $= 1$, so erlangt der Körper während des zweiten eben so groſsen Zeittheilchens die Geschwindigkeit $= 2$ (weil jene $= 1$ vermöge dem Beharrungsvermögen aus dem ersten Zeittheilchen auf das zweite übertragen, und dann durch die gleich bleibende Einwirkung der Kraft während des zweiten Zeittheilchens neuerdings die Geschwindigkeit $= 1$ erzeugt wird, und zu der vorigen hinzukommt), in dem dritten Zeittheilchen die Geschwindigkeit $= 3$ u. s. w., so, daſs also die Geschwindigkeit genau so wie die Zeit zunimmt; eine solche Bewegung heiſst eine gleichförmig beschleunigte, während, wenn die constante Kraft der Bewegung entgegenwirkt, und sonach die Geschwindigkeit eben so abnimmt, wie die Zeit zunimmt, eine gleichförmig verzögerte Bewegung entsteht; beide diese Bewegungen sind in der gleichförmig veränderten Bewegung enthalten.

§. 134. Gesetze für die gleichförmig beschleunigte und verzögerte Bewegung. Ist die Geschwindigkeit des Körpers oder Punctes am Ende der ersten Secunde (jene Geschwindigkeit nämlich, mit welcher das Bewegliche gleichförmig fortgehen würde, wenn am Ende dieser ersten Secunde die beschleunigende Kraft zu wirken aufhörte) $= c$, also am Ende der 2ten, 3ten . . $t$ten Secunde $= 2c$, $3c$ . . tc; so hat man zuerst für die Endgeschwindigkeit nach t Secunden die Gleichung

$$v = ct \ldots (1.$$

Um auch eine Gleichung für den zurückgelegten Weg zu finden, so stelle die Gerade AB (Fig. 113) die Zeit t, und das in B auf AB errichtete Perpendikel BC die Endgeschwindigkeit v dar; zieht man die Gerade AC, so wird jedes Perpendikel, wie ad die der Zeit $Aa = t'$ entsprechende Endgeschwindigkeit v' vorstellen; denn es ist nach dem Satze der ähnlichen Dreiecke $ad : BC = Aa : AB$, d. i. $v' : v = t' : t$, es sind also, wie es nach der vorigen Gleichung 1) seyn soll, die Endgeschwindigkeiten den Zeiten proportional.

Denkt man sich nun die Zeit t oder Gerade AB in eine sehr groſse Anzahl gleicher Theile, wie ab, bc . . . getheilt, und in den Theilungspuncten die Perpendikel ad, be, cf . . ., so wie auch die parallelen dr, es . . . mit AB gezogen; so kann man sich vorstellen, daſs die Bewegung während eines jeden einzelnen dieser sehr kleinen Zeittheilchen ab, bc... gleichförmig bleibt, folglich die zurückgelegten

Wege (§. 129, Anmerk.) durch die entsprechenden Rechtecke ar, bs u. s. w., also der gesammte Weg durch die Summe aller dieser Rechtecke ausgedrückt werde. Je kleiner man diese einzelnen Zeitintervalle ab, bc . . . nimmt, desto mehr nähert sich diese Annahme der Wahrheit, und wenn man AB in unendlich viele gleiche Theile theilt, wodurch die einzelnen Zeitintervalle unendlich klein werden, so hat man sich dem Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung vollkommen genähert, und da in diesem Falle die Summe aller dieser unendlich schmalen Rechtecke die Fläche des Dreieckes ABC ausmacht, und diese durch $\frac{1}{2}AB \times BC$ ausgedrückt wird, so hat man auch für AB und BC die Werthe oder ihre Bedeutungen gesetzt, für den gesuchten Weg: $s = \frac{1}{2}tv$, oder wenn man für v aus der Gleich. 1) substituirt:

$$s = \tfrac{1}{2}ct^2 \ldots (2.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen zeigt, dafs, wenn das Bewegliche schon im Anfange der Bewegung die am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit v gehabt, und mit dieser gleichförmig fortgegangen wäre, der in derselben Zeit t zurückgelegte Weg $= vt$ doppelt so grofs ausgefallen wäre. Zugleich ist ersichtlich, dafs das Bewegliche denselben Weg in der nämlichen Zeit mit gleichförmiger Bewegung zurückgelegt, wenn es dabei die Geschwindigkeit $\frac{1}{2}v$, d. h. die mittlere zwischen der Anfangsgeschwindigkeit (= Null) und der Endgeschwindigkeit (= v) besitzt.

§. 135. Hat ein in Bewegung befindlicher Körper in dem Augenblicke als eine constante (d. i. gleichförmig verzögernde) Kraft seiner Bewegung entgegenwirkt, die Geschwindigkeit C, so wird nach Verlauf der Zeit t diese noch die Gröfse $v' = C - ct$ (nach der Gleich. 1) besitzen. Der während dieser Zeit zurückgelegte Weg dagegen ist (mit Rücksicht auf die Gleich. (2 des vorigen Paragraphs)

$$s = Ct - \tfrac{1}{2}ct^2.$$

Wirkt die constante Kraft nach derselben Richtung, nach welcher diese Geschwindigkeit C vorhanden ist, also beschleunigend, so gehen diese beiden Gleichungen in folgende über:

$$v' = C + ct \text{ und } s = Ct + \tfrac{1}{2}ct^2,$$

und es bezeichnet in allen diesen Formeln, c die Geschwindigkeit, welche die constante Kraft dem Beweglichen am Ende der Zeiteinheit, hier also nach der ersten Secunde mitgetheilt hat, oder was dasselbe ist, jene Geschwindigkeit, um welche der Körper in jeder Secunde beschleunigt wird.

§. 136. Mafs der constanten Kräfte. Da eine constante Kraft in einem Körper in einer bestimmten Zeit, z. B. in einer

Secunde, eine um so gröfsere Endgeschwindigkeit hervorbringt, je gröfser die Intensität der einzelnen Impulse der Kraft während dieser Zeit ist; so kann man auch die Gröfse oder Intensität der Kraft selbst dieser Endgeschwindigkeit proportional setzen, und eine beständige Kraft nach dieser Geschwindigkeit beurtheilen, also diese als Mafs für die constante Kraft nehmen.

§. 137. Mafs einer veränderlichen Kraft. Um die Gröfse einer veränderlichen Kraft, bei welcher also die Geschwindigkeitsänderung des Beweglichen in den einzelnen Zeiteinheiten nicht mehr constant ist, zu beurtheilen, sieht man diese in dem Augenblicke, in welchem sie gemessen werden soll, und zwar während eines unendlich kleinen Zeittheilchens als constant an, und vergleicht sie mit einer andern bekannten constanten Kraft, wobei diese beiden Kräfte den unendlich kleinen Geschwindigkeitsänderungen, welche sie in demselben Körper während dieses Zeitelementes hervorbringen können, proportional sind.

Von der Zusammensetzung und Zerlegung der Geschwindigkeiten.

§. 138. Wirken auf einen beweglichen Körper zwei oder mehrere gleichartige Kräfte nach verschiedenen Richtungen, so folgt er der Resultirenden aus diesen Kräften mit einer Geschwindigkeit, welche sich eben so aus den Seitengeschwindigkeiten, d. h. jenen, welche die einzelnen Kräfte jede für sich erzeugen würden, wie die Mittelkraft aus den Seitenkräften ableiten und bestimmen läfst.

Wird nämlich der bewegliche Punct M (Fig. 8) gleichzeitig von zwei momentan oder auch constant wirkenden Kräften P und Q nach den Richtungen MA und MB getrieben, wovon die erstere die Geschwindigkeit MA, und die letztere jene MB hervorbringt; so mufs, da (§. 131 und 136) die Kräfte den Geschwindigkeiten proportional sind, also die Linien MA und MB zugleich die beiden Seitenkräfte darstellen, eben so auch umgekehrt die daraus hervorgehende Resultirende MC, die aus den beiden Geschwindigkeiten MA und MB resultirende Mittelgeschwindigkeit vorstellen.

§. 139. Das Parallelogramm AB heifst im vorliegenden Falle, in welchem nämlich die Seiten MA und MB Geschwindigkeiten bezeichnen, Parallelogramm der Geschwindigkeiten, und

Alles das, was oben (Stat. Kapit. 1) von der Zerlegung und Zusammensetzung der **Kräfte** entwickelt wurde, gilt auch hier von der Zerlegung und Zusammensetzung der **Geschwindigkeiten**.

So ist z. B. für zwei Geschwindigkeiten $v = 3$ und $v' = 4$, welche (Fig. 114) einen rechten Winkel einschliefsen, die mittlere Geschwindigkeit $V = MC = 5$, wenn man $MA = 3$, $MB = 4$ abschneidet, und daraus das Rechteck AB construirt; dabei findet man den Winkel AMC oder m sehr nahe $= 37$ Grad. Durch Rechnung findet man

$$V = \sqrt{(v^2 + v^{2\prime})} = \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5,$$

und $tang\ m = \dfrac{V'}{V} = \dfrac{3}{4} = \cdot 75$, und damit aus der Logarithmentafel

$$m = 36^\circ\,52' \text{ sehr nahe.}$$

2. Um ferner die aus den beiden Geschwindigkeiten $v = 18\cdot 25$, und $v' = 12\cdot 45$ Fufs entspringende mittlere Geschwindigkeit V zu finden, wenn diese einen Winkel AMB (Fig. 115) von 112°, $44'$ einschliefsen, erhält man, wenn MA und MB unter diesen gegebenen Winkel gezogen, und den beiden Geschwindigkeiten proportional abgeschnitten werden, durch Ergänzung des Parallelogramms (oder auch analytisch nach der Auflösung eines Dreieckes aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel) $V = MC = 17\cdot 68$ Fufs und $W.m = 40^\circ\ 30'\ 44''$.

Anmerkung. Die Fälle, in welchen Geschwindigkeiten zerlegt oder zusammengesetzt werden müssen, um gewisse Erscheinungen richtig zu beurtheilen, kommen in der Anwendung oder im gewöhnlichen Leben sehr häufig vor.

Wird z. B. ein Rad CM (Fig. 116) wie bei einer Drehbank durch eine Stange MV, welche in einem Stifte oder Zapfen bei M eingehängt ist, in drehende Bewegung gesetzt, und hat die Stange in der gezeichneten Lage die Geschwindigkeit V, so erhält man die in diesem Augenblicke Statt findende Geschwindigkeit eines Punctes M in der Peripherie des Rades, indem man V in zwei Seitengeschwindigkeiten Ma und Mb zerlegt, wovon die erstere nach der Tangente des Kreises gerichtet, und die zweite darauf senkrecht ist, also nach dem Mittelpuncte C geht. Stellt nämlich Mc die gegebene Geschwindigkeit V vor, so ist Ma die gesuchte für die Kreisperipherie in diesem Augenblicke, während die zweite Mb verloren geht, oder eigentlich gar nicht erzeugt wird.

Springt Jemand aus einem, mit voller Geschwindigkeit gehenden Wagen, z. B. aus einem Eisenbahn-Waggon, so wird er von zwei Geschwindigkeiten, nämlich von der horizontalen des Wagens AB (Fig. 117) und der verticalen AC der Schwere getrieben, er erlangt daher eine mittlere Geschwindigkeit nach der schiefen Richtung AD, die ihn zu Boden stürzen und bedeutend beschädigen kann. (Streng genommen bildet, wie weiter unten gezeigt wird, AD eine krumme Linie, weil die beiden Geschwindigkeiten AB und AC von zwei ungleichartigen Kräften, einer momentan und einer constant wirkenden Kraft erzeugt werden.)

Springt der Mensch mit eigener Anstrengung seitwärts, und z. B. senkrecht auf die Richtung des Wagenlaufes AB (Fig. 117, a), nämlich gegen AE, so kommt er auf den Boden in einer Richtung und mit einer Geschwindigkeit an, welche durch die Diagonale AD der aus den drei Seitengeschwindigkeiten AB, AE und AC construirten Parallelopipedes dargestellt wird.

Wird eine Billardkugel gegen die elastische Bande BB' (Fig. 118) in der Richtung AM mit einer Geschwindigkeit gleich V gestofsen, so kann man diese in die zwei auf einander senkrechten Geschwindigkeiten $aM = v$ und $bM = v'$ zerlegen, wenn man die Linie $cM = V$ abschneidet und das Rechteck ab construirt; von diesen beiden Geschwindigkeiten geht die erstere nach dem Stofs unverändert gegen MB', während die letztere durch die Eigenschaft der elastischen Bande in die gerad entgegengesetzte von gleicher Gröfse, also in Mb verwandelt wird, welche mit der vorigen $Ma' = Ma$ die Resultirende Mc' gibt, die wegen Gleichheit der Dreiecke bMc' und bMc, der ursprünglichen Geschwindigkeit $Mc = V$ gleich ist, und wobei die Richtung MD mit der auf BB' senkrechten Geraden MC denselben Neigungswinkel DMC, wie die ursprüngliche Richtung AM bildet, so dafs Winkel $DMC =$ W. AMC (also auch $B'MD = BMA$) ist. Da die Bande niemals vollkommen elastisch, folglich die zurückgeworfene Geschwindigkeit immer etwas kleiner als Mb ist, so ist auch in der Wirklichkeit der Winkel bMD etwas (wenn auch sehr unbedeutend) gröfser als jener bMA.

Auf gleiche Weise liefsen sich noch viele Beispiele der Art über die Zerlegung der Geschwindigkeiten anführen.

Zweites Kapitel.

Vom freien und gehinderten Fall der Körper.

§. 140. Wirkung der Schwerkraft. Nach §. 34 fallen alle frei oder sich selbst überlassenen Körper, und zwar in Folge der Anziehung der Erdmasse, nach lothrechter Richtung gegen den Mittelpunct der Erde zu. Genaue Versuche haben überdiefs noch gelehrt, dafs alle Körper ohne Rücksicht auf ihre Natur und Beschaffenheit an demselben Orte und im absolut leeren Raume gleich schnell fallen, so, dafs also die Ursache, aus welcher z. B. eine Flaumfeder in der Luft langsamer als ein Stückchen Blei herabfällt, lediglich in dem Widerstande der Luft liegt, welchen das dichtere Blei leichter als die Feder überwinden kann.

§. 141. Die Schwerkraft erscheint uns als eine constant wirkende, beschleunigende

Kraft. Obschon die Schwerkraft in derselben Verticallinie nach aufwärts im quadratischen Verhältnifs der Höhe (vom Mittelpunct der Erde an gezählt) abnimmt, so sind selbst die höchsten Berge gegen den Erdhalbmesser noch so unbedeutend, dafs man diese Abnahme ohne Fehler selbst bis auf diese Höhe vernachläfsigen kann. Wirkt aber sonach die Schwere als eine constante Kraft, so nehmen die Körper beim Fallen (§. 133) eine gleichförmig beschleunigte Bewegung an, und alle die in §. 134 für diese Bewegung entwickelten Gesetze finden sofort auch hier ihre Anwendung, wenn man nämlich dabei von dem Widerstande des Mittels, oder der Luft, in welchem der Körper fällt, und der nur in seltenen Fällen zu berücksichtigen kommt, abstrahirt.

§. 142. Formeln für den freien Fall der Körper. Alle bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung vorkommenden Gröfsen oder Relationen sind bestimmt, sobald entweder der Weg oder die Endgeschwindigkeit der ersten Secunde bekannt ist. Bezeichnet man, wie es früher und gröfstentheils auch noch jetzt in Deutschland üblich, diesen Weg der ersten Secunde beim freien Fall der Körper mit g, so ist die Endgeschwindigkeit (§. 134, Gl. 1 und 2) nach dieser Zeit gleich $2g$. Bezeichnet man dagegen mit den französischen Physikern (denen nun auch sehr viele deutsche folgen) diese Endgeschwindigkeit mit g, so ist der in der ersten Secunde zurückgelegte Weg gleich $\frac{1}{2}g$. Da wir uns nun dieser letztern, immer allgemeiner werdenden Bezeichnung anschliefsen, so haben wir durchaus unter g für Wien den Werth von 31 Wiener Fufs zu verstehen (genauer ist für die Breite von Wien im luftleeren Raume und auf das Niveau des Meeres reducirt, $g = 31{\cdot}03018$ F.), und da diese Gröfse zugleich (§. 136) das Mafs der beschleunigenden Kraft der Schwere ist, so bezeichnet sie für die Breite von Wien auch die Intensität der Schwerkraft.

Führt man diese Gröfse g in den beiden Grundformeln (1 und (2 des §. 134 anstatt c ein, so erhält man für die Endgeschwindigkeit v und den Fallraum h nach Verlauf von t Secunden:

$$v = gt \ldots (1 \quad \text{und} \quad h = \tfrac{1}{2}gt^2 \ldots (2,$$

und daraus durch Verbindung, aufser mehreren andern, noch die beiden für die Folge wichtigen Formeln:

$$v = \sqrt{(2gh)} = 7{\cdot}874\sqrt{h} \ldots (3 \quad \text{und} \quad h = \frac{v^2}{2g} = {\cdot}01613\,v^2 \ldots (4.$$

Setzt man in der Formel (2 $t = 1, 2, 3\ldots$ und Kürze halber den Weg der ersten Secunde $\frac{1}{2}g = 1$, so wird $h = 1, 4, 9, 16\ldots$, d. h. die nach Verlauf von $1, 2, 3\ldots$ Secunden zurückgelegten Wege verhalten sich wie die Quadrate der natülichen Zahlen. Zieht man dagegen in dieser Reihe die Glieder von einander ab, so erhält man für die in den einzelnen Secunden zurückgelegten Wege die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7 . . .

Beispiele und Aufgaben.

1. Fällt ein Körper durch die Zeit von fünf Secunden, so erlangt er die Geschwindigkeit von $v = 155$ Fufs und fällt durch eine Höhe von $h = 387\cdot5$ Fufs. Wäre er mit der mittlern Geschwindigkeit $\frac{0 + 155}{2} = 77\frac{1}{2}$ Fufs gleichförmig durch diese fünf Secunden gefallen, so würde er ebenfalls $77\frac{1}{2} \times 5 = 387\frac{1}{2}$ Fufs, also denselben Weg zurückgelegt haben.
2. Welche Geschwindigkeit erlangt ein von der Höhe von 50 Klafter frei herabfallender Körper?

   Nach der Formel (3 erhält man wegen $h = 6 \times 50 = 300$ Fufs:
   $$v = 7\cdot874 \sqrt{300} = 7\cdot874 \times 17\cdot32 = 136\cdot4 \text{ Fufs.}$$
3. Durch welche Höhe mufs ein Körper fallen, damit er eine Geschwindigkeit von 100 Fufs erlangt?

   Setzt man in der Formel (4 $v = 100$, so erhält man für die gesuchte Höhe
   $$h = 161\cdot3 \text{ Fufs.}$$
4. In welcher Zeit wird ein Körper von der Spitze des St. Stephansthurmes herabfallen, wenn dessen Höhe zu 72 Klafter gerechnet wird?

   Hier ist $h = 6 \times 72 = 432$ Fufs und damit folgt aus der Formel (2:
   $$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{864}{31}} = 5\cdot28 \text{ Secunden.}$$

§. 143. Vertical aufwärts geworfene Körper. Die Formeln des vorigen Paragraphes gelten auch für Körper, welche mit einer gewissen Geschwindigkeit vertical aufwärts geworfen werden, wenn man sich bei ihrer Anwendung nur erinnert, dafs jetzt die Schwere (§. 135) als eine gleichförmig verzögernde Kraft wirkt und dem Körper nun genau so viel an Geschwindigkeit benimmt, als sie im vorigen Fall erzeugt. Einige Beispiele werden die Sache erläutern.

Beispiele und Aufgaben.

1. Wie hoch kann ein Körper, welcher mit einer Geschwindigkeit von 62 Fufs vertical aufwärts geworfen wird, steigen?

   Der Körper steigt so lange, bis durch den Einflufs der Schwerkraft seine ganze Geschwindigkeit vernichtet oder auf Null gebracht ist, folglich während zwei Secunden; weil ein von der Ruhe aus fallender Körper nach Verlauf von zwei Secunden (Formel 1) ebenfalls 62 Fufs Geschwindigkeit erlangt. (Nach §. 135 ist $v' = C - ct$ oder hier $0 = 62 - gt$, woraus ebenfalls $t = 2$ folgt.) Während zwei Secunden fällt aber ein Körper durch die Höhe $h = 15\cdot5 \times 4 = 62$ Fufs, folglich ist diefs auch zugleich die Höhe, welche der Körper erreicht. Kürzer folgt dieses Ergebnifs aus der Formel (4 des vorigen Paragraphes, indem der Körper mit der

Anfangsgeschwindigkeit von 62 Fufs genau so hoch steigen mufs, um diese Geschwindigkeit zu verlieren, als er fallen müfste, um dieselbe zu gewinnen; es ist also nach dieser Formel

$$h = \frac{62 \times 62}{62} = 62 \text{ Fufs, wie zuvor.}$$

Anmerkung. Der steigende Körper legt in diesem Beispiele in der ersten Secunde den Weg von $62 - 15\frac{1}{2} = 46\frac{1}{2} = 3 \times 15\frac{1}{2}$, und in der zweiten Secunde jenen $62 - 46\frac{1}{2} = 1 \times 15\frac{1}{2}$, dagegen beim Fallen gerade umgekehrt in der ersten und zweiten Secunde die Wege $1 \times 15\frac{1}{2}$ und $3 \times 15\frac{1}{2}$ Fufs zurück.

2. Welche Höhe hat ein mit 100 Fufs Geschwindigkeit vertical aufwärts steigender Körper nach drei Secunden erreicht?

Ohne Einwirkung der Schwere wäre der in drei Secunden zurückgelegte Weg = 300 Fufs, da aber die Schwerkraft während drei Secunden einen Weg von $15·5 \times 9 = 139·5$ Fufs aufhebt (weil sie im umgekehrten Fall eben so viel erzeugt), so bleiben noch $300 - 139·5 = 160·5$ Fufs für die gesuchte Höhe. (Diese Auflösung ist auch durch die in §. 135 für s aufgestellte Gleichung gegeben.)

Nach vier Secunden hat er eben so die Höhe von $4 \times 100 - 15·5 \times 16 = 152$ Fufs über den Anfangspunct der aufsteigenden Bewegung (da die gröfste Höhe, welche er erreichen kann, $= \frac{10000}{62} = 161·29$ Fufs ist, wozu er $\frac{100}{31} = 3·226$ Secunden braucht, so ist er am Ende der vierten Secunde schon wieder um $161·29 - 152 = 9·29$ Fufs gefallen, nach der fünften Secunde von $500 - 15·5 \times 25 = 112·5$, nach der sechsten Secunde von $600 - 15·5 \times 36 = 42$, nach der siebenten Secunde von $700 - 15·5 \times 49 = -59·5$ Fufs, d. h. da er zum Steigen und Fallen zusammen die Zeit von $2 \times 3·226 = 6·45$ Secunden braucht, so befindet er sich nach der siebenten Secunde schon um $59\frac{1}{2}$ Fufs unter dem Horizont, oder allgemeiner, unter jenem Puncte, von wo aus sein Aufsteigen begann.

3. Nach welcher Zeit wird der Körper im vorigen Beispiele wieder unten angelangt seyn?

Da er zum Steigen dieselbe Zeit wie zum Fallen braucht, so darf man nur die Fallzeit aus der Formel (1 des vorigen Paragraphes für die Endgeschwindigkeit von 100 Fufs bestimmen, so hat man dafür $t' = \frac{100}{31} = 3·226$, mithin für die gesuchte Zeit das Doppelte, d. i. 6·452, oder nahe genug $6\frac{1}{2}$ Secunden.

4. Von zwei Puncten A und B (Fig. 119), welche in einer Verticallinie um 100 Fufs von einander entfernt liegen, steigt von A aus ein Körper mit 50 Fufs Geschwindigkeit, und in demselben Augenblick fällt ein anderer Körper von B frei herab; in welchem Puncte C dieser Geraden AB werden sich diese beiden Körper begegnen?

Tritt das Begegnen nach t Secunden ein, so ist $BC = \frac{1}{2} g t^2$ und AC

$= 50t - \frac{1}{2}gt^2$, folglich wegen $BC + AC = 100$, sofort $100 = 50t$ oder $t = 2$ Secunden, und mit diesem Werthe ist $BC = 62$ und $AC = 38$ Fuſs, wodurch der Begegnungspunct C bestimmt ist.

§. 144. Schief geworfene Körper. Wird ein Körper mit der Geschwindigkeit v in der Richtung AT (Fig. 120) aufwärts geworfen, so würde er ohne Einwirkung der Schwere in der Zeit t den Weg $AM = vt$ mit gleichförmiger Bewegung zurücklegen. Durch die Schwerkraft wird er aber in derselben Zeit um den Weg $Mm = \frac{1}{2}gt^2$ herabgebracht, so, daſs er sich am Ende dieser Zeit im Puncte m befindet. Eben so wird er sich nach t' Secunden nicht im Puncte M', wofür $AM' = vt'$ ist, sondern vertical unter diesem im Puncte m' befinden, wofür $M'm' = \frac{1}{2}gt'^2$ ist u. s. w. Trägt man also auf AT eine beliebig kleine Gröſse AN mehrere Male auf, so, daſs $AN = NM = MM' \ldots$ wird und läſst AN die Geschwindigkeit v, folglich AN, $AM \ldots$ die Wege bedeuten, welche mit gleichförmiger Bewegung nach 1, 2, 3... Secunden zurückgelegt würden, zieht durch die Puncte N, M, $M' \ldots$ die lothrechten Linien und trägt darauf nach abwärts die berechneten Werthe von 15·5, 4 × 15·5, 9 × 15·5... nach einem verjüngten (am besten tausendtheiligen) Maſsstab auf, nach welchem $AN = v$ Fuſs genommen wurde; so erhält man die Puncte n, m, $m' \ldots$ die mit einander vereinigt die Wurflinie geben, welche (in der steten Voraussetzung, daſs der Widerstand der Luft vernachläſsigt werden darf) eine gewöhnliche Parabel ist, wobei $CF = h$ die gröſste Höhe, welche der Körper erreichen kann, und $AB = b$ die Wurfweite darstellt.

Anmerkung. Setzt man den Winkel $BAT = \alpha$, so findet man nach geometrischen Gründen $h = \frac{(v \operatorname{Sin} \alpha)^2}{2g}$ und $b = \frac{v^2 \operatorname{Sin} 2\alpha}{g}$, woraus sofort folgt, daſs die gröſste Wurfweite bei demselben Werth von v, für $\alpha = 45^\circ$, wofür $h = \frac{v^2}{4g}$ ist, erreicht wird. Die Zeit, die der Körper braucht, um von A durch den Bogen AFB nach B zu kommen, ist

$$t = \frac{2v \operatorname{Sin} \alpha}{g}.$$

Für $\alpha = 90^\circ$ entstehen die Fälle des vorigen Paragraphes, weil der Körper dann vertical aufwärts steigt; es ist dafür $h = \frac{v^2}{2g}$, $b = 0$ und $t = \frac{2v}{g}$, wie es seyn soll.

Fällt endlich die Richtung des Wurfes in den Horizont AM (Fig. 121), so ist für $AM = x$ und $Mm = h$, sofort $h = \frac{g}{2v^2}x^2$; ist $x = v$, so ist $h = \frac{1}{2}g$, für $x = 2v$ ist $h = 4 \cdot \frac{1}{2}g$, für $x = 3v$ ist $h = 9 \cdot \frac{1}{2}g$ u. s. w., wodurch sich die Puncte m, m'.., der Parabel $A\,m\,s$ bestimmen.

§. 145. Bewegung zweier ungleicher Massen oder Gewichte über eine Rolle (Bewegung durch Überwucht). Hängen an den Endpuncten A und B eines über eine feste Rolle C (Fig. 122) gelegten Fadens zwei gleiche Massen oder Gewichte m, so halten sich diese das Gleichgewicht, weil die Anziehung der Erde auf beide gleich stark wirkt. Legt man aber auf der einen Seite A noch eine Masse m' hinzu, so wird durch die darauf wirkende Schwerkraft das Gleichgewicht gestört und der Punct A mit gleichförmig beschleunigter Bewegung herab-, also der Punct B eben so hinaufgezogen. Das in A angebrachte Gewicht $m + m'$ kann jedoch nicht jene Geschwindigkeit, wie beim freien Fall annehmen, indem sich das Gewicht m' als beschleunigende Kraft auf die ganze Masse $m+m+m' = M + m$ (wenn man Kürze halber $m + m' = M$ setzt) vertheilt. Wirkt aber eine constante Kraft in ungleiche Massen, so sind die in gleichen Zeiten, also auch in der Zeiteinheit erzeugten Geschwindigkeiten den Massen umgekehrt proportional, indem dieselbe Kraft in der doppelten Masse nur die halbe Geschwindigkeit erzeugen kann, u. s. w. Ist also g die Beschleunigung der Schwerkraft (d. h. die Endgeschwindigkeit der ersten Secunde, wenn die constante Kraft m' in die Masse m' wirkt) und G die Beschleunigung der Massen $M + m$ (d. h. die Endgeschwindigkeit der ersten Secunde, wenn die Kraft m' in die Masse $M + m$ wirkt); so ist

$$g : G = M + m : m' \quad \text{oder} \quad G = \frac{m'}{M+m}g = \frac{M-m}{M+m}g \ldots (1.$$

Mit diesem Werthe von G lassen sich nun alle hieher gehörigen Fragen durch Anwendung der für den freien Fall (§. 142) geltenden Formeln beantworten, wenn man in diesen Formeln durchaus G statt g schreibt.

Beispiel. Ist z. B. $M = 187$ und $m = 185$ (gleichgiltig ob Pfunde, Lothe u. s. w.), so ist $G = \frac{1}{186} \times 31 = \frac{1}{6}$ Fuſs $= 2$ Zoll, also der Fallraum der ersten Secunde $\frac{1}{2}G = 1$ Zoll.

Nach fünf Secunden z. B. wäre die erlangte Geschwindigkeit $v = Gt = 2 \times 5 = 10$ Zoll und der zurückgelegte Weg $h = \frac{1}{2}Gt^2 = 25$ Zoll.

Anmerkung. Auf diesem Princip beruht die von Atwood angegebene Fallmaschine, mittelst welcher man alle Gesetze des freien Falles oder eigentlich der gleichförmig beschleunigten Bewegung sehr bequem beobachten kann, was bei wirklich frei fallenden Körpern deſshalb nicht möglich ist, weil der Fallraum der ersten Secunde schon $15\frac{1}{2}$ Fufs beträgt, also für eine Beobachtungszeit von selbst nur einigen Secunden schon sehr bedeutende Höhen zu Gebote stehen müfsten.

§. 146. Allgemeiner Ausdruck für die Beschleunigung der Massen. Bei dem freien Falle erlangen verschiedene Massen immer dieselbe Geschwindigkeit, weil in die grössere Masse auch in demselben Verhältnifs die gröfsere Kraft wirkt, folglich auf einen gleich grofsen Theil der Masse immer auch eine gleiche Kraft kommt. Wirken aber constante Kräfte untern andern Umständen auf ungleiche Massen, so werden die am Ende der Zeiteinheit erlangten Geschwindigkeiten oder die Beschleunigungen (§§. 136 und 145) den Kräften direct oder gerade, und den Massen umgekehrt proportional. Wirken nämlich zwei constante Kräfte F, F' in zwei ungleiche Massen M, M' und bringen sie in diesen in einerlei Zeit gleiche Geschwindigkeiten hervor, so ist $F : F' = M : M'$. Wirken diese Kräfte auf gleiche Massen und erzeugen sie in diesen ungleiche Geschwindigkeiten v und v', so ist $F : F' = v : v'$, folglich ist, wenn die Massen und Geschwindigkeiten ungleich sind, $F : F' = Mv : M'v' \ldots (\alpha$ oder auch

$$v : v' = \frac{F}{M} : \frac{F'}{M'} \ldots (1,$$

wodurch der vorhin ausgesprochene Satz bestätiget wird.

Da für den freien Fall (wenn F' die Schwerkraft und M' die fallende Masse bezeichnet) $\frac{F'}{M'} = 1$ ist, und wenn man v und v' für die Endgeschwindigkeiten der ersten Secunde nimmt, diese Gröfsen also mit G und g vertauscht, diese Proportion (1 in folgende $G : g = \frac{F}{M} : 1$ übergeht, so folgt daraus $G = \frac{F}{M} g \ldots (2$, durch welche Formel sofort die Beschleunigung der Masse M, in welche die in Gewichtstheilen ausgedrückte constante Kraft F wirkt, bestimmt ist.

Anmerkung 1. Wirkt die constante Kraft F in die Masse M und stellt man sich vor, dafs von dieser Kraft auf die Einheit der Masse der Antheil f kommt, so ist (da die Geschwindigkeiten gleich sind)

$$F : f = M : 1 \quad \text{oder} \quad F = Mf \ldots (n.$$

Französische Schriftsteller nennen dabei f die beschleunigende und F oder Mf die bewegende Kraft. So wäre bei dem freien Falle der Körper $f = g$ die beschleunigende und Mg die bewegende Kraft der fallenden Masse M (und zugleich auch §. 35, Anmerkung, das Gewicht derselben).

Ist nun M eine Masse, in welche eine constante oder beschleunigende Kraft wirkt, die dem Gewichte einer Masse P gleich ist, und G die in der Masse M erzeugte Beschleunigung (Endgeschwindigkeit der ersten Secunde oder Geschwindigkeitszunahme in jeder Secunde); ist ferner M eine andere eben so grofse Masse, die man frei fallen läfst, wodurch ihre Beschleunigung gleich g wird; so hat man, da die bewegenden Kräfte beziehungsweise Pf und Mf sind, wenn man nämlich, um sich von jeder Masseneinheit unabhängig zu machen, das Gewicht der Masseneinheit mit f bezeichnet, wegen Gleichheit der Massen, sofort $Pf : Mf = G : g$, woraus wieder, wie vorhin, $G = \frac{P}{M} g$ folgt, und wobei das Gewicht der Masse M gar nicht in Betracht kommt. Auch ist hier, der Gleichartigkeit der Formel wegen, P ebenfalls als eine Masse dargestellt; da aber diese (§. 35) durch dieselbe Zahl wie ihr Gewicht ausgedrückt wird, so gibt P zugleich den Zahlenwerth der bewegenden Kraft an und kann als die Kraft selbst angesehen werden.

Anmerk. 2. Drückt man mit den französischen Schriftstellern das Gewicht P einer Masse M durch $P = Mg$, also das Gewicht der Masseneinheit durch g aus, so bleibt zwar die obige Formel für G, wie die Ableitung zeigt, die nämliche, allein, wenn nach unserer Bezeichnungsart für die Masseneinheit $M = 1$ und Kräfteneinheit $P = 1$, die Beschleunigung $G = g$ wird, so wird nach der Annahme und Bezeichnungsart der erstern, für die Krafteinheit $P = 1$ und Masseneinheit $M = g$ die Beschleunigung derselben $G = 1$.

Auch wird dabei die auf die Masseneinheit (gleich g) wirkende beschleunigende Kraft durch $P = G$ und daher die auf die Masse M kommende Kraft durch MG ausgedrückt; aus diesem Grunde nennen die französischen Schriftsteller G oder auch g die beschleunigende und MG oder Mg die bewegende Kraft.

Fall oder Bewegung auf der schiefen Ebene.

§. 147. Liegt ein Körper O (Fig. 123), dessen Gewicht P seyn mag, auf einer schiefen Ebene AB, so treibt ihn die Kraft P nach lothrechter Richtung und würde in ihm die Beschleunigung g erzeugen. Zerlegt man P in zwei auf einander senkrechte Kräfte p und q, parallel und senkrecht zu AB, so ist die erstere (§. 109, Gleichung 1)

$$p = \frac{BC}{AB} P = \frac{h}{l} P \ldots (1,$$

wenn man $BC = h$ und $AB = l$ setzt, von derselben Natur wie die Kraft P, also ebenfalls constant, welche sofort in der Masse des Körpers eine gleichförmig beschleunigte Bewegung erzeugt, während die letztere oder drückende Kraft (§. 109, Gleichung 2)

$$q = \frac{AC}{AB} P = \frac{b}{l} P \ldots (2$$

von der Festigkeit der Ebene aufgehoben wird.

Ist $Oc = g$ die Beschleunigung der Schwere beim freien Fall, so ist Oa die Beschleunigung G auf der schiefen Ebene, folglich

$$G = \frac{h}{l} g \ldots (3$$

(dasselbe folgt auch aus der Gleichung 2 des vorigen Paragraphes, wo $P = Oa = \frac{h}{l} P$ und $M = P$ zu setzen ist).

Ist α der Neigungswinkel BAC der schiefen Ebene, so ist $\frac{h}{l} = Sin\, \alpha$, folglich auch $G = g\, Sin\, \alpha \ldots (3'$.

§. 148. Endgeschwindigkeit auf der schiefen Ebene. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit, welche ein Körper beim Herabgleiten über die schiefe Ebene $BA = l$ im Puncte A erlangt, hat man (§. 142, Gl. 3)

$$v = \sqrt{(2\, G\, l)} = \sqrt{\left(2 \frac{h}{l} g\, l\right)} = \sqrt{(2\, g\, h)}$$

(wenn man nämlich für G den Werth aus (3 des vorigen Paragraphes setzt).

Diese Geschwindigkeit ist also gerade so grofs, als wenn der Körper von der Höhe $BC = h$ der schiefen Ebene frei herabgefallen wäre. Da diese Endgeschwindigkeit von der Neigung der schiefen Ebene unabhängig ist, so ist sie für alle die schiefen Ebenen AB, $A'B \ldots$ (Fig. 124) von derselben Höhe BC die nämliche.

So wie ein mit der Geschwindigkeit v vertical aufwärts geworfener Körper jene Höhe erreicht, durch welche er fallen mufs, um diese Geschwindigkeit v zu erlangen, so wird auch eine über die schiefe Ebene mit der in A durch das Herabgleiten über BA erlangte Geschwindigkeit aufwärts geworfener Körper genau wieder bis zu dem Puncte B gelangen und dort seine ganze Geschwindigkeit verloren haben.

Soll auch noch die Zeit gefunden werden, welche der Körper braucht, um über die schiefe Ebene $BA = l$ herabzugleiten, so ist (aus §. 142, Gl. 2) $l = \frac{1}{2} G t^2 = \frac{1}{2} g \frac{h}{l} t^2$, und daraus $t = \sqrt{\left(\frac{2\, l^2}{g\, h}\right)} \ldots (4.$

Zieht man in einem, in einer verticalen Ebene liegenden Kreis C (Fig. 125) vom Halbmesser r aufser dem lothrechten Durchmesser BD noch durch den Punct B eine beliebige Sehne BA, so kann diese als eine schiefe Ebene angesehen werden, wofür nach der vorigen Formel (4 $t = \sqrt{\left(2 \frac{AB^2}{g.BE}\right)}$ oder, da nach einem Satze der Geometrie $AB^2 = BE.BD = 2\, r\, BE$ ist, auch $t = \sqrt{\left(\frac{4\, r.BE}{g.BE}\right)} = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$ wird.

Da nun dieser Ausdruck von der Länge l der schiefen Ebene oder der Sehne BA unabhängig ist, so bleibt er für alle Sehnen desselben Kreises, wie z. B. BA', BD u. s. w., derselbe, folglich fällt ein Körper über alle diese Sehnen in der nämlichen Zeit, wie durch den lothrechten Durchmesser dieses Kreises herab.

§. 149. Fall über eine krumme Linie *(eigentlich krumme Fläche).* Liegt die Curve AB (Fig. 126) in einer verticalen Ebene ABC und theilt man diese in den Puncten a, b, c... in sehr viele kleine Theile, so zwar, dafs man die Curvenelemente Ba, ab... als gerade Linien ansehen kann, so erlangt ein über die Curve BA (als Durchschnitt einer krummen Fläche mit der verticalen Ebene ABC), also über eine ununterbrochene Reihe von schiefen Ebenen Ba, ab... herabgleitender Körper in den Puncten a, b... A jene Geschwindigkeit, welche er durch den freien Fall von B durch BC in den Puncten a', b'... C erlangt hätte.

Anmerkung. Hiebei wird vorausgesetzt, dafs der Körper beim Übergang von einer schiefen Ebene zur nächst folgenden von der erlangten Geschwindigkeit nichts verliere, was bei einer Curve in der That auch der Fall ist. Denn hat ein Körper im Puncte B (Fig. 127), wo er von der Ebene AB auf jene BC übergeht, die Geschwindigkeit Bc erlangt, und wird diese in die zwei Geschwindigkeiten Bb und Ba, senkrecht auf BC und parallel mit BC, zerlegt; so geht die erstere verloren und der Körper beginnt seinen Lauf auf der Ebene BC mit der Geschwindigkeit Ba. Wird nun, wie es bei den auf einander folgenden Elementen einer continuirlichen Curve der Fall ist, der Winkel $ABD = Bcb$ unendlich klein, so wird auch Bb, d. i. der Verlust an Geschwindigkeit, unendlich klein oder gleich Null.

Einfaches und zusammengesetztes Pendel.

§. 150. Erklärung. Im Allgemeinen versteht man unter einem Pendel jeden festen Körper, welcher vermöge seiner Schwere um einen festen Punct oder eigentlich um eine horizontale Achse schwingt.

Nimmt man zur Vereinfachung der Untersuchung eine in einer verticalen Ebene liegende gerade Linie CA (Fig. 128), welche sich um den Endpunct C drehen kann und mit derem anderen Endpunct A ein schwerer Punct verbunden ist, oder auch einen gewichtlosen Faden AC, welcher in C befestiget ist und in A einen schweren materiellen Punct trägt; so nennt man ein solches Pendel ein einfaches oder auch mathematisches Pendel, während alle wirklich bestehenden zusammengesetzte oder physiche Pendel heifsen. Man nähert sich dem

Begriffe des mathematischen Pendels, wenn man an einen sehr feinen Faden ein kleines Blei- oder besser noch Platinkügelchen befestiget und dieses um den Aufhängpunct C des Fadens schwingen läfst.

Wird das Pendel aus seiner verticalen Lage CA, in der es allein nur ruhen kann (§. 64, Anmerk.) in die Lage CA' gebracht und frei gelassen, so wird es durch die Schwere getrieben und durch den Faden geführt, den Kreisbogen $A'A$ herab und auf der andern Seite, durch die in A erlangte Geschwindigkeit (§. 148, Anmerk.) in einen gleichen Bogen, wieder eben so hoch, nämlich bis A'' hinaufgehen; hier angekommen geht es wieder durch den Bogen $A''A$ herab und über jenen AA' hinauf u. s. w., so, dafs es also ohne das Vorhandenseyn von Nebenhindernissen, diese Schwingungen oder Oscillationen durch die Bögen $A'A''$ oder $A''A'$ (auch Pendelschläge genannt) ohne Ende wiederholen oder fortsetzten müfste. Die Zeit, welche das Pendel zur Vollendung einer Schwingung $A'A''$ oder $A''A'$ braucht, heifst die Schwingungszeit, der Winkel $ACA' = ACA''$ Elongationswinkel und der in Gradmafs ausgedrückte Bogen $A'AA''$ die Schwingungsweite oder Amplitude.

Anmerkung. Weil der Bogen $A'AA''$ ein Kreisbogen ist, so nennt man ein solches Pendel öfter auch ein Kreispendel.

§. 151. Schwingungszeit des einfachen Pendels. Nimmt man in dem Kreise O (Fig. 129) vom Halbmesser r den Pfeil (oder Sinusversus) AB und beschreibt darüber als Durchmesser einen Kreis, nimmt ferner im erstern Kreis einen kleinen Bogen ab, halbirt diesen in c und fällt auf AC die Perpendikel af, cg und bh, zieht bd parallel mit AC; so ist nach geometrischen Gründen, wenn man Bogen $ab = a$, jenen zwischen den beiden Parallelen af, bh liegenden Bogen $a'b' = a'$, $AB = b$ und $Bg = h$, und noch voraussetzt, dafs der Pfeil b gegen den Durchmesser $2r$ sehr klein und der Bogen ab unendlich klein ist, sofort $\frac{a^2}{a'^2} = \frac{2rh}{b^2} \ldots (m\,*)$.

*) Es folgt nämlich aus den ähnlichen Dreiecken Cgc und abd:

$$ab : bd = Cc : gc \text{ oder } ab = \frac{r.bd}{gc};$$

eben so ist auch $a'b' = \frac{r'.bd}{gc'}$, wobei $r' = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}b$ ist. Man hat daher $\frac{ab}{a'b'}$, d. i. $\frac{a}{a'} = \frac{r.gc'}{\frac{1}{2}b.gc}$ oder $\frac{a^2}{a'^2} = \frac{4r^2}{b^2} \cdot \frac{gc'^2}{gc^2}$ oder da $gc^2 = Dg.Ag = 2r.Ag$ (wenn man nämlich unter der gemachten

Diefs vorausgesetzt, sey bei der Pendelschwingung der schwere Punct von A' bis zu irgend einem Punct c gekommen und habe hier die Geschwindigkeit v erlangt, so entspricht diese (§. 149) der Fallhöhe $BG = h$ und ist durch die Gleichung $v^2 = 2gh$ . . . (n bestimmt. Verfolgt man von hier an die Bewegung noch durch einen unendlich kleinen Bogen a, wozu auch nur eine unendlich kleine Zeit t' gehört, so kann man während dieser kleinen Zeit die Bewegung als eine gleichförmige ansehen und sonach $a = vt'$ setzen, woraus $t' = \frac{a}{v}$ oder $t'^2 = \frac{a^2}{v^2}$, oder wenn man für a^2 den aus der vorigen Gleichung (m folgenden Werth, und für v^2 den Werth aus (n setzt und abkürzt,

$$t'^2 = \frac{r\,a'^2}{g\,b^2} \quad \text{oder} \quad t' = \frac{a'}{b}\sqrt{\frac{r}{g}} \quad \text{folgt.}$$

Bezeichnet man für das folgende Element a_1 des Bogens $A'bA$ den auf den Halbkreis $Ba'A$ entsprechenden unendlich kleinen Bogen mit a'' (so dafs a'' mit a_1 eben so wie a' mit a zusammenhängt) und mit t'' die Zeit, welche der schwere Punct braucht, um durch den Bogen a_1 zu gehen; so ist genau eben so $t'' = \frac{a''}{b}\sqrt{\frac{r}{g}}$. Wiederholt man dieses Verfahren von A' bis A, so gibt die Summe aus allen diesen Zeiten t', t''. . . (wo dann a das erste Bogenelement an A' und t' die zugehörige Zeit bezeichnet) die Zeit t für einen halben Schwung von A' bis A, so, dafs also $t = t' + t'' + \ldots = \sqrt{\frac{r}{g}}\left(\frac{a' + a'' + \ldots}{b}\right)$, oder da $a' + a'' + \ldots$ die Länge der halben Kreisperipherie $Ba'A$ vom Durchmesser b, also $= \frac{1}{2}b\pi$ ist, auch $t = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ wird. Da nun das Pendel zum Steigen durch den Bogen AA'' dieselbe Zeit wie zum Fallen des gleichen Bogens $A'A$ braucht, so ist die ganze Schwingungszeit: $T = 2t$ oder $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ . . . (1, wenn man nämlich unter einem l statt r für die Länge des Pendels setzt.

Anmerkung. Wie aus der Ableitung dieser Formel (1 erhellt, so wird dabei vorausgesetzt, dafs der Elongationswinkel $A\,'\,A' = \alpha$ sehr klein sey; ist diefs nicht der Fall, so gibt diese Formel die Schwingungszeit etwas zu klein. Drückt man α in Theilen des Halbmessers 1 aus, so ist dann

---

Voraussetzung Ag als sehr klein gegen AD vernachläfsigen und anstatt Dg den Durchmesser DA setzen kann) und $gc'^2 = Bg \cdot Ag = h \cdot Ag$ ist, auch $\frac{a^2}{a'^2} = \frac{4r^2}{b^2} \cdot \frac{h}{2r} = \frac{2rh}{b^2}$, wie oben angenommen wurde.

genauer $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$. So wäre für $\alpha = 1$ Grad, die Länge von α in Theilen des Halbmessers $= \frac{\pi}{180} = \frac{3{\cdot}1416}{180} = {\cdot}01745$, also $T = 1{\cdot}000019\,\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, so, dafs man durch Anwendung der Formel (1 bei diesem Elongationswinkel einen Fehler von nahe den 50000sten Theil der Schwingungszeit begeht, was auf 50000 Secunden eine, oder auf 24 Stunden nicht volle zwei Secunden beträgt.

§. 152. Gesetze der Pendelschwingungen.

Aus der vorigen Formel (1 ergeben sich folgende Gesetze für das Pendel:

1. Da bei kleinen Schwingungen die Schwingungszeit von der Gröfse des Schwingungsbogens (der Amplitude) $A'AA''$ unabhängig ist, so finden diese Schwingungen alle in derselben Zeit Statt oder sie sind isochronisch.

2. Sind t und t' die Schwingungszeiten für zwei Pendel von den Längen l und l', so ist, für ein und denselben Ort der Erde (wofür g denselben Werth behält) $t : t' = \sqrt{l} : \sqrt{l'}$ oder auch $l : l' = t^2 : t'^2$, d. h. die Schwingungszeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen, oder diese Längen wie die Quadrate der Schwingungszeiten.

Macht das erste Pendel n, das zweite n' Schwingungen in derselben Zeit T, so ist $t = \frac{T}{n}$ und $t' = \frac{T}{n'}$, folglich auch

$$l : l' = \frac{T^2}{n^2} : \frac{T^2}{n'^2} = n'^2 : n^2,$$

d. h. die Pendellängen verhalten sich auch umgekehrt wie die Quadrate der Zahlen, welche angeben, wie viele Schwingungen in gleicher Zeit gemacht werden.

3. Befindet sich das zweite Pendel von der Länge l' an einem andern Orte, wo die Beschleunigung der Schwere g' ist, so hat man

$$t : t' = \sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{l'}{g'}}.$$

Sollen nun die Schwingungszeiten gleich seyn, so mufs auch $\frac{l}{g} = \frac{l'}{g'}$ oder $g : g' = l : l'$ seyn, d. h. es ist bei gleichen Schwingungszeiten die Schwere den Pendellängen proportional.

4. Sind dagegen die Pendellängen gleich, so ist $t : t' = \sqrt{g'} : \sqrt{g}$ oder $g : g' = t'^2 : t^2 = n^2 : n'^2$,

d. h. die Schwerkräfte verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszeiten oder gerade wie die Quadrate der Zahlen, welche anzeigen, wie viele Schwingungen dasselbe, oder Pendeln von gleichen Längen in derselben Zeit machen.

Für die absolute Intensität der Schwere an irgend einem Ort der Erde hat man $g = \frac{\pi^2 l}{T^2}$.

5. Für die Länge des Secundenpendels L hat man, wegen $T = 1$:

$$L = \frac{g}{\pi^2} = \frac{g}{9{\cdot}87}, \text{ also auch } g = 9{\cdot}87\, L.$$

Da man für Wien (im luftleeren Raum und auf das Niveau des Meeres reducirt) nahe $L = 3{\cdot}144$ Fufs fand, so ist für diesen Ort die Beschleunigung der Schwere $g = 31{\cdot}03$ Fufs (vergleiche §. 142. Genauer ist für Wien $L = {\cdot}99394825$ Meter).

§. 153. Mittelpunct des Schwunges eines zusammengesetzten Pendels. Legt man durch den Schwerpunct O (Fig. 130) eines physischen oder zusammengesetzten Pendels, senkrecht auf die horizontale Schwingungsachse C eine Ebene und nimmt darin die beliebigen Puncte a, b... an, so schwingen diese mit dem Pendel gleichzeitig, während sie, wenn sie frei oder von einander unabhängig wären, ungleich, und zwar der schwere Punct a schneller als jener b schwingen würde u. s. w.; es wird also durch diese Verbindung der Punct a zurückgehalten und jener b beschleunigt. Es gibt jedoch einen Punct F (eigentlich sind es mehrere Puncte), welcher weder beschleunigt noch retardirt wird und in seiner Verbindung mit dem Pendel genau eben so schwingt als ob er frei wäre, und dieser Punct heifst Mittelpunct des Schwunges; man findet ihn, wenn man nach der Formel (1 §. 151 die Länge l eines einfachen Pendels berechnet, welches mit diesem zusammengesetzten Pendel gleiche Schwingungszeiten T hat (die man also beobachten mufs), und diesen Werth von l auf der durch C und O gehenden Geraden von C bis F aufträgt; dieser Abstand $CF = l$ des Schwingungsmittelpunctes F vom Aufhängpuncte C bestimmt zugleich die Länge des zusammengesetzten Pendels, weil es in der That mit einem einfachen Pendel von derselben Länge gleiche Schwingungszeiten besitzt. (Ein anderer Ausdruck für die Bestimmung dieses Punctes F folgt in §. 170.).

Anmerkung. Der Mittelpunct des Schwunges besitzt gegen den Aufhängpunct eines zusammengesetzten Pendels die merkwürdige Eigenschaft oder Beziehung, dafs, wenn man das Pendel umkehrt und in diesem Mittelpuncte aufhängt, sofort der vorige Aufhängpunct zum Mittelpuncte des Schwunges wird, das Pendel also in beiden Fällen dieselbe Schwingungszeit (und zwar wie das einfache Pendel von der Länge CF) besitzt (M. s. §. 170, Anmerkung 2). Man benützt diese Eigenschaft um den Mittelpunct des Schwunges bei dem eigens dafür construirten Reversionspendel, wobei sich von zwei durch C und F gehenden Schwingungsachsen (in Form von Schneiden) die eine verschieben, oder die Entfernung CF reguliren (oder wo diefs nicht der Fall, ein kleines Gewicht m an der Stange verschieben) läfst, practisch zu bestimmen.

Bekanntlich benützt man das Pendel als Zeitmesser, und bei den Uhren zur Regulirung der Bewegung. Man befestigt eine schwere linsenförmige Masse, um den Widerstand der Luft leichter zu überwinden, an eine dünne Stange, welche oben mittelst einer Messerschneide, oder vielleicht noch besser, einer Uhrfeder aufgehängt wird.

Drittes Kapitel.

Von der Centrifugal- oder Fliehkraft.

§. **154. Erklärung.** Befindet sich an dem Endpuncte A (Fig. 131) eines in C befestigten gewicht- und massenlosen Fadens CA ein blofs materieller Punct von der Masse M (deren Gewicht also dabei gar nicht in Betracht kommt), und wird diese durch eine momentane Kraft nach der Richtung AT mit irgend einer Geschwindigkeit in Bewegung gesetzt, so kann sich diese Masse vermöge der Verbindung mit dem Puncte C nur im Kreise AMB fortbewegen, und diese wird sonach während der Zeit, in welcher sie ohne diese Verbindung den Weg AE zurückgelegt hätte, um das Stück EM gegen den Mittelpunct C gezogen, oder was dasselbe ist, die Masse M hat das Bestreben, sich in dieser Zeit um ME von C zu entfernen. Die Kraft nun, mit welcher der Faden, welcher dieses Entfernen vom Mittelpuncte C jeden Augenblick verhindert (indem die Masse nach dem Beharrungsvermögen in jedem Puncte der krummlinigen Bahn nach der Tangente fortgehen will), dadurch gespannt wird, heifst Centrifugal-, Flieh- oder Schwungkraft, und sie ist genau jener Kraft gleich, welche die Masse M beständig gegen den Mittelpunct hinziehen mufs, um der Fliehkraft das Gleichgewicht zu halten, und welche defshalb Centripedal- oder Centralkraft genannt wird.

§. **155. Bestimmung der Fliehkraft.** Hat die Masse M im Puncte A durch eine momentane Kraft nach der Richtung

AT die Geschwindigkeit v erhalten, so geht diese, da die anziehende Kraft fortwährend normal auf die Richtung der Bewegung ist, also in v keine Änderung bewirkt, mit dieser Geschwindigkeit v gleichförmig im Kreise $AMBA$ herum. Nimmt man an, dafs der sehr, oder eigentlich unendlich kleine Bogen AM in der Zeit t' zurückgelegt wird, so kann während dieser ebenfalls unendlich kleinen Zeit (§. 137) die Anziehungs- oder Centripedalkraft als eine constante Kraft $= F$ angesehen werden, wodurch also der Weg EM, wofür man bei dieser Voraussetzung (dafs AM unendlich klein ist) die mit AB Parallele $Mn = AD$ nehmen kann, in derselben Zeit t' mit gleichförmig beschleunigter Bewegung zurückgelegt wird. Nach §. 146 (Gleich. 2) ist aber die Beschleunigung $G = \frac{F}{M} g$ . . . (α, und der Weg (§. 142, 2)

$$AD = \tfrac{1}{2} G t'^2 = \tfrac{1}{2} g \frac{F}{M} t'^2.$$

Da ferner der kleine Bogen AM mit seiner Sehne verwechselt werden kann, ferner nach einem Satze der Geometrie

$$AM^2 = AB.AD = 2r.AD$$

ist, wenn man nämlich den Halbmesser $AC = r$ setzt, und endlich auch noch (§. 127, 1) $AM = vt'$ ist; so folgt

$$v^2 t'^2 = 2r.\tfrac{1}{2} g \frac{F}{M} t'^2,$$

und daraus für die Anziehungskraft F, welche auch der gesuchten Fliehkraft gleich ist $F = \frac{Mv^2}{rg}$ . . . (1.

Aus diesem Ausdrucke folgt, dafs die in Gewichtseinheiten ausgedrückten Fliehkräfte der Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit direct, und dem Halbmesser des Kreises, in welchem die Bewegung (an demselbem Orte der Erde) Statt findet, umgekehrt proportional ist. Ist T die Umlaufszeit der Masse M in dem Kreise $AMBA$, so ist $2r\pi = vT$, also $v = \frac{2r\pi}{T}$, und wenn man diesen Werth in die vorige Gleich. (1 substituirt, auch $F = \frac{4Mr\pi^2}{gT^2}$ . . . (2,

oder, wenn der materielle Punct die Kreisperipherie in einer Secunde n Mal durchläuft, wodurch $T = \frac{1}{n}$ wird, auch

$$F = \frac{4n^2\pi^2 rM}{g} \quad . . . (3.$$

Setzt man den Werth von F aus der Gleichung (1 in jene (α, so erhält man für die Centrifugalbeschleunigung $G = \frac{v^2}{r}$ . . . (4, welche in Längenmafs ausgedrückt, ebenfalls zur Beurtheilung der Intensität der Centrifugalkraft dienen kann.

Anmerkung. Findet die Bewegung nicht im Kreise, sondern in einer andern krummen Linie Statt, so hat man in diesen Formeln unter r den Krümmungshalbmesser (d. i. den Halbmesser des Krümmungskreises) an jener Stelle der Curve zu verstehen, an welcher die Fliehkraft, welche also dabei nicht mehr wie hier im Kreise constant ist, bestimmt werden soll.

Beispiele.

1. Wird eine kleine Bleikugel von 20 Loth an einem 3 Fufs langen Faden auf einem horizontalen Tisch (wodurch also das Gewicht derselben aufgehoben ist) im Kreise mit einer Geschwindigkeit von 5 Fufs herum geschwungen, so ist die Stärke, mit welcher der Faden durch die entstehende Fliehkraft gespannt wird (Gleich. 1) $F = \frac{20.25}{3.31} = \frac{500}{93}$, oder nahe $5\frac{1}{3}$ Loth, und es müfste, im Falle derselbe nur so stark wäre, dafs er blofs 5 Loth tragen könnte, dabei der Faden nothwendig abreifsen.

§. 156. Befinden sich an den Endpuncten A und B einer um C drehbaren Geraden AB (Fig. 132) die trägen Massen M und M', wofür die Abstände $CA = a$ und $CB = b$ seyn sollen; so sind ihre Fliehkräfte nach der Gleichung (2 des vorigen Paragraphs, da die Umdrehungszeit T für beide die nämliche ist:

$$F = \frac{4\,M a\,\pi^2}{g\,T^2} \text{ und } F' = \frac{4\,M' b\,\pi^2}{g\,T^2}.$$

Soll nun $F' = F$ seyn, so mufs $Ma = M'b$ oder $M : M' = b : a \ldots$ (1 Statt finden, d. h. es müssen die statischen Momente der Massen in Beziehung auf den Drehungspunct gleich seyn, oder sich die Massen umgekehrt wie ihre Abstände von diesem Puncte verhalten.

Dieser Satz läfst sich leicht auf jedes beliebige System von materiellen Puncten ausdehnen. Nimmt man als einfachsten Fall in der Geraden CA, welche sich um eine in C auf AC senkrechte Achse umdreht in den beliebigen Abständen $a, a', a'' \ldots$ von C die materiellen Puncte $m, m', m'' \ldots$ und sucht jenen Punct O, in welchem die gesammte Masse $M = m + m' + m'' + \ldots$ vereinigt, dieselbe Fliehkraft, wie die einzelnen Massen zusammen besitzen, so ist, wenn man $CO = z$ setzt, eben so

$$zM = ma + m'a' + m''a'' + \ldots,$$

woraus für den gesuchten Abstand z genau derselbe Ausdruck wie (§. 26) für den Mittelpunct der Massen oder Schwerpunct dieses Systems von materiellen Puncten folgt.

Eben so läfst sich zeigen, dafs, wenn sich irgend eine ebene Fläche AB (Fig. 134), über welche die Masse M gleichförmig vertheilt seyn soll, um eine durch C gehende, auf ihrer verlängerten Ebene senkrechten Achse im Kreise herumdreht, die entstehende Fliehkraft eben so grofs ist, als ob die Masse M im Schwerpuncte O dieser Fläche vereinigt wäre. (Man darf dazu nur durch den Umdrehungspunct C in der Ebene dieser Fläche zwei rechtwinklichte Momentenachsen annehmen, und die Fliehkräfte der einzelnen materiellen Puncte $m, m' ..$ der Fläche AB, jede in zwei mit diesen Achsen parallele Seitenkräfte zerlegen, und sich erinnern, dafs die Summe der Momente der einzelnen Massen gegen eine dieser Achsen bezogen, dem Momente aus der Gesammtmasse M in den Abstand vom Schwerpuncte O dieser Fläche AB gleich ist.)

Dasselbe gilt auch von Körpern, bei welchen die Schwerpuncte sämmtlicher Querschnitte, welche durch die Schnitte von Ebenen entstehen, die auf die Umdrehungsachse senkrecht sind, in einer mit dieser Achse parallelen geraden Linie liegen.

Dreht sich also z. B. eine Kreisfläche vom Halbmesser $CO = r$ um ihren Mittelpunct (d. h. um eine auf der Kreisebene senkrecht durch den Mittelpunct gehende Achse), und wird die Masse ihrer Fläche $r^2\pi$ proportional gesetzt; so darf man zur Bestimmung der Fliehkraft, die Kreisfläche nur in ihre Elemente, wie abC (Fig. 134), d. i. in unendlich schmale Dreiecke auflösen, und sich die Masse jedes dieser Dreiecke in dem Schwerpuncte o desselben vereinigt denken; da nun (§. 48) ein mit dem Halbmesser $CO = \frac{2}{3}r$ aus dem Mittelpuncte C gezogener Kreis durch die Schwerpuncte dieser sämmtlichen Dreiecke geht, so kann man sich die ganze Masse $M = r^2\pi$ der Kreisfläche in dieser Kreisperipherie vereinigt denken, und sofort die gesuchte Centrifugalkraft nach den Formeln des vorigen Paragraphes bestimmen; dasselbe gilt nun auch von einem Cylinder, dessen Grundflächen mit dieser Kreisfläche und Achse, mit der durch C gehenden Umdrehungsachse zusammen fällt; die Achse erleidet jedoch hier, bei homogener Masse keinen Zug oder Druck.

Beispiele.

1. An dem einen Ende einer 5 Fufs langen Eisenstange, welche bei einem Gewichte von 1000 Pfund abreifst, befindet sich eine 100 Pfund schwere Kugel; wenn sich nun diese Kugel um den andern Endpunct der Stange, und zwar um ihr Gewicht unwirksam zu machen, auf einem horizontalen Tische im Kreise herumdreht, so ist die Frage, wie viele Umdrehungen dieselbe per Secunde machen kann, bis die Fliehkraft mit der Festigkeit der Eisenstange im Gleichgewichte stehe?

Da man sich die Masse der Kugel für die Bestimmung der Fliehkraft im Schwerpuncte vereinigt denken kann, so ist nach der Formel (3 des vorigen Paragraphes $F = 1000$, $M = 100$, $r = 5$, $\pi^2 = (3\cdot1416)^2 = 9\cdot87$ und $g = 31$ zu setzen, wodurch man $1000 = 636\cdot8\,n^2$, und daraus für die gesuchte Umdrehungszahl $n = \sqrt{\left(\frac{1000}{636\cdot8}\right)} = 1\cdot26$ erhält, so, dafs also die Stange schon abreifsen würde, wenn die Kugel den genannten Kreis von 10 Fufs Durchmesser in einer Secunde $1\frac{3}{10}$ Mal durchliefe.

2. Es stelle $adfg$ (Fig. 134) ein Segment z. B. den zehnten Theil des Radkranzes eines 200 Centner schweren gufseisernen Schwungrades vor, welches bei einem äufsern Halbmesser $R = Ca = 6$, und innern $r = Cf = 5$ Fufs in einer Secunde drei Mal umlauft; mit welcher Kraft sucht sich dieses Kreissegment, wenn es ein Gewicht von 20 Centner hat, aus seiner Verbindung mit der Umdrehungsachse loszureifsen?

Ist i der Schwerpunct des Bogenstückes $adfg$, so ist nach der Formel (3 in §.50, in welche $r = 6$, $r' = 5$, $s =$ Bog. $ad = \frac{1}{10} . 12 \times 3{\cdot}1416 = 3{\cdot}7579$, $a = ad = 3{\cdot}7082$ ($= 12 \; Sin \; 18^{\circ}$) zu setzen ist: $Ci = 5{\cdot}43$ Fufs. Da man sich nun in diesem Punct i die gesammte Masse des Segments von 2000 Pfund vereinigt denken kann, so hat man nach der Formel (3 des vorigen Paragraphes, in welche statt r dieser Werth Ci zu setzen ist, sofort für die gesuchte nach der Richtung Ci wirkende Fliehkraft des Segments: $F = \frac{4 \times 9 \times 9{\cdot}87 \times 5{\cdot}43 \times 2000}{31} = 124476{\cdot}6$ Pfund.

Anmerkung. Aus diesen Beispielen wird es leicht begreiflich, dafs bei einem zu schnellen Umlaufen der Mühl- und Schleifsteine, gufseiserner Schwungräder u. s. w. Die Cohäsion oder der Zusammenhang der Theile überwunden, und diese in Stücken hinausgeschleudert werden können.

Fährt ein Wagen schnell um eine Ecke oder in einer starken Krümmung, so kann er durch die Schwungkraft umgestürzt werden. Stellt z. B. Ob (Fig. 135) das durch den Schwerpunct O wirkende Gewicht, und Oa die nach horizontaler Richtung wirkende Fliehkraft des Wagens vor; so wirkt die Resultirende Oc dieser beiden Kräfte nach der Richtung OD, und es mufs, sobald diese nicht mehr zwischen die Räder fällt, der Wagen umstürzen.

Ist der Boden AB (Fig. 136) nicht horizontal, sondern nach einwärts abschüssig, so wird dadurch der Schwungkraft zum Theil entgegen gewirkt, und es kann bei denselben Werthen von Oa und Ob die Resultirende Oc zwischen die Räder fallen, und der Wagen gegen das Umstürzen gesichert seyn. Aus diesem Grunde neigen sich auch Menschen und besonders Pferde, wenn sie schnell im Kreise herum laufen, instinctmäfsig nach einwärts, und zwar um so mehr, je schneller und in einem desto kleineren Kreise sie herumlaufen. Aus gleichem Grunde erhöht man bei Eisenbahnen in den Krümmungen die äufsere Schiene.

Durch die Schwungkraft mufste die anfangs noch weiche Erdmasse die an den Polen abgeplattete Gestalt erhalten; durch dieselbe Kraft mufs auch die Schwerkraft, und zwar unterm Äquator, wo die Schwungkraft am gröfsten ist, und den 289sten Theil der Schwere beträgt, auch am meisten, und zwar um den 289sten Theil vermindert werden. Würde sich die Erde 17 Mal schneller um ihre Achse drehen, so wäre unterm Äquator die Fliehkraft der Schwerkraft gleich, und die Körper hätten da gar keine Schwere u. s. w.

Das Centrifugalpendel.

§. 157. Erklärung. Bewegt sich das in C aufgehangene einfache Pendel CA (Fig. 137) auf eine solche Weise, dafs der Punct A, welcher die Masse oder den materiellen Punct M trägt, die Peripherie des horizontalen Kreises $ADBA$, also die Gerade CA die krumme Oberfläche eines geraden Kegels beschreibt; so heifst ein solches Pendel ein conisches oder einfaches Centrifugalpendel, und dabei wird, wenn CE lothrecht, also zugleich senkrecht auf die Kreisebene ist, der W. ECA wieder der Elongationswinkel und CE die Höhe des Pendels genannt.

§. 158. Umlaufszeit dieses Pendels. Bewegt sich der Punct A, d. i. die damit verbundene Masse M mit gleichförmiger Geschwindigkeit v, so ist der Elongationswinkel, folglich auch die Centrifugalkraft unveränderlich. Setzt man den Halbmesser $AE = BE = r$, die Länge des Pendels $CA = l$, die Höhe $CE = h$, und die Centrifugalkraft $= F$; so ist (§. 155, Gleich. 1) $F = \frac{Mv^2}{rg}$. Nimmt man in der Verlängerung von EA das Stück $Ac = F$, und zerlegt diese Kraft in zwei auf einander senkrechte Ab und Ai, nämlich normal auf CA und in deren Verlängerung; eben so auch das Gewicht Ad der Masse M in Aa und Ae, wieder senkrecht auf CA und in deren Verlängerung, so mufs, da Ai und Ae zusammen $= An$ von der Festigkeit der Linie oder des Fadens CA und dem Puncte C aufgehoben werden, und die beiden noch übrigen Kräfte, sobald der Winkel ECA constant seyn soll, im Gleichgewichte stehen müssen, sofort, da sie sich gerade entgegen wirken, $Ab = Aa$ Statt finden; zugleich ist auch, wegen Ähnlichkeit der Dreiecke Adn und ACE:

$$F : M = dn : Ad = EA : CE = r : h \ldots (\alpha,$$

ferner wegen Ähnlichkeit der Dreiecke Abc und CEA, $Ab : Ac = h : l$, oder $Ab = \frac{Fh}{l}$, und endlich wegen Ähnlichkeit der Dreiecke aAd und AEC, $Aa : Ad = r : l$, oder $Aa = \frac{Mr}{l}$.

Da nun $Ab = Aa$ seyn mufs, so ist $\frac{Fh}{l} = \frac{Mr}{l}$, oder, wenn man für F seinen Werth setzt, und dann r bestimmt:

$$r = v\sqrt{\frac{h}{g}} \ldots (1.$$

Ist T die Umlaufszeit des Pendels oder Punctes A in der Kreisperipherie, so ist $2r\pi = vT$, also $T = \frac{2r\pi}{v}$, oder, wenn man für r den Werth aus (1 setzt:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}} \quad \ldots (2.$$

Nach §. 151 (Gl. 1) ist die Schwingungszeit des einfachen Kreispendels von der Länge h sofort $T = \pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, nämlich halb so groſs, als die eben bestimmte; ist also die Länge eines einfachen Kreispendels der Höhe des Centrifugalpendels gleich, so ist die Umlaufszeit des letztern doppelt so groſs, als die Schwingungszeit des erstern.

Anmerkung. Das Pendel CA kann sich niemals horizontal stellen, weil dafür $h = o$, also $v = r\sqrt{\frac{g}{h}} = \infty$, d. i. unendlich groſs seyn müſste. Haben zwei conische Pendel gleiche Höhen, so haben sie auch gleiche Umlaufszeiten.

Viertes Kapitel.

Von dem Momente der Trägheit und der Bestimmung des Mittelpunctes des Schwunges.

§. 159. Begriff des Momentes der Trägheit.

Jede Masse setzt der Kraft, welche sie in Bewegung bringen will, vermöge ihrer Trägheit, einen Widerstand entgegen, welcher zufolge des allgemein giltigen Satzes, daſs jede Reaction oder Gegenwirkung der Action oder Wirkung gleich und entgegengesetzt ist, der bewegenden Kraft gleich ist, und durch diese gemessen werden kann; dieser Widerstand nimmt also (§. 146, Relat. α) mit der Gröſse der Masse und der Geschwindigkeit zu. Befindet sich nun im Puncte A der steifen, um C drehbaren Geraden CA (Fig. 138) eine bloſs träge Masse M (deren Gewicht also nicht in Betracht kommt), und wirkt in dieser die constante Kraft P senkrecht auf AC, so nimmt diese Masse (§. 133) eine gleichförmig beschleunigte Bewegung an, erlangt am Ende der ersten Secunde die Geschwindigkeit oder Beschleunigung (§. 146) $G = \frac{P}{M}g$, und beschreibt in dieser Zeit den Kreisbogen $AB = \frac{1}{2}G$. Nimmt man jetzt die Masse M von A weg, und bringt in irgend einem andern Puncte A' dieser Geraden AC eine Masse M' an, so erzeugt die noch immer in A wirksame Kraft P auf A', also auch auf die Masse M' den constanten Druck $P' = P \cdot \frac{AC}{A'C} = P\frac{a}{a'}$, wenn man $AC = a$ und $A'C = a'$ setzt. Die Beschleunigung dieser Masse M' ist $G' = \frac{P'}{M'}g$, und der in der ersten Secunde zurückgelegte Weg $A'B' = \frac{1}{2}G'$. Soll nun die Masse M' im letztern Falle der drehenden Bewegung, welche durch die Kraft P erzeugt wird, genau eben so, wie die Masse M im erstern Falle widerstehen, so mufs die Gerade AC in beiden Fällen dieselbe Winkelgeschwindigkeit annehmen, folglich der Punct B' in der Geraden CB liegen, und sonach die Proportion Bog. AB : Bog. $A'B' = a : a'$, oder wenn man für AB und $A'B'$ die Werthe setzt, auch $\frac{1}{2}G : \frac{1}{2}G' = a : a'$, oder $\frac{P}{M}g : \frac{P}{M'}g\frac{a}{a'} = a : a'$ Statt finden, woraus sofort folgt:

$$Ma^2 = M'a'^2 \ldots (1,$$

d. h. die beiden trägen Massen M und M' widerstehen jede für sich der drehenden Bewegung auf ganz gleiche Weise, wenn jede in das Quadrat ihres Abstandes vom Drehungspuncte multiplicirt dasselbe Product gibt.

Das Product einer in einem einzigen Puncte vereinigt gedachten Masse in das Quadrat ihres Abstandes vom Drehungspuncte heifst ihr Moment der Trägheit. Zwei verschiedene Massen widerstehen also der drehenden Bewegung auf gleiche Art, wenn ihre Trägheitsmomente gleich sind.

Bezeichnet man das Moment der Trägheit der Masse M mit $\mathfrak{M}$, so ist

$$\mathfrak{M} = Ma^2 \ldots (2,$$

und aus der vorigen Gleichung (1

$$M' = \frac{\mathfrak{M}}{a'^2} \ldots (3,$$

d. h. man findet die Masse M', welche im Abstande a' der drehenden Bewegung eben so wie die Masse M im Abstande a widersteht, indem man das Moment der Trägheit der Masse M durch das Quadrat des Abstandes a' dividirt.

Anmerkung. Oft ist es bequemer, anstatt den Abständen a, a' die Geschwindigkeiten v, v' zu nehmen, welche die Puncte A und A' gleichzeitig besitzen; da nun $v : v' = a : a'$ Statt findet, so ist auch für die beiden gleichgeltenden Massen M, M' sofort aus (1 :

$$Mv^2 = M'v'^2 \ldots (4.$$

Man nennt übrigens das Product einer Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit ihre lebendige Kraft.

§. 160. Moment der Trägheit eines Körpers oder eines Systems materieller Puncte. Sind $m, m', m'' \ldots$ die Elemente der Masse M eines Körpers, welcher sich um irgend eine Achse dreht, und $r, r', r'' \ldots$ die Abstände dieser Puncte von der Drehungsachse; so ist das Moment der Trägheit des ganzen Körpers (Gleich. 2 des vorigen Paragraphes)

$$\mathfrak{M} = mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots \text{ (a.}$$

Anmerkung. Sind $r, v' \ldots$ die Geschwindigkeiten der einzelnen materiellen Puncte, also $mv^2, m'v'^2 \ldots$ ihre lebendigen Kräfte, so ist, wenn die gemeinschaftliche Winkelgeschwindigkeit dieser Puncte $= V$ ist, sofort (§. 127, Gleich. 1) $v = rV$, $v' = r'V \ldots$, und daher die Summe der lebendigen Kräfte

$$S = mv^2 + m'v'^2 + \ldots = V^2(mr^2 + m'r'^2 + \ldots),$$

oder mit Rücksicht auf die vorige Gleichung (*a* auch $S = \mathfrak{M}V^2 \ldots$ (*b*, d. h. die lebendige Kraft eines um eine Achse sich drehenden Körpers ist gleich dem Momente der Trägheit dieses Körpers, in das Quadrat seiner Winkelgeschwindigkeit multiplicirt.

§. 161. Moment der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf eine Achse, welche mit einer durch den Schwerpunct des Körpers gehende Achse parallel ist. Es sey XY (Fig. 139) eine durch den Schwerpunct O eines Körpers gehende Achse, $X'Y'$ eine andere mit dieser parallelen Achse, $\mathfrak{M}$ das Moment der Trägheit des Körpers auf die erstere, und $\mathfrak{M}'$ jenes auf die letztere Achse bezogen; sind ferner $r, r' \ldots$ die Abstände der materiellen Puncte $m, m' \ldots$ des Körpers von der Achse XY, so wie $R, R' \ldots$ jene von der Achse $X'Y'$, so ist nach den vorigen Paragraphen

$$\mathfrak{M} = mr^2 + m'r'^2 + \ldots, \quad \mathfrak{M}' = mR^2 + m'R'^2 + \ldots,$$

und wenn M die Masse des Körpers ist, $M = m + m' + \ldots$

Legt man durch einen der materiellen Puncte m eine Ebene PQ senkrecht auf die Achsen, und zieht, wenn A und A' die Durchschnittspuncte damit sind, in dieser Ebene die Geraden AA', Am, $A'm$ und auch noch mn senkrecht auf AA', so ist im Dreiecke $AA'm$ nach einem bekannten Satze der Geometrie

$$A'm^2 = AA'^2 + Am^2 \mp 2\,AA'.An$$

(wobei — oder + gilt, je nachdem der W. A spitz oder stumpf ist), oder wenn man den Abstand der Achsen von einander $AA' = d$ und $An = x$ setzt, auch $R^2 = d^2 + r^2 - 2dx$.

Auf ganz gleiche Weise hat man für den materiellen Punct m' des

Körpers $R'^2 = d^2 + r'^2 - 2dx'$, und so auch ähnliche Relationen für die übrigen Puncte. Werden diese Gleichungen beziehungsweise mit m, m' ... multiplicirt und dann addirt, so entsteht

$$mR^2 + m'R'^2 + \ldots =$$
$$= (mr^2 + m'r'^2 + \ldots) + d^2(m + m' + \ldots) \mp 2d(mx + m'x' + \ldots).$$

Denkt man sich nun durch die Achse XY eine Ebene senkrecht auf jene Ebene, welche durch beide Achsen geht, und nimmt diese zur Momentenebene; so sind x, x'... die Abstände der materiellen Puncte m, m'... von dieser Ebene, und weil sie durch den Schwerpunct O des Körpers geht, so ist sofort (§. 26, Anmerk. 2) $mx + m'x' \ldots = 0$, mithin die vorige Gleichung mit Rücksicht auf die obigen Werthe:

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Md^2 \ldots (1,$$

d. h. das Moment der Trägheit eines Körpers auf irgend eine Achse bezogen, ist gleich dem Trägheitsmoment dieses Körpers in Beziehung auf eine, durch seinen Schwerpunct gehende, mit der erstern parallele Achse vermehrt um das Product aus der Masse des Körpers in das Quadrat des gegenseitigen Abstandes der beiden parallelen Achsen.

§. 162. Moment der Trägheit einer geraden Linie, die sich um einen ihrer Endpuncte dreht.

Es drehe sich die Gerade $AB = l$, die eine über die ganze Länge gleich vertheilte Masse M besitzen soll, um eine senkrecht auf AB durch A gehende Achse YY' (Fig. 140) und es sey m die Masse der Längenheineit, also $M = lm$.

Errichtet man in B auf AB ein Perpendikel, und schneidet darauf $BC = BD = AB$ ab, so wird für ein Element $rs = l'$ dieser Geraden AB die Masse $= ml'$, und dessen Moment der Trägheit nach §. 159 (da man dieses Element rs als einen materiellen Punct ansehen kann), $\mathfrak{M}' = ml' . Ar^2$; da aber, wenn rp senkrecht auf AB bis zur Geraden AC gezogen wird, $rp = Ar$ (weil $BC = AB$) ist, so ist das Trägheitsmoment auch $\mathfrak{M}' = ml' . \overline{rp}^2$, oder, wenn man mit π multiplicirt und dividirt auch $\mathfrak{M}' = \frac{m}{\pi}\, rp^2\, \pi l'$.

Nun ist aber $rp^2 \pi$ die Kreisfläche vom Halbmesser rp, mithin $rp^2 \pi l'$ der Inhalt des Cylinders von dieser kreisförmigen Grundfläche und Höhe $rs = l'$, welcher sofort durch Umdrehung des Rechteckes rq um AB erzeugt wird.

Summirt man daher alle die einzelnen Trägheitsmomente, welche auf dieselbe Art entstehen, wenn man die ganze Länge l der Linie AB

in ihre Elemente zerlegt, so erhält man $\frac{m}{\pi}$ multiplicirt mit der Summe aller dieser kleinen Cylinder, welche zusammen den durch Umdrehung des Dreieckes ABC um AB entstehenden Kegel ausmachen, dessen Basis den Halbmesser $BC = l$ hat, und Höhe $AB = l$ ist; da nun der Inhalt dieses geraden Kegels $= \frac{1}{3} BC^2 \pi . AB = \frac{1}{3} . l^2 \pi . l = \frac{1}{3} l^3 \pi$ ist, so hat man für das gesuchte Moment der Trägheit:

$$\mathfrak{M}' = \frac{m}{\pi} . \tfrac{1}{3} l^3 \pi = \tfrac{1}{3} m l . l^2, \text{ d. i. } \mathfrak{M}' = \tfrac{1}{3} M l^2 \quad . \; . \; (1.$$

Die materielle gerade Linie AB widersteht also durch ihre träge Masse M bei ihrer Umdrehung um die Achse YY' genau so, als ob der dritte Theil ihrer Masse M in dem Endpuncte B vereinigt, und AB ohne Masse wäre.

Ist R der Punct, in welchen man sich die ganze Masse M vereinigt denken kann, so muſs $M . AR^2 = \mathfrak{M}' = \frac{1}{3} M l^2$ seyn, woraus

$$AR = \tfrac{1}{3} l \sqrt{3} = \cdot 577\, l \; . \; . \; . \; (m$$

folgt. Dieser so bestimmte Punct R wird manchmal der Schwingungspunct, auch Mittelpunct der Trägheit der materiellen Linie AB genannt.

Hat z. B. eine dünne Stange eine Länge von 10 Fuſs und ein Gewicht von 6 Pfund, so hat man, um das Moment der Trägheit dieser Stange zu finden, wenn sie sich um einen ihrer Endpuncte umdreht, in der vorigen Formel $l = 10$ und $M = 6$ (weil die Masse durch dieselbe Zahl wie das Gewicht ausgedrückt wird) zu setzen, und man erhält

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} . 6 . 100 = 200 \text{ Pfund},$$

d. h. eine Masse von 200 Pfund würde im Abstand von 1 Fuſs vom Drehungspuncte durch ihre Trägheit der drehenden Bewegung denselben Widerstand, wie diese Stange leisten.

Anmerkung 1. Geht die Umdrehungsachse YY' durch den Schwerpunct der Geraden AB, so findet man das Moment der Trägheit für diese Achse aus der Gleichung (1 des vorigen Paragraphes, aus welcher $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' - M d^2$ folgt, sofort $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M l^2 - M (\frac{1}{2} l)^2$, d. i. $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} M l^2 \; . \; . \; . \; (2.$

Anmerkung 2. Zieht man zu AB durch irgend einen Punct E der Achse die Parallele EF, und stellt sich vor, daſs sich das Rechteck AF, deren gleich vertheilte Masse $= M$ seyn soll, um diese Achse YY' umdreht, so darf man zur Bestimmung des Momentes der Trägheit diese Fläche nur in unendlich schmale, mit AB parallel laufende Streifen zerlegt denken, wovon jeder, dessen Masse $= m$ seyn mag, als eine materielle Linie angesehen werden kann, die sich um YY' umdreht; da nun von jedem solchen Streifen nach dem Vorigen das Trägheitsmoment $= \frac{1}{3} m l^2$ ist, so darf man diese nur summiren, oder, wenn n solcher Streifen vorhanden, diesen Ausdruck n Mal nehmen, um $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} n m l^2 = \frac{1}{3} M l^2$, also genau den vorigen Ausdruck (1 zu erhalten: die Dimension nach der Richtung der Umdrehungsachse erscheint also nur mittelbar durch die Masse M des Rechteckes.

§. 163. Moment der Trägheit eines Rechteckes und Parallelopipedes. Es drehe sich das Rechteck AD (Fig. 141) um eine durch dessen Schwerpunct O senkrecht auf die Ebene AD gehende Achse YY'; man denke sich das Rechteck in unendlich schmale, mit AB parallele Streifen, wie ab' zerlegt, so kann man diese Flächenelemente als materielle Linien behandeln, und ihre Trägheitsmomente nach dem vorigen Paragraphe ausdrücken. Ist nämlich m die Masse eines dieser unendlich schmalen Streifen, so ist das Moment der Trägheit desselben hinsichtlich einer durch seinen Schwerpunct n gehenden, mit YY' parallelen Achse (voriger Paragraph Gl. 2) $= \frac{1}{12} m a^2$, wenn $CD = AB = a$ gesetzt wird, folglich in Beziehung auf die Achse YY' (§. 161, Gl. 1) $\mathfrak{m} = \frac{1}{12} m a^2 + m x^2$, wenn man $On = x$ setzt. Für das folgende Flächenelement ist eben so $\mathfrak{m}' = \frac{1}{12} m' a^2 + m' x'^2$ u. s. w. so, daſs das Trägheitsmoment der ganzen Fläche des Rechteckes, dessen Masse $m + m' + \ldots = M$ seyn soll,

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{m} + \mathfrak{m}' + \ldots = \tfrac{1}{12} a^2 (m + m' + \ldots) + m x^2 + m' x'^2 + \ldots,$$

oder auch, da $m x^2 + m' x'^2 \ldots$ das Moment der Trägheit der materiellen Linie EF vorstellt (weil diese durch die Mittelpuncte der Massen $m, m' \ldots$ oder schmalen Streifen geht), und (§. 162, Gl. 2) den Werth $\frac{1}{12} M b^2$ hat, wenn man $EF = AC = b$ setzt:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} M a^2 + \tfrac{1}{12} M b^2 = \tfrac{1}{12} M (a^2 + b^2) \ldots (1.$$

Geht die Achse durch einen Winkelpunct, z. B. durch A, bleibt aber der vorigen YY' parallel, so ist für diese Achse (§. 161, 1) $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + M . AO^2$, oder wegen $AO^2 = AF^2 + OF^2 = \frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{4} b^2$, wenn man diesen und den Werth für $\mathfrak{M}$ aus der vorigen Gleichung setzt und reducirt: $\mathfrak{M}' = \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) \ldots (2.$

Geht die Achse durch den Halbirungspunct J der Breite des Rechteckes aber immer noch senkrecht auf die Ebene desselben, so ist $\mathfrak{M} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) + M . JO^2$, oder wegen $JO = \frac{1}{2} a$ auch

$$\mathfrak{M} = M (\tfrac{1}{3} a^2 + \tfrac{1}{12} b^2) \ldots (3.$$

Ist b so klein, daſs $\frac{1}{12} b^2$ gegen $\frac{1}{3} a^2$ vernachläſsigt werden darf, so ist $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M a^2$, wie bei der materiellen geraden Linie (Gl. 1, §. 162).

Anmerkung. Dieselben Ausdrücke oder Formeln 1), 2), 3) gelten auch für das Moment der Trägheit eines rechtwinklichten Parallelopipedes, welches das hier betrachtete Rechteck AD zur Grundfläche hat, wenn man dabei nur unter M die Masse dieses Körpers versteht, indem nur dadurch die mit der Umdrehungsachse parallele Dimension, also hier die Höhe des Parallelopipedes Einfluſs hat.

Um sich von der Richtigkeit dieses Satzes zu überzeugen, darf man sich nur das Parallelopiped in unendlich schmale, mit der Grundfläche AD (Fig. 141, a) parallele Schichten zerlegt denken, und die Summe der Trägheitsmomente dieser Schichten, welche nach den vorigen Formeln bestimmt werden können, für das Moment der Trägheit des Körpers nehmen. Ist nämlich m die Masse einer solchen unendlich dünnen Schichte, und n die Anzahl der Schichten, folglich $nm = M$ die Masse des Parallelopipedes, so ist das Trägheitsmoment einer solchen Schichte, wenn z. B. die Achse durch die Kante AA' geht (Formel 2) $\mathfrak{m} = \frac{1}{3} m\,(a^2 + b^2)$, also auch

$$n\mathfrak{m} = \tfrac{1}{3} nm\,(a^2 + b^2),\ \text{d. i. } \mathfrak{M} = \tfrac{1}{3} M\,(a^2 + b^2),$$

welches genau wieder die betreffende Formel 2 für die Ebene ist. Dasselbe gilt auch für die übrigen Fälle, in welchen die Umdrehungsachse durch den Schwerpunct oder durch JJ' geht.

§. 164. Moment der Trägheit eines rechtwinklichten Dreieckes. Es gehe die Umdrehungsachse für das rechtwinklichte Dreieck ABC (Fig. 142) durch die Spitze des rechten Winkels A senkrecht auf die Dreiecksebene. Ergänzt man das Dreieck, dessen Masse $= M$ seyn soll, zu dem Rechtecke AD, so ist $2M$ die Masse desselben, und das Moment der Trägheit in Beziehung auf die genannte Achse ist (vor. Paragr. Gl. 2)

$$\mathfrak{M}' = \tfrac{1}{3} 2M\,(AB^2 + AC^2) = \tfrac{2}{3} M d^2,$$

wenn man die Hypotenuse oder Diagonale $BC = d$ setzt. Das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ des Dreieckes BCD, in Beziehung auf den Drehungspunct D, ist so grofs, wie jenes des Dreieckes ABC in Beziehung auf den genannten Punct A, dagegen in Beziehung auf eine durch dessen Schwerpunct O gehende, mit der vorigen parallele Achse (§. 161, Gl. 1) $= \mathfrak{M} - M\,(\frac{2}{3} ED)^2$, (wegen $DO = \frac{2}{3} DE$, §. 48) $= \mathfrak{M} - \frac{1}{9} M d^2$, und endlich in Beziehung auf eine Achse, welche durch A geht (§. 161 Gl. 1) $= \mathfrak{M} - \frac{1}{9} M d^2 + M \,.\, AO^2 = \mathfrak{M} + \frac{1}{3} M d^2$ (wegen $AO = \frac{2}{3} AD = \frac{2}{3} d$); wird nun noch das gesuchte Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ des Dreieckes ABC hinzugefügt, so mufs die Summe dem obigen Momente $\mathfrak{M}'$ des Rechteckes gleich seyn, und man erhält $\mathfrak{M} + \mathfrak{M} + \frac{1}{3} M d^2 = \frac{2}{3} M d^2$, und daraus $\mathfrak{M} = \frac{1}{6} M d^2$, oder auch wegen $d^2 = a^2 + b^2$, wenn man die beiden Catheten des Dreieckes mit a und b bezeichnet:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{6} M\,(a^2 + b^2) \;.\;.\;.\; (1.$$

Derselbe Ausdruck gilt auch wieder für das Trägheitsmoment eines geraden dreiseitigen Prisma, welches das hier betrachtete Dreieck ABC zur Grundfläche, und wobei die Umdrehungsachse dieselbe Lage hat. M bezeichnet dann die Masse des Prisma.

§. 165. Moment der Trägheit eines gleichschenkligen Dreieckes. Es sey in dem Dreiecke ABC

(Fig. 143) $AC = BC = d$, $CD = h$ und M die Masse desselben. Zerlegt man dasselbe in die beiden gleichen rechtwinkelichten Dreiecke ACD und BCD, wovon also jedes die Masse $\frac{1}{2}M$ besitzt, so ist das Trägheitsmoment eines jeden derselben in Beziehung auf eine durch D senkrecht auf die Ebene ABC gehende Achse (vorigen Paragraphs) $= \frac{1}{6} . \frac{1}{2} M d^2$, also für beide zusammen $= \frac{1}{6} M d^2$. In Beziehung auf eine durch den Schwerpunct O des Dreieckes ABC mit der vorigen parallelen Achse ist (§. 161)

$\mathfrak{M}' = \frac{1}{6} M d^2 - M . OD^2 = \frac{1}{6} M d^2 - \frac{1}{9} M h^2$ (wegen $OD = \frac{1}{3} h$),

und für eine durch C gehende parallele Achse (§. 161)

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + M . OC^2, \text{ oder wegen } OC = \tfrac{2}{3} h,$$

und wenn man für $\mathfrak{M}'$ den Werth setzt und reducirt:

$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{d^2}{6} + \frac{h^2}{3}\right)$$

als Moment der Trägheit des gleichschenkligen Dreieckes, welches sich um eine durch C gehende, auf der Ebene ABC senkrechte Achse dreht.

Derselbe Ausdruck gilt natürlich wieder für ein senkrechtes Prisma von der Grundfläche ABC, dessen Masse $= M$ ist, wenn die Umdrehungsachse durch die Seite oder Kante C geht.

§. 166. Moment der Trägheit eines regelmäfsigen Vieleckes. Geht die Umdrehungsachse durch den Mittel- oder Schwerpunct C des regelmäfsigen Vieleckes in Fig. 144 senkrecht auf die Ebene desselben, so kann man dasselbe, wenn es n Seiten besitzt, in eben so viele gleiche gleichschenklichte Dreiecke zerlegen, für welche man das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}'$ nach dem vorigen Ausdrucke findet. Ist nämlich m die Masse eines dieser Dreiecke, also $nm = M$ jene des Polygons, so ist, wenn man den Halbmesser des umschriebenen Kreises $CA = CB = R$, und jenen des eingeschriebenen $CN = r$ setzt, nach der vorigen Formel $\mathfrak{M}' = m\left(\frac{R^2}{6} + \frac{r^2}{3}\right)$, also auch $n\mathfrak{M}' = nm\left(\frac{R^2}{6} + \frac{r^2}{3}\right)$, d. i. für das Vieleck

$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{R^2}{6} + \frac{r^2}{3}\right) \ldots (1,$$

ein Ausdruck, welcher zugleich auch für das Moment der Trägheit eines regelmäfsigen senkrechten Prisma von der Masse M gilt, welches dieses Vieleck zur Grundfläche hat, und sich um seine geometrische Achse umdreht.

§. 167. Moment der Trägheit eines Kreises oder Cylinders. Läſst man in dem vorigen Polygon die Seitenzahl ohne Ende zunehmen, so nähern sich R und r einander immer mehr, und wenn die Seitenzahl unendlich groſs wird, also das Vieleck in einen Kreis übergeht, so sind R und r als Halbmesser desselben einander vollkommen gleich. In diesem Falle hat man für das Moment der Trägheit eines Kreises oder auch eines senkrechten Cylinders von kreisförmiger Basis, welcher sich um seine geometrische Achse umdreht, wenn dessen Masse $= M$ ist:

$$\mathfrak{M} = M\left(\frac{r^2}{6} + \frac{r^2}{3}\right), \text{ d. i. } \mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} M r^2 \;\ldots\; (1.$$

§. 168. Moment der Trägheit eines Kreisbandes oder hohlen Cylinders. Sind R und r der äuſsere und innere Halbmesser eines Kreisbandes von gleicher Breite oder auch hohlen Cylinders von gleicher Dicke, so sey M' die Masse des vollen äuſsern und m' jene des vollen innern Kreises oder Cylinders, so ist die Masse des Ringes oder hohlen Cylinders $M = M' - m' = \pi(R^2 - r^2)$, oder $\pi l (R^2 - r^2)$ (wenn l die Höhe des senkrechten Cylinders und die Masse dem Inhalte proportional ist). Das Moment der Trägheit des ganzen äuſsern Cylinders ist $\mathfrak{M}' = \frac{1}{2} M' R^2$, und jenes des innern als voll gedacht, $\mathfrak{M}'' = \frac{1}{2} m' r^2$, mithin das Moment für den hohlen Cylinder $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' - \mathfrak{M}'' = \frac{1}{2}(M' R^2 - m' r^2)$, oder wegen

$$M' = R^2 \pi l \text{ und } m' = r^2 \pi l, \text{ auch}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2}\pi l (R^4 - r^4) = \tfrac{1}{2}\pi l (R^2 - r^2)(R^2 + r^2), \text{ oder endlich}$$

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} M (R^2 + r^2) \;\ldots\; (2.$$

§. 169. Moment der Trägheit einiger anderer Körper. Man findet für ein Kugelsegment, welches sich um seine geometrische Achse dreht, wenn r der Halbmesser der Kugel, a die Höhe des Segmentes und m die Masse der kubischen Einheit ist:

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi}{30} a^3 m (20 r^2 - 15 a r + 3 a^2) \; (1.$$

Für die Kugel, welche sich um einen Durchmesser dreht, ist $a = 2r$, folglich $\mathfrak{M} = \frac{8}{15} r^5 \pi m = \frac{2}{5} M r^2$ (2, wenn M die Masse der Kugel bezeichnet. (Ihr Inhalt ist $\frac{4}{3} r^3 \pi$, daher $M = \frac{4}{3} r^3 \pi m$.)

Für eine Pendellinse, welche aus zwei gleichen Kugelsegmenten besteht, die mit ihren Grundflächen deckend auf einander liegen, und sich um eine Achse dreht, die mit ihrer geometrischen parallel ist und davon den Abstand l hat, ist, wenn r, a und m die vorige Bedeutung haben:

$$\mathfrak{M} = \frac{\pi}{15} a^3 m (20 r^2 - 15 a r + 3 a^2) + \tfrac{2}{3} \pi a^2 l^2 m (3 r - a) \quad (3.$$

Für einen Cylinder, welcher sich um eine Achse dreht, die durch den Schwerpunct desselben auf der geometrischen Achse senkrecht steht, dessen Halbmesser $= r$, Länge $= l$ und Masse $= M$ ist, findet man

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} M (3 r^2 + l^2).$$

Folglich auch für eine mit dieser im Abstande d parallele Achse, wie diefs bei einer cylinderischen Pendelstange vorkommt (§. 161)

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{12} M (3 r^2 + l^2) + M d^2.$$

Für das Trägheitsmoment eines Schwungrades (Fig. 145) mit 6 Radarmen findet man, wenn der äufsere Halbmesser R, der innere r, folglich die Radkranzbreite $b = R - r$, ferner die Breite eines der parallelopipedischen Radarme $mn = b'$, und die Länge derselben bis zum Mittelpuncte gemessen $Ca = r$, die Masse des Radkranzes $= M$, und jene eines Armes $= m$ ist, sofort für den Radkranz (§. 168, Gleich. 2) $\mathfrak{M}' = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2)$, und für die 6 Radarme, deren Länge man hier ohne Fehler bis zum Mittelpuncte rechnen, und dafür die Nabe pq auslassen kann (§. 163, Gl. 3) $\mathfrak{M}'' = 6 m (\frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{12} b'^2)$, wobei man jedoch ohne Nachtheil $\frac{1}{12} b'^2$ auslassen, und sonach $\mathfrak{M}'' = 2 m r^2$ setzen kann. Nun ist das gesuchte Trägheitsmoment $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''$, folglich, wenn man substituirt:

$$\mathfrak{M} = \tfrac{1}{2} M (R^2 + r^2) + 2 m r^2 \ . \ . \ . \ (6.$$

Anmerkung. Dreht sich irgend ein prismatischer Körper AB (Fig. 146) um eine durch C gehende, auf der verlängerten Grundfläche AB senkrechte Achse, und ist $CO = a$ der Abstand des Schwerpunctes O von der Drehachse, und $ON = f$ jener des Punctes N von O, in welchem man sich in Bezug auf das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}$ des Körpers gegen die Achse C die Masse M des Prisma vereinigt denken kann; so ist dieses Moment in Beziehung auf eine durch O gehende, mit der vorigen parallelen Achse $\mathfrak{M}' = M f^2$, und in Beziehung auf die durch C gehende Achse $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' + M a^2$, also, wenn man für $\mathfrak{M}'$ den Werth setzt:

$$\mathfrak{M} = M (a^2 + f^2).$$

Sind nun, wie es bei Maschinen oft vorkommt, die Dimensionen des Prisma gegen CO klein, so fällt NO oder f so klein aus, dafs man ohne Fehler f^2 gegen a^2 vernachläfsigen kann, und dann ist ganz einfach $\mathfrak{M} = M a^2$ so, als ob die Masse des Körpers in seinem Schwerpuncte vereinigt wäre.

Beispiele.

1. Schwingt z. B. wie bei den deutschen Walkmühlen ein Hammer bd (Fig. 146, a) an einem langen Stiel um eine durch C auf die verlängerte

Ebene $b\,d$ senkrechte Achse, und ist $CO = l$, $mn = a$ und $bc = b$; so ist genau: $\mathfrak{M} = M(l^2 + \frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{12}b^2)$, da man aber immer $\frac{1}{12}a^2$ gegen l^2, und öfter auch noch $\frac{1}{12}b^2$ auslassen kann, so ist in diesen Fällen $\mathfrak{M} = M(l^2 + \frac{1}{12}b^2)$ oder $\mathfrak{M} = Ml^2$.

2. Ist beim obigen Schwungrad $R = 10$, $r = 9{\cdot}5$, $b' = \frac{1}{3}$ Fufs, ferner $M = 12000$ und $m = 250$ Pfund; so findet man nach der Formel (6 $\mathfrak{M} = 1186625$ Pfund, d. h. eine in der Peripherie eines Kreises von 1 Fufs Halbmesser vertheilte Masse von dieser Gröfse, würde der drehenden Bewegung eben so, wie dieses Schwungrad widerstehen.

3. Von zwei concentrisch mit einander verbundenen kreisrunden Scheiben (Fig. 147) ist der Halbmesser der gröfsern $CA = 3$, und der kleinern $CB = 2$ (die Benennung, ob Fufs oder Zoll, ist gleichgiltig), an ihren Umfängen hängen an feinen Fäden nach entgegengesetzten Richtungen die Gewichtchen von $p = 6$ und $q = 10$ Loth; da nun das statische Moment des letzteren Gewichtes gröfser als jenes von p ist, so wird die zusammengesetzte Scheibe so umgedreht, dafs q herabsinkt und p steigt; wie grofs ist die Beschleunigung G dieses Gewichtes q, wenn die Masse der gröfsern Scheibe 26, und jene der kleinern 8 Loth beträgt?

Reducirt man das Gewicht p nach statischen Gesetzen auf den Punct B, so wirkt es dort (wegen $3 \,.\, 6 = 2x$) mit $x = 9$ Loth, so, dafs also die Überwucht von q 1 Loth beträgt.

Reducirt man ferner die Massen nach dem Momente der Trägheit sämmtlich auf den Angriffspunct B der Kraft von 1 Loth, so ist zuerst die reducirte Masse von p (wegen $6 \,.\, 3^2 = x \,.\, 2^2$) $x = \frac{54}{4} = 13{\cdot}5$; ferner die Masse der kleinen Scheibe, deren Trägheitsmoment (§. 167, 1) $= \frac{1}{2} \,.\, 8 \,.\, 4 = 16$ ist, sofort (§. 159, Gl. 3) $y = \dfrac{16}{2^2} = 4$, und endlich die reducirte Masse der gröfsern Scheibe $z = \dfrac{1}{2} \,.\, \dfrac{26 \,.\, 9}{4} = 29{\cdot}25$, mithin die gesammte auf den Punct B reducirte träge Masse

$$M = x + y + z = q = 56{\cdot}75 \text{ Loth}.$$

Setzt man daher in der Formel (§. 146, Gl. 2) $G = \dfrac{F}{M}\, g$, $F = 1$, $M = 56{\cdot}75$ und $g = 31$ Fufs, so erhält man für die gesuchte Beschleunigung des Gewichtchens q: $G = \dfrac{31}{56{\cdot}75}$ Fufs, oder nahe $6{\cdot}56$ Zoll, also sinkt das Gewicht q in der ersten Secunde um $3{\cdot}28$ Zoll, während jenes p um $\frac{3}{2} \times 3{\cdot}28 = 4{\cdot}92$ Zoll steigt, und am Ende dieser Secunde die Geschwindigkeit $= 9{\cdot}84$ Zoll annimmt.

Hätte man sowohl die bewegende Kraft, als auch die Massen, auf den Punct A reducirt, so würde man nahe $F = {\cdot}667$, $M = 25{\cdot}22$, folglich für die Beschleunigung des aufwärts steigenden Gewichtes p den Werth $G = \dfrac{{\cdot}667}{25{\cdot}22}\, 31 = \dfrac{31}{37{\cdot}81}$ Fufs, oder wieder $9{\cdot}84$ Zoll gefunden haben, was genau mit dem vorigen Werth übereinstimmt; hieraus folgt, dafs es ganz gleichgiltig ist, auf welchen Punct des beweglichen Systems man die Kräfte und Massen reducirt. Zugleich zeigt sich dabei der Unterschied zwischen einem Gewichte und der Masse desselben sehr deutlich; so wirkt im gegenwärtigen Beispiel das in A befindliche Gewicht $p = 6$ Loth, auf den Punct B reducirt, als Gewicht mit 9 Loth, dagegen als blofs träge Masse mit $13\frac{1}{2}$ Loth; man mufs sich also wohl hüthen, in solchen Fällen Gewichte und Massen mit einander zu verwechseln.

4. Bei dem einfachen Rollenzuge in Fig. 74 sey an der beweglichen Rolle B, welche mit der festen Rolle A das gleiche Gewicht von 1 Pfund hat, noch eine Last von 3 Pfund, und an dem Ende D der Schnur AD ein eben so grofses Gewicht p aufgehangen; es soll die Beschleunigung des herabsinkenden Gewichtes p gefunden werden, wenn die Reibung und der Widerstand wegen der unvollkommenen Biegsamkeit der Schnur vernachläfsigt wird.

Hier ist es bequemer anstatt der Abstände die Geschwindigkeiten in Rechnung zu bringen. Hat also das Gewicht p in irgend einem Zeitmomente die Geschwindigkeit v, so ist (§. 159, Gl. 4) $pv^2 = 3v^2$ das Trägheitsmoment der Masse p; da ferner ein Punct A des Rollenumfanges ebenfalls die Geschwindigkeit v in diesem Momente hat, so ist das Moment der Trägheit (anstatt $\frac{1}{2}Mr^2$, jetzt $\frac{1}{2}Mv^2$) $= \frac{1}{2}.1.v = \frac{1}{2}v^2$; dasselbe gilt auch für die bewegliche Rolle B, in so ferne sie sich um ihre Achse dreht; endlich bewegt sich die Last sammt der Rolle B, d. i. $Q = 4$ Pf. mit der Geschwindigkeit $\frac{1}{2}v$ in diesem Augenblicke aufwärts, also ist das Trägheitsmoment dieser beiden Massen $(\frac{1}{2}v)^2(3+1) = v^2$. Werden nun alle diese Massen auf die Geschwindigkeit v (also wenn man will auf den Punct A) reducirt, so ist die reducirte Masse

$$M = \frac{3v^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v^2 + v^2}{v^2} = 5 \text{ Pfund.}$$

Die auf denselben Punct A reducirte bewegende Kraft ist

$$F = p - \tfrac{1}{2}(Q+1) = 3 - 2 = 1 \text{ Pf.};$$

folglich die gesuchte Beschleunigung

$$G = \tfrac{1}{5}.31 = 6{\cdot}2 \text{ Fufs.}$$

Wäre zur Überwältigung der Reibung und Steifheit der Schnur in D eine Kraft von z. B. $\frac{1}{4}$ Pf. nöthig, so wäre $F = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ Pf., und daher nur $G = \frac{3}{20}.31 = 4{\cdot}65$ Fufs.

§. 170. Bestimmung des Mittelpunctes des Schwunges. Wir können jetzt auch den in §. 153 erwähnten Mittelpunct des Schwunges durch Rechnung bestimmen. Ist nämlich (Fig. 130) C der Aufhänge- und O der Schwerpunct eines zusammengesetzten Pendels von der Masse M, und haben die Massenelemente m, m'... desselben von C die Abstände r, r'...; so ist, wenn $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des Pendels in Beziehung auf die durch C gehende

Dreh- oder Schwingungsachse bezeichnet, die auf den Schwerpunct O reducirte Masse des Pendels (§. 159, Gl. 3) $M' = \frac{\mathfrak{M}}{d^2}$, wenn man nämlich den Abstand $CO = d$ setzt. Das nach statischen Gesetzen auf denselben Punct O reducirte Gewicht des Pendels ist zugleich jenes der Masse M, folglich schwingt das Pendel so wie ein einfaches Pendel CO von der Länge d, dessen in O befindliche Masse M' jedoch nicht durch die Schwere, d. h. nicht durch die Kraft M', sondern durch jene M bewegt wird; dadurch entsteht aber nicht die Beschleunigung g, sondern (§. 146) jene $G = \frac{M}{M'} g$, welchen Werth man in die Formel 1, §. 151 für die Schwingungszeit des einfachen Pendels statt g setzen mufs, wodurch man für die Schwingungszeit dieses zusammengesetzten Pendels $T = \pi \sqrt{\left(\frac{dM'}{gM}\right)} \ldots$ (n erhält. Ist nun F der Schwingungsmittelpunct, so mufs ein einfaches Pendel von der Länge $CF = l$ eben so schwingen, daher mufs auch $T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, also $\pi \sqrt{\frac{dM'}{gM}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ seyn, aus welcher Gleichung sofort $l = \frac{dM'}{M} = \frac{\mathfrak{M}}{Md}$ folgt, wenn man nämlich für M' den obigen Werth setzt; die Entfernung des Mittelpunctes des Schwunges von der Drehungsachse wird also gefunden, wenn man das Moment der Trägheit des Pendels auf die Schwingungsachse bezogen, durch das statische Moment des im Schwerpuncte vereinigt gedachten Gewichtes auf dieselbe Achse bezogen, dividirt.

Hieraus folgt, dafs auch ein kurzes physisches Pendel langsame Schwingungen macht, wenn man es nahe am Schwerpuncte aufhängt, weil dann im obigen Bruche von l der Nenner Md klein, also l grofs wird, und der Mittelpunct des Schwunges über das Pendel hinausfällt.

Beispiele.

1. Schwingt eine materielle gerade Linie AB (Fig. 132) von der Länge L, deren Masse M also $= L$ gesetzt werden kann, um ihren Endpunct A, so ist dafür (§. 162) $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M L^2$, und das statische Moment des im Schwerpuncte vereinten Gewichtes M gleich $\frac{1}{2} L M$, folglich, wenn F der Mittelpunct des Schwunges ist: $l = AF = \frac{\frac{1}{3} M L^2}{\frac{1}{2} M L} = \frac{2}{3} L$; d. h. ein einfaches Pendel von der Länge $\frac{2}{3} L$ schwingt genau so, wie diese ganze materielle Linie AB.

Der Mittelpunct des Schwunges (von manchen Schriftstellern auch

Schwingungspunct genannt, was aber zu Verwechslungen mit jenem in §. 162 bestimmten Puncte R der Geraden AB führt), wird hier auch gefunden, wenn man das Quadrat des Abstandes des Mittelpunctes der Trägheit, d. i. (§. 164, Gl. m) $\frac{1}{3}L^2$ durch den Abstand des Schwerpunctes von der Drehungsachse, d. i. $\frac{1}{2}L$ dividirt.

2. Schwingt eine an einem feinen Faden hängende Kugel vom Halbmesser r und der Masse M um einen von ihrem Mittelpuncte O um d abstehenden Punct oder Achse C, und ist F der in der Verlängerung des Fadens liegende Mittelpunct des Schwunges; so ist das Moment der Trägheit der Kugel (§. 169, Gl. 2 und §. 161) $\mathfrak{M} = \frac{2}{5}Mr^2 + Md^2$, und ihr stat. Moment $= Md$, folglich $l = CF = \frac{2}{5}\frac{r^2}{d} + d$, oder der Abstand des Schwingungsmittelpunctes F vom Mittelpuncte der Kugel O:

$$OF = l - d = \frac{2}{5}\frac{r^2}{d}.$$

Ist nun z. B. $r = \frac{1}{2}$ und $d = 36$ Zoll, so ist $OF = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{144} = \frac{1}{360}$ Zoll, oder $\frac{1}{30}$ Linie, woraus sofort folgt, daſs man bei diesen Dimensionen $l = d$ setzen, oder den Mittelpunct der Kugel ohne Fehler für den Mittelpunct des Schwunges dieses Pendels, dasselbe also als ein einfaches von der Länge $CO = d$ annehmen kann.

Anmerkung 1. Die bisherigen Entwicklungen können benützt werden, um das Moment der Trägheit eines Körpers, er mag dabei regelmäſsig oder unregelmäſsig seyn, practisch zu bestimmen. Läſst man nämlich den betreffenden Körper (Fig. 130) um eine, durch einen beliebigen Punct C, gehende Achse, welche von dem Schwerpuncte O des Körpers (welcher nach Kapitel III gefunden werden kann) den Abstand d haben mag, schwingen, und beobachtet dabei die Schwingungszeit T; bezeichnet ferner Q das Gewicht des Körpers und M seine auf den Schwerpunct O reducirte träge Masse; so ist (wie in §. 170, Gl. n)

$$T = \pi\sqrt{\left(\frac{dM}{gQ}\right)}, \text{ und daraus } M = \frac{gQT^2}{d\pi^2} \; . \; . \; . \; (1.$$

Bezeichnet man nun das gesuchte Trägheitsmoment in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct O gehende, mit der Schwingungsachse parallele Achse mit $\mathfrak{M}$, und jenes auf die Schwingungsachse bezogen, mit $\mathfrak{M}'$; so ist (§. 161) $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Qd^2$, und zugleich auch $\mathfrak{M}' = Md^2$, folglich $\mathfrak{M} + Qd^2 = Md^2$, und daraus $\mathfrak{M} = (M - Q)d^2 \; . \; . \; . \; (2,$ wobei M durch die Gleichung (1 gegeben ist.

Anmerkung 2. Bezeichnet man bei dem zusammengesetzten Pendel in Fig. 130 die Masse desselben durch M, das Moment der Trägheit in Beziehung auf die Umdrehungs- oder Schwingungsachse C mit $\mathfrak{M}'$, dagegen in Beziehung auf eine durch den Schwerpunct O und den Schwingungsmittelpunct F gehende, der vorigen parallelen Achse beziehungsweise mit $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}''$, setzt ferner $CO = d$, $CF = l$, also $FO = l - d$; so ist zuerst (§. 161) $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} + Md^2$ und $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M} + M(l - d)^2$, und dann nach der vorigen Regel für die Bestimmung des Schwingungsmittel-

punctes, wenn man das Pendel um die Achse C schwingen läfst
$l = \frac{\mathfrak{M}'}{M\,l} = \frac{\mathfrak{M}}{M\,d} + d \;.\;.\;.$ (n (wenn man für $\mathfrak{M}'$ seinen Werth setzt),
woraus $l - d = \frac{\mathfrak{M}}{M\,d}$ folgt; ferner, wenn man das Pendel um die durch den Schwingungsmittelpunct F gehende Achse schwingen läfst, und den Abstand des Mittelpunctes des Schwunges dafür von F gleich l' setzt;
$l' = \frac{\mathfrak{M}''}{M\,(l-d)} = \frac{\mathfrak{M}}{M\,(l-d)} + l - d$, oder, wenn man für $l - d$ den vorhin gefundenen Werth setzt, auch $l' = d + \frac{\mathfrak{M}}{M\,d}$, so, dafs also (Gl. n) $l' = l$ (d. h. der vorige Aufhängpunct C zum Mittelpuncte des Schwunges wird, wodurch sofort die in §. 153 (Anmerk.) erwähnte Eigenschaft des Reversionspendels erwiesen ist.

Fünftes Kapitel.

Von der Wirkung oder Leistung der Kräfte.

§. 171. Leistung oder Arbeit einer Kraft.

Wir haben bisher die Kräfte in ihrem gegenseitigen Verhalten, sowohl im Zustande des Gleichgewichtes als der Bewegung behandelt, allein da es sich in der industriellen Mechanik um eine wirkliche Leistung, um irgend eine Arbeit oder einen Nutzeffect derselben handelt, so müssen wir dieselbe auch noch von diesem Gesichtspuncte aus betrachten.

So wie man in der Statik die Kräfte durch bloſse Pressungen, z. B. in Pfunden, und in der Dynamik durch ihre, allenfalls in Fuſsen ausgedrückten zurückgelegten Wege darstellt; so verbindet man hier beide Methoden, um den Effect oder die Wirkung der Kräfte, in so ferne sie Bewegung erzeugen, auszudrücken. Die Arbeit oder Leistung einer Kraft wird immer mehr oder weniger in der Überwindung gewisser Hindernisse bestehen, wie z. B. beim Heben einer Last in der Schwere, beim Zermahlen des Getreides in der Cohäsionskraft desselben, beim Fortziehen eines Fuhrwerkes in der Reibung u. s. w. In allen diesen Fällen bringt aber eine Kraft, welche bloſs mit dem Hindernifs im Gleichgewichte steht, noch durchaus keine Wirkung oder Arbeit hervor, sondern dieser Widerstand oder dieses Hindernifs muſs auch durch einen gewissen Weg bewegt oder fortgeschafft, d. h. es muſs das während der Bewegung des Punctes, auf welchen der Widerstand wirkt, sich fortwährend wiederholende Hindernifs, von der bewegenden Kraft überwunden werden. So mufs beim Heben einer Last von z. B. 100 Pfund auf die Höhe von 10 Fufs, die Kraft von 100 Pfund zugleich bei derselben Kraftäufserung einen Weg von 10 Fufs zurücklegen, oder diesen Widerstand von 100 Pfund durch den ganzen Weg von 10 Fufs überwinden. Man sieht leicht ein, dafs die Leistung oder Arbeit einer Kraft um so gröfser ist, je gröfser der überwundene Widerstand oder die Last, und je gröfser der Weg ist, durch welchen dieselbe bewegt wird.

Unter der Wirkung, Leistung oder Arbeit einer Kraft, während einer bestimmten Zeit, versteht man sonach alle, die längs des in dieser Zeit von dem Angriffspuncte der Kraft zurückgelegten Weges überwundenen Widerstände; dabei wird die Kraft oder der ihr gleiche Widerstand, welchen sie überwindet, in Pfunden, der dabei zurückgelegte Weg in Fufsen, und die Zeit entweder in Secunden oder in Minuten, öfter auch in Stunden ausgedrückt. Zur Einheit der Wirkung oder Leistung einer Kraft nehmen wir durchaus den Widerstand von 1 Pfund, welcher auf die Länge oder den Weg von 1 Fufs während einer Secunde überwunden wird, und nennen diese Einheit ein Fufspfund, welches wir kurz durch das Darübersetzen von F. Pf. über die betreffende Zahl bezeichnen werden.

Anmerkung. Wirkt eine Kraft K (Fig. 148) in Beziehung auf den Weg AB, welchen ihr Angriffspunct A zurücklegt, schief, so kommt natürlich nur die aus $AD = K$ abgeleitete Seitenkraft $AC = k$ dabei in Rechnung, und ihre Leistung ist das Product aus dieser Kraft k in den nach der Richtung AB zurückgelegten Weg.

§. 172. Ausdruck für die Wirkung oder Leistung einer constanten Kraft. Ist die Kraft, also auch der Widerstand, welchen sie überwindet, constant, so ist ihre Leistung dem zurückgelegten Wege proportional, weil z. B. bei einem doppelten Wege dieser Widerstand oder dieses Hindernifs zwei Mal überwunden oder zerstört wird. Wird von der andern Seite auf dem nämlichen Weg ein 2, 3 . . n Mal so grofser Widerstand überwunden, so ist es eben so, als ob der einfache Widerstand 2, 3 . . n Mal überwunden worden, und die Leistung ist in diesem Falle dem Widerstande, folglich, wenn beides veränderlich ist, dem Producte aus dem Widerstande in den zurückgelegten Weg proportional. Ist K die in Pfunden ausgedrückte constante Kraft, welche einen ihr gleichen Widerstand überwindet, und S der in einer Secunde dabei zurückgelegte Weg ihres Angriffspunctes nach ihrer Richtung gemessen, in Fufsen ausgedrückt; so ist ihre Wirkung oder

Leistung während einer Secunde $W = KS^{\text{F. Pf.}}$, wobei man sich das Product KS in zwei beliebige Factoren aufgelöst denken kann.

Ist S der von der Kraft K während der Zeit t zurückgelegte Weg, so bezeichnet der Ausdruck $W = KS \ldots (m$ überhaupt die Leistung oder Arbeit dieser constanten Kraft K während der Zeit t.

So ist z. B. die Arbeit oder Leistung, um 10 Pfund Widerstand auf 2 Fufs Länge binnen einer Secunde zu überwinden, jener ganz gleich, welche 2 Pf. Widerstand auf 10 Fufs oder 1 Pf. auf die Länge von 20 Fufs u. s. w. überwindet; denn in allen diesen Fällen ist der Widerstand von 1 Pfund auf die Länge von 1 Fufs in einer Secunde 20 Mal zu überwinden, und sofort $W = 20^{\text{F. Pf.}}$

Die Leistung oder Arbeit eines Menschen, welcher in einer bestimmten Zeit einen Metzen Getreide zwei Stockwerke hoch, oder 2 Metzen ein Stockwerk hoch trägt, ist doppelt so grofs, als wenn er nur 1 Metzen ein Stockwerk hoch trägt, wobei die beiden ersten Leistungen offenbar einander gleich sind. Wiegt 1 Metzen Getreide 80 Pfund, und ist jedes Stockwerk 12 Fufs hoch, so ist die Leistung oder Arbeit im ersten Falle $W = 80 . 24 = 1920^{\text{F. Pf.}}$, im zweiten eben so $W = 160 . 12 = 1920^{\text{F. Pf.}}$, dagegen im dritten Falle $W = 80 . 12 = 960^{\text{F. Pf.}}$, also nur halb so grofs.

Eine ähnliche Argumentation ist bei allen industriellen Leistungen anwendbar.

§. 173. Wirkung einer veränderlichen Kraft; mittlere Anstrengung. Ist eine Kraft veränderlich, so theilt man den zurückgelegten Weg ihres Angriffspunctes in so viele kleine Theile, dafs man ohne Fehler die Kraft oder den Widerstand während jedes einzelnen Intervalles als constant ansehen kann; die Summe aus den Producten der einzelnen Gröfsen der Kraft in die zugehörigen kleinen Wege gibt dann die Gesammtwirkung oder Leistung der variablen Kraft.

So wie man die Leistung einer constanten Kraft durch das Product KS, oder geometrisch durch die Fläche eines Rechteckes darstellen kann, dessen Grundlinie $= S$ und Höhe $= K$ ist; so kann man die Leistung einer veränderlichen Kraft, wenn das Gesetz ihrer Veränderlichkeit bekannt ist, wenigstens näherungsweise durch die Fläche $ABCD$ (Fig. 149) darstellen, wenn man die Gerade $AB = S$ nimmt, diese in viele gleiche Theile theilt, und in den Theilungspuncten $A, a, b \ldots B$ auf AB Perpendikel errichtet, darauf die Gröfsen der Widerstände aufträgt, und die sich ergebenden Puncte $C, a', b' .. D$ durch eine Linie verbindet, welche im Allgemeinen eine krumme seyn wird. Nimmt man an, dafs die Kräfte $k, k' \ldots$ für die Wege $s = Aa$, $s' = ab \ldots$ constant sind, so gibt die Summe der Rechtecke $k . s = Aa'$, $k' . s' = ab' \ldots$ die gesammte Leistung der Kraft $K = k + k' + \ldots$ auf den Weg $AB = s + s' + \ldots$

Je kleiner man nun diese Wege nimmt, desto mehr nähert sich die Summe aus diesen Rechtecken der Fläche $ACBD$, welche von der Curve CD begrenzt wird.

Theilt man die Linie $AB = S$ (Fig. 150) in eine gerade Anzahl gleicher Theile, bezeichnet die beiden äufsern Ordinaten oder Perpendikel mit a, b, die den ungeraden Theilungspuncten entsprechenden mit p_1, p_3 . . . und die den geraden entsprechenden mit p_2, p_4 . . .; so ist, wenn die Anzahl der Theile $= n$ ist, die Fläche AD, also die Leistung der Kraft näherungsweise:

$$F = W = \tfrac{1}{3}[a + b + 2(p_1 + p_3 + ..) + 4(p_2 + p_4 + ..)]\,\frac{S}{n}.$$

Hat z. B. eine Kraft die Werthe 20, 22, 23, 26, 27, 28, 30 und ist der jedem dieser Werthe entsprechende Weg (die Intervalle $A\,1$, 12...) $= 2$ Zoll oder $\frac{1}{6}$ Fufs; so ist $a = 20$, $b = 30$, $p_1 = 23$, $p_3 = 27$, $p_2 = 22$,

$$p_4 = 26,\ p_6 = 28,\ S = 6 \,.\, \tfrac{1}{6} = 1 \text{ und } n = 6,$$

folglich $W = \frac{1}{3}(50 + 2.50 + 4.76)\frac{1}{6} = \frac{454}{18} = 25{\cdot}2^{\text{F. Pf.}}$

Nach einer ähnlichen Näherungsformel $F = \frac{S}{n}\left(\frac{a+b}{2} + p_1 + p_2 + p_3 + ..\right)$ wäre $W = 25{\cdot}1^{\text{F. Pf.}}$

Dieselbe Leistung würde aber auch durch eine constante Kraft von $\frac{25{\cdot}2^{\text{F. Pf.}}}{1^{\text{F.}}} = 25{\cdot}2^{\text{Pf.}}$ hervorgebracht werden; man nennt sie defshalb die mittlere Kraft oder Anstrengung für dieses Beispiel.

§. 174. Leistungen der Kräfte bei Maschinen. Wir haben bei allen im fünften Kapitel des ersten Abschnittes behandelten, sowohl einfachen als zusammengesetzten Maschinen darauf aufmerksam gemacht (und es gilt dieses als ein Grundgesetz der ganzen Mechanik und Maschinenlehre), dafs wohl im Gleichgewichtszustande die Kraft gegen die Last bedeutend kleiner oder im Vortheile seyn kann, dafs aber, sobald es sich um Bewegung handelt, an dem Weg oder an der Zeit genau so viel verloren geht, als an Kraft gewonnen wird. So kann z. B. am Hebel ein Mensch sehr wohl eine Last heben, die unmittelbar, ohne diese einfache Maschine, nur zehn Menschen heben könnten; allein er wird auch dazu, um diese auf eine bestimmte Höhe zu bewegen, 10 Mal so viel Zeit brauchen, oder in derselben Zeit die Last nur auf den zehnten Theil jener Höhe heben, auf welche die zehn Menschen diese Last unmittelbar bringen, und so ist also seine Leistung um nichts gröfser als die eines einzelnen Menschen ohne Hebel. Der Vortheil dieser Maschine liegt nur darin, dafs er überhaupt damit im Stande ist die Last zu bewegen, was er sonst, ohne Theilung derselben, nicht bewirken könnte.

Auf dieselbe Art zeigt es sich bei allen Maschinen, und es ist dieses ein höchst wichtiges und wohl zu beherzigendes Grundgesetz der ganzen Mechanik, dafs der Angriffspunct der Kraft in derselben Zeit einen 2, 3... n Mal gröfsern Weg als die Last zurücklegen mufs, wenn die Kraft eine Last übrwinden soll, die 2, 3... n Mal gröfser als diese Kraft ist. Ist also die an einer wie immer gearteten und zusammengesetzten Maschine wirkende Kraft K n Mal kleiner als die Last oder der Widerstand Q, welcher damit überwunden wird, so ist auch der gleichzeitig von der Last zurückgelegte Weg s n Mal kleiner als der Weg S der Kraft, d. i. für $K = \frac{1}{n} Q$ ist auch $s = \frac{1}{n} S$, und wenn man die Leistung oder Wirkung der Kraft $= W$ und die verrichtete Arbeit $= W'$ (oder die Leistung einer die Last ohne Maschine unmittelbar gewältigenden Kraft) bestimmt, so ist

$$W = KS = \frac{1}{n} QS \quad \text{und} \quad W' = Qs = Q.\frac{1}{n} S, \quad \text{also} \quad W' = W.$$

Bei diesen Betrachtungen ist jedoch auf jene Hindernisse und Widerstände, welche in der Maschine selbst liegen, noch keine Rücksicht genommen, und es bleibt, weit gefehlt, dafs die Leistung gröfser werden könnte, wie so oft geglaubt wird, durch Anwendung, selbst der einfachsten Maschinen, die wirkliche Nutzleistung noch hinter der Arbeit der Kraft zurück.

§. 175. Gröfse der Wirkung oder Leistung beim Heben einer Last nach verticaler Richtung. Die einfachste Arbeit, welche man betrachten kann, besteht in dem verticalen Heben einer Last, weil der zurückgelegte Weg in die Richtung der Kraft fällt. Ist Q die zu hebende Last und h die Höhe, auf welche sie gehoben wird, so kann die Leistung oder Arbeit durch das Product Qh ausgedrückt werden. Wegen der Einfachheit dieses Ausdruckes wählt man denselben zur Vergleichung aller, selbst der verschiedenartigsten Leistungen der Kräfte, und führt jede auf das Heben einer Last auf eine gewisse Höhe in einer bestimmten Zeit zurück.

Kommt z. B. die Leistung eines Wasserrades bei einer Mahlmühle mit jener, welche durch das Heben von 100 Pfund auf die Höhe von 10 Fufs in einer Secunde, dagegen die Leistung einer Dampfmaschine in einer Spinnfabrik mit jener überein, welche erfordert wird, um 1000 Pf. auf 20 Fufs in einer Secunde zu heben; so verhalten sich diese beide Wirkungen oder Leistungen wie die Zahlen 1000 zu 20000 oder wie 1 : 20.

§. 176. Motoren. Sowohl die Menschen und Thiere, wenn sie durch ihre Muskelkraft wirken, als auch gewisse mechanische Vorrichtungen, wie Wasserräder, Dampfmaschinen, Windflügel u. s. w., welche durch natürliche Kräfte, wie Wasser, Dampf, Luft u. s. w. in Bewegung gesetzt, diese Kräfte gleichsam in sich aufnehmen und auf andere Maschinen oder Werkzeuge, womit was immer für industrielle oder mechanische Arbeiten verrichtet werden, übertragen, heifsen Motoren. Diese kann man, sie mögen durch was immer für Kräfte in Bewegung gesetzt werden, als die unmittelbaren bewegenden Kräfte ansehen, welche irgend eine Arbeit oder Leistung verrichten, die sich nach der im vorigen Paragraphe angegebenen Weise bestimmen oder ausdrücken lassen.

Wirkt z. B. das Wasser auf ein Wasserrad und hebt dieses mittelst eines Seils, welches um seine Welle aufgewickelt wird, ein Gewicht von 500 Pfund in einer Secunde auf die Höhe von 8 Fufs, so ist die Leistung, Wirkung oder Arbeit dieses Wasserrades oder Motors $W = 4000^{\text{F. Pf.}}$ gerade so, als ob dieses Rad die bewegende oder dynamische Kraft selbst wäre.

§. 177. Nutzeffect. Man darf die Arbeit eines Motors mit der wirklichen Leistung oder Arbeit, die man eigentlich beabsichtigt und die bei Anwendung von Maschinen immer kleiner als die des Motors ausfällt, keinesweges verwechseln. Wird z. B. eine Aufzugmaschine durch das vorhin beispielsweise erwähnte Wasserrad in Bewegung gesetzt, und fördert diese jede Secunde eine Last von 1000 Pfund auf eine Höhe von 3 Fufs, so ist die verrichtete Arbeit, oder der sogenannte Nutzeffect $E = 3000^{\text{F. Pf.}}$, mithin, da die Arbeit des Motors nach obiger Annahme $W = 4000^{\text{F. Pf.}}$ ist, im Verhältnifs von $4:3$ oder um 25 Procent kleiner als die Arbeit des Motors, und diese 25 Procent werden rein nur von den Nebenhindernissen der Aufzugmaschine (wenn nämlich die gemachte Voraussetzung richtig ist) absorbirt und gehen für den eigentlichen Zweck verloren. Ja man kann sich sogar eine Maschine denken, deren Nutzeffect Null ist, wenn die Arbeit des Motors allein schon zu ihrer eigenen Bewegung im leeren oder unbelasteten Zustande ganz in Anspruch genommen wird.

§. 178. Pferdekraft. Seit Watt, dem berühmten Verbesserer oder so zu sagen Erfinder der Dampfmaschine, wendet man zur Vergleichung der Leistungen der Motoren oder auch zur Bestimmung ihrer Gröfse für gewisse gegebene Leistungen, die Pferdekraft (öfter auch Kraft des Maschinen- oder idealen Pferdes genannt) an und versteht jetzt ziemlich allgemein darunter die Leistung oder Arbeit, welche in dem Heben einer Last von 33000 englischen Pfunden auf die Höhe von einem englischen Fufs binnen einer Minute besteht, welches mit dem Heben von 75 Kilogramme auf einen Meter in einer Secunde, oder in einer Last von 430 Wien. Pfund auf einen W. Fufs binnen einer Secunde übereinkommt, so, dafs also diese sogenannte Pferdekraft keine simple Kraft mehr, sondern eine Wirkung von $\mathfrak{K} = 430^{F.\,Pf.}$ bedeutet.

Theilt man also die Wirkung oder Leistung W irgend eines Motors durch $\mathfrak{K}$, so erhält man die Anzahl der Pferdekräfte, die derselbe besitzt; so ist für das im obigen Beispiel (§. 176) angenommene Wasserrad $\frac{4000}{430} = 9\frac{3}{10}$ die Anzahl der Pferdekräfte, die es enthält.

§. 179. Unterschied zwischen lebendigen und leblosen Motoren. Es ist bekannt, dafs Menschen und Thiere auf kurze Zeit bedeutendere Anstrengungen aushalten können, als wenn ihre Leistungen durch längere Zeit dauern sollen, weil sie dann ermüden und ihre Muskelkraft abnimmt. Es kommt also bei der Schätzung der Leistungen der Menschen und Thiere noch ein Element, nämlich die Arbeitsdauer hinzu; man versteht darunter die Anzahl der Stunden, während welcher die Muskelkraft wirklich in Anspruch genommen war, und da immer eine oder mehrere Ruhezeiten dazwischen fallen, so beträgt diese Arbeitsdauer nur einen Theil des Tages oder auch von 24 Stunden, obschon die in diesem Theile der Zeit geleistete Arbeit die tägliche Arbeit genannt wird.

Aufserdem ist es auch bekannt, dafs die Gröfse der Anstrengung, um äufsere Widerstände zu überwinden, von der Geschwindigkeit abhängt, mit welcher Menschen oder Thiere dieselben überwinden sollen, indem bei einer gröfsern Geschwindigkeit ihre Muskelkraft von der nöthigen Anstrengung, um ihren eigenen Körper fort- oder auch nur einen Theil desselben zu bewegen, schon ganz erschöpft werden kann, so, dafs also davon nichts mehr zur Überwältigung eines weitern, aufserhalb ihres Körpers liegenden Widerstandes übrig bleibt.

§. 180, Kraftformel. Obschon es sehr schwierig ist, die mechanischen Leistungen der Menschen und Thiere, da man sie in dieser Hinsicht nur als sehr veränderliche Motoren ansehen kann, welche nach der Art ihrer Verwendung nach aufsen hin bald einen gröfsern, bald einen kleinern Nutzeffect hervorbringen, im Voraus zu bestimmen, indem das Gesetz, nach welchem die Muskelkraft von der Arbeitsdauer und der Geschwindigkeit der Bewegung abhängt (wenn ja ein solches existirt) so gut wie nicht bekannt ist; so hat man gleichwohl gesucht, dafür gewisse Mittelwerthe aus der Erfahrung abzuleiten, die für die Anwendung als Anhaltspuncte dienen können. Eine mit der Wahrheit ziemlich gut übereinstimmende derartige Formel für die Kraft der Menschen und Thiere ist die Gerstner'sche, nämlich:

$$K = k\left(2 - \frac{v}{c}\right)\left(2 - \frac{z}{t}\right) \ldots (1,$$

wobei k die mittlere Kraft, c die mittlere und v die wirkliche Geschwindigkeit, t die mittlere und z die wirkliche tägliche Arbeitsdauer bezeichnet.

Um die Anwendung dieser Kraftformel zu zeigen, so sey für einen mittelstarken Menschen $k = 25$ Pfund, $c = 2\frac{1}{2}$ Fuſs und $t = 8$ Stunden (welche Werthe in der Erfahrung wirklich gegründet sind). Soll nun derselbe Mensch mit 3 Fuſs Geschwindigkeit und täglich (d. i. binnen 24 Stunden) durch 10 Stunden arbeiten; so findet man seine Kraft K, die er dabei ausüben kann, wenn man in dieser Formel noch $v = 3$ und $z = 10$ setzt: $K = 25\left(2 - \frac{3}{2\frac{1}{2}}\right)\left(2 - \frac{10}{8}\right) = 15$ Pfund, so, daſs er also unter diesen Umständen bei gleicher Ermüdung nur einen Widerstand von 15 Pf. überwinden könnte.

Sollte er sich mit 5 Fuſs Geschwindigkeit fortbewegen, so würde nach dieser Formel $K = 0$, d. h. er könnte nach auſsen hin keinen Widerstand mehr überwinden, indem bei dieser Geschwindigkeit seine Kraft durch die Fortbewegung seines eigenen Körpers erschöpft wird.

Da bei dieser mittlern Arbeitsdauer von täglichen 8 Stunden die Arbeit des Menschen in einer Secunde (öfter auch das mechanische Moment genannt) durch Kv ausgedrückt und nach dieser Kraftformel am gröſsten wird für $v = c = 2^1/_2$ Fuſs; so ist die Leistung eines mittelstarken Menschen in dieser Zeit von einer Secunde $E = 25 \times 2^1/_2 = 62^1/_2{}^{\text{F. Pf.}}$, wofür man, um noch sicherer zu gehen, die runde Zahl 60 nehmen kann, so, daſs also diese Leistung mit dem Heben eines Gewichtes von 60 Pfund auf die Höhe von einem Fuſs per Secunde, oder auch auf das Forttragen einer Last auf horizontalem Wege von 60 Pfund mit einem Fuſs Geschwindigkeit übereinkommt. Für einen schwächern Arbeiter kann man $k = 20$ Pfund und $c = 2$ Fuſs, für einen stärkern $k = 30$ Pf. und $c = 3$ F. setzen.

Für schwache, mittel- und sehr starke Pferde kann man in dieser Formel beziehungsweise $k = 80$, 100, 130 Pfund und $c = 3^1/_2$, 4 und $4^1/_2$ Fuſs, eben so für Ochsen $k = 80$, 100, 120 Pfund und $c = 2$, $2^1/_2$ und 3 Fuſs setzen.

Übrigens zeigt die im §. 183 angegebene Tafel, wenn sie auch noch hinsichtlich der Übereinstimmung der Daten vieles zu wünschen übrig läſst, wie sehr ungleich die Nutzleistungen der Menschen und Thiere ausfallen, wenn ihre Kräfte auf verschiedene Art und bei verschiedenen Geschwindigkeiten, bei und ohne Maschinen in Anspruch genommen werden.

§. 181. Kraftmesser oder Dynanometer. Zur Bestimmung der Zug- und Druckkräfte, besonders der Menschen und Thiere, bedient man sich eines, auf dem Principe der Elasticität, und zwar einer Stahlfeder beruhenden Instrumentes, welches im Wesentlichen in Fig. 151 dargestellt ist. Durch das Zusammendrücken der sehr gestreckten ovalen Stahlfeder *AB* in der Richtung *cb*, oder durch das Ausdehnen derselben nach der darauf senkrechten Richtung *AB*, wird der um *a* drehbare Winkelhebel *dac*, und zwar mittelst des in Gelenken *d* und *c* gehenden Kniestückes *dc* in Bewegung gesetzt, und dadurch der um *C* drehbare Zeiger *CD*, dessen Spitze auf eine Kreistheilung *MDN* zeigt, mehr oder weniger fortgeschoben. Ist die Eintheilung der Scala (am sichersten blofs empirisch) so gemacht worden, dafs man auf die Feder, während ihre Ebene vertical und die grofse Achse *AB* horizontal liegt und der Punct *b* unterstützt ist, im Puncte *c* nach und nach immer gröfsere Gewichte aufgelegt, und den jedesmaligen Stand des fortgeschobenen Zeigers auf dem Kreisbogen *MDN* markirt hat; so wird, wenn beim Gebrauche dieses Instrumentes die Feder durch die Muskelkraft eines Menschen so stark zusammengedrückt würde, dafs der Zeiger z. B. bis auf den mit 60 Pfund bezeichneten Theilstrich der so erhaltenen Scala geschoben wird, seine ausgeübte Kraft offenbar dem Drucke von 60 Pfund gleich seyn, und so auch in allen übrigen Fällen.

Da durch das Ausdehnen der Feder nach der Richtung *AB* eine weit gröfsere, jedenfalls aber eine von der vorigen verschiedene Kraft nöthig ist, um den Zeiger wieder eben so weit fortzuschieben, so mufs man für die Zugkräfte eine zweite Eintheilung oder Scala anbringen, welche in der Figur mit *mdn* bezeichnet ist und wieder empirisch auf eine ganz ähnliche Weise, wie die vorige gefunden wird. Gewöhnlich wird die erste Scala nach Pfunden und die letztere nur nach Centnern getheilt.

Anmerkung. Die Verbesserungen, welche wir an diesem von Regnier herrührenden Kraftmesser angebracht haben, damit er nicht blofs das Maximum der Kraftanstrengung, welche während eines Versuches vielleicht nur einen Augenblick lang Statt gefunden und dabei gar keinen Werth hat, folglich nur zu falschen Resultaten und Irrthümern führt, sondern vielmehr die mittlere Kraft angebe, wodurch er zugleich zu einem genauen Dynamographen umgeschaffen wurde, haben wir im achten Hefte der Verhandlungen des n. ö. Gewerb-Vereins (Wien 1843) deutlich beschrieben und dargestellt.

§. 182. Anwendung des Kraftmessers zur Bestimmung der Arbeit oder Leistung der Men-

schen und Thiere. Wirken z. B. mehrere Menschen an einem Tummelbaume (Fig. 85), um Lasten aufzuziehen, und findet man durch den Kraftmesser, dafs sie im Durchschnitt (einer in den andern gerechnet) dabei einen Druck von k Pfunden gegen die Arme $a\,a$ ausüben und per Secunde einen Weg von v Fufs zurücklegen; so ist, wenn n Arbeiter dabei angestellt sind, ihre Arbeit oder Leistung per Secunde $E = n k v^{\text{F. Pf.}}$

Findet man ferner, dafs durch diese Aufzugmaschine per Secunde eine Last von Q Pfunden auf die Höhe von h Fufs gehoben wird, so ist die Nutzleistung $e = Q h^{\text{F. Pf.}}$

Sind z. B. sechs Menschen an den Armen der Welle angestellt, welche im Durchschnitt mit 30 Pfund in der Richtung der Bewegung der Angriffspuncte drücken, und haben sie dabei eine Geschwindigkeit von zwei Fufs, so ist $E = 6 \times 30 \times 2 = 360^{\text{F. Pf.}}$

Wird aber bei dieser Anstrengung oder Arbeit jedesmal eine Last von 500 Pfund binnen einer Minute auf die Höhe von 30 Fufs aufgezogen (worauf wieder eine kleine Ruhezeit von selbst eintritt), so beträgt der Nutzeffect $e = 500 \times \frac{30}{60} = 250^{\text{F. Pf.}}$ nur $69\frac{1}{2}$ Procent von dieser Arbeit, so, dafs also $30\frac{1}{2}$ Procent davon durch die Maschine selbst, nämlich durch die dabei Statt findenden Reibungen und sonstigen Hindernisse, wie namentlich die Steifheit des Seils, verschlungen oder absorbirt werden.

Wäre also die Leistung eines Menschen beim Tragen einer Last auf horizontalem Wege, nach §. 180, $60^{\text{F. Pf.}}$, so würde diese bei seiner Verwendung bei einem solchen Tummelbaume auf $41\frac{2}{3}^{\text{F. Pf.}}$ herabsinken.

Um die tägliche Arbeit oder die Nutzleistung für diese Zeit zu finden, darf man den Ausdruck von e nur mit der Anzahl der Secunden der wirklichen Arbeitszeit multipliciren; ist diese z. B. im vorigen Beispiel = 8 Stunden, so ist die tägliche Leistung eines Menschen bei dieser genannten Maschine $= \frac{1}{6} \times 250 \times 8 \times 3600 = 1200000^{\text{F. Pf.}}$ Dabei werden die 8 Stunden so genommen, als ob das Aufziehen ununterbrochen durch diese Zeit Statt fände, und diefs wäre der Fall, wenn von den 12 Stunden (von 6 bis 12 Uhr Mittags und von 1 bis 7 Uhr Abends), als die Arbeiter am Platze sind, 4 Stunden durch das Befestigen und Losmachen des Seils und durch das leere Zurückgehen desselben verloren gingen.

§. 183. Durch vielseitige Beobachtungen hat man die Leistungen der Menschen und Thiere bei ihrer verschiedenen Verwendung in Tabellen zusammengetragen, da man jedoch dabei durchaus auf keine, nur halbwegs genaue Übereinstimmung rechnen darf, wie diefs wohl auch in der Natur der Sache liegt; so müssen alle derlei Zahlen nur als beiläufige Mittelwerthe angesehen werden. Wir geben im Nachstehenden hierüber folgende zwei Tabellen:

Tabelle I
für die Gröſse der Leistung oder Arbeit der Menschen und Thiere unter verschiedenen Umständen.

Gattung der Arbeit.	Gehobenes Gewicht oder mittl. Anstreng.	Geschwindigkeit per Secunde.	Arbeit per Secunde.	Tägliche Arbeitsdauer.	Tägliche Arbeit oder Leistung.
	Pfd.	Fuſs.	F. Pf.	Stunden.	F. Pf.
1. Verticales Heben von Lasten.					
Ein Mensch, welcher über eine sanfte Anhöhe oder über eine Stiege ohne Last hinaufgeht, wobei seine Arbeit bloſs im Erheben seines eigenen Gewichtes besteht	120	·5	60	8	1728000
Ein Taglöhner oder Handlanger, welcher mittelst einer Rolle und eines Seiles, welches er immer wieder leer hinabläſst, Lasten oder Baumaterialien aufzieht	32	·63	20·24	6	437184
Ein Handlanger, welcher Lasten bloſs mit den Händen hinaufreicht oder aufhebt , ...	36	·54	19·44	6	419904
Ein Handlanger, welcher Lasten auf seinem Rükken über eine sanfte Anhöhe oder Stiege trägt und jedesmal wieder, um neue Lasten zu holen, leer zurückgeht	100	·13	13	6	380800
Ein Handlanger, welcher Materialien auf eine schiefe Ebene von $^1/_{12}$ Steigung in einer Scheibtruhe oder auf einem Schubkarren hinaufführt und immer wieder leer zurückfährt	110	·06	6·6	10	237600
Ein Arbeiter, welcher mittelst einer Schaufel Erde auf eine mittlere Höhe von 5 Fuſs wirft	5	1·25	6·25	10	225000
2. Wirkung mittelst Maschinen.					
Ein Arbeiter, welcher an einem Spillenrad oder Rad an der Welle arbeitet, und zwar					
1. im Niveau der Radachse	100	·5	50	8	1440000
2. unter diesem Niveau um 24 Grad . . .	20	2·2	44	8	1267200
Ein Arbeiter, welcher auf horizontalem Wege eine Last zieht oder fortschiebt	20	2	40	8	1152000
Ein Arbeiter an einer Kurbel	14	2·5	35	8	1008000
Ein geübter Arbeiter, welcher wie bei einem Pumpbrunnen in verticaler Richtung auf- und abwärts schiebt und zieht	9	3·5	31·5	8	907200
Ein Mensch beim Schiffziehen	18	1	18	10	648000
Ein Pferd an einen Wagen gespannt und im Schritte gehend	125	2·8	350	10	12600000
Ein Pferd im Göpel im Schritte gehend . . .	80	2·8	224	8	6451200
Ein Pferd im Göpel im Trabe gehend	54	6	324	4·5	5248800
Ein Ochs im Göpel	116	1·9	220	8	6336000
Ein Maulthier im Göpel	55	2·8	154	8	4435200
Ein Esel im Göpel	25	2·5	62·5	8	1800000

Anmerkung. Bei dem Fortschaffen von Lasten auf horizontalem Wege darf man nicht etwa die Arbeit des Motors ebenfalls durch das Product aus der Last (indem diese nicht in der Richtung des Weges, sondern darauf senkrecht widersteht) in den Weg ausdrücken; denn diese Arbeit besteht in nichts Anderem, als in der Überwindung der Reibung, und diese kann nach Beschaffenheit der Strafse sehr verschieden seyn, so, dafs also dieses Product für dieselbe Last und denselben Weg, wie es doch nach dieser Art seyn würde, keinesweges constant seyn kann. Übrigens liefert die folgende Tabelle einige Mittelwerthe für die Leistungen der Menschen und Pferde beim horizontalen Fortbewegen von Lasten.

Tabelle II
über die Leistungen der Menschen und Pferde beim Fortbewegen von Lasten auf horizontalem Wege.

Art der Bewegung.	Transportirtes Gew.	Geschwindigkeit per Secunde.	Nutzeffect per Secunde.	Tägliche Arbeitszeit.	Nutzleistung per Tag.
	Pfd.	Fufs.	F. Pf.	Stunden.	F. Pf.
Ein Mensch, welcher auf ebenem Weg ohne Last fortgeht, dessen Leistung also blofs im Fortbewegen seines eigenen Gewichtes besteht .	120	4.6	552	10	19872000
Ein Handlanger, welcher Materialien in einem kleinen zweirädrigen Karren fortschafft und leer zurückkehrt	180	1·6	288	10	10368000
Ein Handlanger, welcher Materialien in einer Scheibtruhe oder auf einem Schubkarren fortschafft und immer leer zurückkommt, um neue Lasten zu holen	100	1·7	170	10	6120000
Ein Mensch, welcher eine Last auf seinem Rücken trägt	70	2·4	168	7	4233600
Ein Handlanger, welcher Materialien auf dem Rücken forträgt und immer wieder leer zurückgeht, um neue Lasten zu holen	115	1·6	184	6	3974400
Ein Handlanger, welcher Lasten auf einer Trage forträgt und immer wieder, um neue Trachten zu holen, leer zurückgeht	90	1	90	10	3240000
Ein Pferd, welches Lasten auf einem Karren auf weite Strecken fortführt und dabei im Schritte geht	1250	3·5	4375	10	157500000
Ein an einen Wagen gespanntes Pferd, welches beständig beladen im Trabe läuft	625	7	4375	4·5	70880000
Ein Pferd, welches auf einem Karren Lasten fortschafft und immer wieder leer zurückgeht, um neue zu holen	1250	2	2500	10	90000000
Ein Packpferd, welches im Schritte geht . . .	215	3·5	752·5	10	27090000
Ein Packpferd, welches im Trabe geht . . .	140	7	980	7	24696000

§. 184. Wirkung oder Leistung der Schwerkraft. Die Arbeit, welche nöthig ist, um ein Gewicht Q auf die verticale Höhe h zu heben, ist zugleich auch die Arbeit oder Leistung, welche durch das Herabsinken oder den freien Fall desselben Gewichtes Q durch die nämliche Höhe h entsteht; denn in beiden Fällen wird dieselbe Kraftanstrengung, im erstern durch den Motor, im letztern durch die Schwere auf dieselbe Länge des Weges ausgeübt oder thätig. Aus diesem Grunde läfst sich in einem Gewichte, welches auf eine gewisse Höhe gehoben wird, gewisser Mafsen die hiezu nöthige Arbeit ansammeln, welche man dann zu einer beliebigen Zeit, indem es durch sein allmäliges Herabsinken (wie diefs z. B. bei Uhren, Bratenwendern u. s. w. der Fall) gewisse Widerstände überwindet, wieder zurück erhält.

Bezeichnet man aber die durch das freie Fallen des Gewichtes Q durch die Höhe h entstehende Wirkung oder Arbeit mit W, so ist $W = Qh$, oder wenn man für das Gewicht Q dessen Masse M und für die Höhe h den Werth (§. 142, Gl. 4) $\frac{v^2}{2g}$, wo v die erlangte Endgeschwindigkeit bezeichnet, setzt, so ist auch

$$W = \frac{Mv^2}{2g} \ldots (1.$$

Anmerkung. Nach der Art, wie die französischen Schriftsteller die Masse ausdrücken, wäre (§. 35) $Q = Mg$, also $W = \frac{1}{2} Mv^2$, d. i. der halben lebendigen Kraft gleich, wenn man Mv^2 die lebendige Kraft der Masse M nennt. Da aber dieses Product, wie man sieht, keineswegs eine blofse Kraft, sondern schon eine Leistung oder Arbeit einer Kraft ist, so geschieht es nur, um schon gang und gäbe Benennungen beizubehalten, wenn wir das Product aus der Masse in das Quadrat ihrer Geschwindigkeit die lebendige Kraft der Masse nennen. Wir kämen bei unserer Art die Massen auszudrücken oder zu bezeichnen zu demselben Resultate, wenn wir $\frac{Mv^2}{g}$ oder noch einfacher, den Quotienten $\frac{Mv^2}{2g}$, d. h. das Product aus der Masse in die Höhe, durch welche dieselbe fallen mufs, um die Geschwindigkeit v zu erlangen, was man kürzer die zu v gehörige Geschwindigkeitshöhe nennt, mit der Benennung lebendige Kraft belegen würden.

Hat ein Körper, dessen Gewicht $= M$ ist, die Geschwindigkeit v, so kann er, indem er auf einen andern einwirkt, bis zum gänzlichen Verlust seiner Geschwindigkeit v in diesem eine Wirkung oder Arbeit von $Mh = \frac{Mv^2}{2g}$ erzeugen, so dafs dieser letztere Ausdruck sofort eine gleichsam zu Gebote stehende oder disponible Arbeit (die man früher geradezu Kraft genannt hat) darstellt, welche man in einem Körper, dessen Gewicht M und Geschwindigkeit v ist, besitzt, und wodurch der Ausdruck von lebendiger Kraft entstanden ist. Wird z. B. das Gewicht M mit der Geschwindigkeit v vertical aufwärts geworfen, so erreicht es (§. 143) die Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ und es ist dabei die verrichtete Arbeit in der That $= Mh = \frac{Mv^2}{2g}$.

Übrigens kann noch bemerkt werden, dafs die Arbeit, welche nöthig ist, um das Gewicht Q auf die Höhe h zu heben, nur dann genau $= Qh$ ist, wenn das Gewicht Q sowohl im Anfang als am Ende der Bewegung ein und dieselbe Geschwindigkeit besitzt; weil, wie wir weiter unten sehen werden, jede Geschwindigkeitsänderung in der Masse Q eine neue Wirkung oder Arbeit erfordert.

§. 185. Die Wirkung oder Leistung durch die sogenannte lebendige Kraft ausgedrückt.

Wirkt in die blofs träge Masse M eine constante Kraft P während des von der Masse zurückgelegten Weges S, so erzeugt diese Kraft in M eine Geschwindigkeit v, wofür (§§. 142 und 146)

$$\frac{v^2}{2G} = S, \quad \text{d. i.} \quad \frac{v^2}{2g\frac{P}{M}} = S \quad \text{oder} \quad PS = M\frac{v^2}{2g} = Mh$$

ist, wenn h die zu v gehörige Geschwindigkeitshöhe bezeichnet. Da aber P eine constant bewegende Kraft und S der dabei zurückgelegte Weg ist, so stellt das Product PS die Arbeit oder Leistung dieser Kraft vor, und diese ist sonach, um nämlich in der vorigen Masse M die Geschwindigkeit v zu erzeugen, der lebendigen Kraft gleich, welche die mit der Geschwindigkeit v behaftete Masse M besitzt, getheilt durch die doppelte Beschleunigung der Schwere oder kürzer, diese Arbeit ist dem Producte aus der Masse in die Geschwindigkeitshöhe gleich, welche der Geschwindigkeit v entspricht.

Soll umgekehrt die Geschwindigkeit v, welche die Masse M besitzt, durch eine Kraft P zerstört werden; so wirkt die letztere als eigentlicher Widerstand, und ihre Wirkung oder Leistung dabei ist genau wieder wie vorhin $\frac{Mv^2}{2g} = Mh$. So wirkt z. B. beim freien Falle einer Masse durch die Höhe h die Schwere als bewegende, die Geschwindigkeit v erzeugende Kraft und beim Aufwärtssteigen derselben Masse als ein Hindernifs oder als eine die Geschwindigkeit v zerstörende Kraft, ihre Wirkung oder Arbeit auf diese Masse ist aber für einerlei Höhe in beiden Fällen genau die nämliche.

Anmerkung. Das Product Mv aus der Masse in die einfache Geschwindigkeit, welches (§. 132) als Maſs der bewegenden Kraft dient und auch Gröſse der Bewegung genannt wird, ist von jenem Mv^2, der sogenannten lebendigen Kraft, welche eine Leistung oder Arbeit darstellt, wesentlich verschieden. Nur nach der bereits veralteten Eintheilung von todten und lebendigen Kräften, nach welcher die erstern bloſs Drücke, die letztern aber wirkliche Bewegung erzeugen, wäre auch Mv eine lebendige Kraft.

Diese beiden Gattungen von Kräften sind von ganz verschiedener Natur und können nicht, oder doch nur in so ferne mit einander verglichen werden, als man einen Druck als eine bewegende Kraft ansieht, bei welcher die unendlich kleine Geschwindigkeit, welche diese fortwährend zu erzeugen strebt, jeden Augenblick durch die feste Unter- oder Widerlage auch wieder aufgehoben oder zerstört wird, während sich diese bei der bewegenden Kraft in dem beweglichen Körper so anhäufen, daſs sie in einer gröſsern oder kleinern Zeit einen endlichen Werth annehmen.

Um die Wirkung zweier solcher Kräfte in der Anwendung mit einander zu vergleichen, muſs man die Tiefe des Eindruckes in Rechnung bringen, welchen ein bloſser Druck auf der Unter- oder Widerlage hervorbringt. Fällt z. B. ein Körper, dessen Gewicht $= Q$ ist, von der Höhe h auf einen andern Körper oder eine weiche Unterlage frei herab und bringt in dieser eine Vertiefung oder einen Eindruck $= s$ hervor, so ist die von dem Gewichte Q erzeugte Arbeit oder Wirkung $W = Q\,(h + s)$. Soll dagegen dieselbe Wirkung durch einen bloſsen Druck $= x$ hervorgebracht werden, so muſs, da dessen Leistung $= xs$ ist, sofort $xs = Q\,(h + s)$ seyn, woraus

$$x = \frac{Q\,(h+s)}{s} \quad \text{oder auch} \quad \frac{x}{Q} = \frac{h+s}{s} \quad \ldots (a$$

folgt, so, daſs also x bedeutend gröſser als Q ausfällt.

Ist z. B. $h = 10$ Fuſs, $s = 1$ Zoll und $Q = 100$ Pfund, so ist $x = \dfrac{100 \times 121}{1}$ $= 12100$ Pfund, oder das drückende Gewicht muſs hier 121 Mal gröſser als das von der angegebenen Höhe fallende Gewicht seyn, um dieselbe Wirkung hervorzubringen.

Hieraus erklärt sich, warum ein Nagel mit einem mäſsigen Schlag eines Hammers weiter, als durch das bloſse Auflegen, selbst eines sehr bedeutenden Gewichtes auf den Kopf des Nagels, eingetrieben werden kann.

§. 186. Wirkung oder Arbeit, um in einer bloſs trägen Masse eine Geschwindigkeitsänderung hervorzubringen. Princip der lebendigen Kräfte. Um eine Masse M, welche bereits die Geschwindigkeit v besitzt, auf die Geschwindigkeit v' zu bringen, wenn $v' > v$ ist, hat man für die nöthige Arbeit, um die Masse M von der Geschwindigkeit Null auf jene v und v' zu bringen, beziehungsweise (vorigen Paragraph)

$W' = \frac{M v^2}{2g}$ und $W'' = \frac{M v'^2}{2g}$, folglich, da die gesuchte Arbeit $W = W'' - W'$ ist, sofort:

$$W = \frac{M v'^2 - M v^2}{2g} = Mh' - Mh = M(h' - h) \; . \; . \; . \; (1,$$

wobei h und h' die zu v und v' gehörigen Geschwindigkeitshöhen sind. Wäre umgekehrt $v' < v$, so wäre die Wirkung oder Arbeit, welche nöthig ist, um der Masse den Theil der Geschwindigkeit $v - v'$ zu benehmen, $W = M(h - h') \; . \; . \; . \; (2$, welches dem vorigen Ausdruck, nur mit den entgegengesetzten Zeichen (weil dort eine Beschleunigung, hier eine Verzögerung der Masse M eintritt), gleich ist; zugleich ist zu ersehen, dafs die im obigen Ausdrucke enthaltene Differenz $M v'^2 - M v^2$ die Zunahme an lebendiger Kraft bezeichnet, welche die Masse M erlangt, und darin liegt das sogenannte Princip der lebendigen Kräfte, welches sich im Allgemeinen so aussprechen läfst, dafs die nöthige Arbeit, um ein Massensystem zu beschleunigen oder zu verzögern, immer gleich ist der erlangten oder zerstörten lebendigen Kraft, dividirt durch $2g$ (oder nach der französischen Bezeichnung der Massen blofs durch 2).

Anmerkung. Ist also eine Maschine in Bewegung und bereits in den sogenannten Beharrungsstand (§. 283) gekommen, so, dafs alle Theile ihre normale Geschwindigkeit erlangt haben; so mufs die Wirkung der Kraft oder überhaupt der Kräfte der Wirkung der Last oder der Widerstände vollkommen gleich seyn, weil ein Überschufs von der einen oder andern nothwendig im ganzen Systeme eine Beschleunigung oder Verzögerung der Massen herbeiführen würde und der Beharrungsstand nicht bestehen könnte. Ist aber die Arbeit der Kräfte gleich jener der Widerstände, so würden sich (nach dem Principe der virtuellen Geschwindigkeiten §. 119) alle diese Kräfte im Gleichgewichte erhalten, wenn die Bewegung nicht schon eingeleitet wäre (wozu immer noch eine besondere Kraft nöthig ist) und durch die Trägheit der Massen oder ihres Beharrungsvermögens darin erhalten würde.

Weil nun bei einer in Bewegung und bereits im Beharrungsstande befindlichen Maschine die Kräfte und Widerstände sich das Gleichgewicht halten würden, wenn diese in der Ruhe wären, so sagt man, dafs in der Maschine ein dynamisches Gleichgewicht bestehe, um es von dem statischen zu unterscheiden.

§. 187. Aufsammlung von Arbeit in einer trägen Masse. Wird in einer Masse M die Geschwindigkeit v oder auch nur jene $v - v'$ erzeugt, wozu also eine Leistung von

$$W = \frac{M v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad W' = \frac{M(v^2 - v'^2)}{2g}$$

nothwendig ist; so ist diese Arbeit W oder W' in dieser Masse gleichsam angesammelt und kann für gewisse Zwecke, wie z. B. zur Überwindung von Widerständen, wobei die Masse diese Arbeit wieder erstattet, beliebig verwendet werden.

Fährt ein Wagen über einen sanften Abhang herab, so kann ihn die erlangte Beschleunigung noch eine Strecke auf der horizontalen Strafse, oder auch auf der darauf folgenden Steigung fortbewegen.

Geht ein beladener Wagen auf horizontaler Strafse mit der Geschwindigkeit v, so müssen die Pferde zuerst, um diesen in Bewegung zu setzen, die Trägheit seiner Masse überwinden; die hiezu verwendete Arbeit $= \frac{Mv^2}{2g}$ ist dann aber in dieser Masse M des Wagens aufbewahrt und wird in jenen Momenten, wo der Widerstand auf der Strafse zunimmt oder die Zugkraft abnimmt, wieder zurückgegeben, so, dafs wenn der Wagen allmälig und ohne Stöfse zur Ruhe gekommen ist, sofort auch die gesammte Leistung, welche durch die Trägheit consumirt wurde, wieder zurück erstattet ist und sonach kein Verlust an Arbeit oder Wirkung Statt findet. Wie grofs übrigens dieser Effect seyn kann, geht aus den traurigen Wirkungen hervor, welche beim Zusammenstofs grofser Eisenbahntraine, wenn auch schon die bewegende Kraft abgesperrt oder unwirksam gemacht worden, durch die in den grofsen Massen gesammelte und enthaltene Arbeit plötzlich wirksam wird.

Auf diese Weise wird die Anwendung eines Schwungrades bei Maschinen, welche einen ungleichförmigen oder intermittirenden Widerstand, wie z. B. bei Hammer und Stampfwerken zu überwinden haben, oder auch dort, wo auf kurze Zeit ein gröfserer Widerstand überwunden werden soll, als diefs die zu Gebote stehende Kraft in dieser nämlichen Zeit thun kann, wie es z. B. öfter bei Walzwerken vorkömmt, von grofsem Nutzen und oft unentbehrlich.

Bei allen durch die Einwirkung einer constanten bewegenden Kraft entstehenden successiven, abwechselnd beschleunigenden und verzögernden, also bei den sogenannten periodischen und oscillirenden Bewegungen, wie bei einem Pendel, Balancier, Pumpenkolben u. s. w., dient die träge Masse als eine Art Magazin für die Arbeit, in welches während der Beschleunigung der Masse ein Theil der Arbeit des Motors aufgenommen und in der nächsten Periode der Verzögerung wieder abgegeben wird, so, dafs von dem Augenblick an, wo die Beschleunigung anfängt, bis zu jenem, wo die Verzögerung aufhört, die verwendete Kraft so angesehen werden kann, als wäre sie blofs zur Überwindung der übrigen von der Trägheit der Massen unabhängigen Widerstände benützt worden.

Wird durch irgend einen Motor eine Last M vertical gehoben, so wird diese zuerst von der Ruhe aus auf eine gewisse Geschwindigkeit v gebracht, und es wird durch die Trägheit der Masse die Arbeit $W = \frac{Mv^2}{2g}$ consumirt; ist die Last oben angekommen, so wird die Bewegung des Motors verzögert, um die Last oder Masse M wieder zur Ruhe zu bringen; da aber durch die in der Masse gesammelte Arbeit W ein Theil der Schwere dieser Last überwunden und dieser Theil dem Motor abgenommen wird (wenn die Verzögerung allmälig Statt hat), so wird eigentlich von der Arbeit des Motors für die Trägheit nichts absorbirt oder keine Arbeit verloren.

Etwas ähnliches gilt von der Arbeit des Feilens, Sägens u. s. w., wenn dabei nur keine plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen oder gar Stöfse Statt finden.

Sechstes Kapitel.

Theorie der Kurbel und des Schwungrades.

§. **188. Erklärung.** Ein um C (Fig. 152) drehbarer Hebel MC, welcher in M einen kleinen winkelrechten Ansatz (senkrecht auf die Ebene der Bewegung) oder eine sogenannte Warze zur Aufnahme einer Stange NM, welche sich um diese Warze drehen kann, besitzt, heifst gewöhnlich Krummzapfen; ist dieser winkelrechte Ansatz in M etwas länger und dient derselbe als Handgriff, so wird diese Vorrichtung eine einfache Kurbel genannt, und man bedient sich derselben im erstern Falle, um eine hin- und hergehende Bewegung in eine kreisförmige oder umgekehrt diese in die erstere zu verwandeln, und im zweiten Falle, um ein Rad, einen Schleifstein u. s. w. um seine durch C auf der Kreisebene $CMBE$ senkrechte Achse in drehende Bewegung zu setzen. Die von der Kurbelwarze M beschriebene Kreisperipherie wird Kurbelkreis, der Halbmesser oder Hebel CM das Kurbelknie und die in die Warze bei M eingehängte Stange die Kurbel- oder auch Bläuelstange genannt.

§. **189.** Es wirke nun zur Umdrehung der Kurbel oder des Krummzapfens, wodurch zugleich ein gewisser Widerstand überwunden werden soll, dessen Arbeit oder Wirkung ganz einfach dem Aufwinden einer Last Q auf den Kurbelkreis ADB gleich gesetzt werden kann, in der Richtung der Stange NM, welche fortwährend mit dem Durchmesser AB parallel bleiben soll, eine constante Kraft P abwechselnd von A gegen B und von B gegen A. Zerlegt man P in zwei Kräfte, wovon die eine nach der Tangente $Ma = p$ und die andere darauf senkrecht nach dem Mittelpuncte C wirkt, so ist für $Md = P$, sofort $Ma = p$ und wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke Mad und CMq, wenn man den Halbmesser $CA = CM = r$ setzt, ist $Ma : Md = Mq : CM$,

d. i. $p : P = Mq : r$, woraus $p = Mq \frac{P}{r}$ folgt. Die während des Fortschreitens der Warze M um den Elementarbogen $Mm = s$ entstehende unendlich kleine Arbeit der Kraft P ist

$$W' = ps = Mq \frac{P}{r} s = Cg \,.\, \frac{P}{r} \,.\, s \;...\; (a.$$

Da nun diese Gerade Mq von Null (in A) bis r (in D) zu-, und von da wieder bis Null (in B) abnimmt, so wächst auch die Tangential- oder eigentliche Umdrehungskraft p (so wie auch die unendlich kleine Arbeit W der Kraft P) im ersten Quadranten von Null bis $p = P$, und nimmt im zweiten Quadranten wieder bis Null ab. Die beiden Puncte A und B, in welchen $p = o$ ist, heifsen die todten Puncte des Kurbelkreises.

Da man die veränderliche Kraft p während des Fortschreitens der Kurbelwarze um den unendlich kleinen Bogen $Mm = s$ als constant ansehen kann (§. 137), so ist ihre Arbeit, während sie diesen Weg zurücklegt (§. 172) $W' = ps = Mq \frac{P}{r} s$ nach der vorigen Gleich. (a, oder wegen (indem die Dreiecke Mmn und CMq ähnlich sind) $Mm : Mn = r : Mq$, oder $\frac{s \,.\, Mq}{r} = Mn$, auch $W' = P \,.\, Mn = P \,.\, pq$ (was auch in der That mit der Natur der Sache übereinstimmt, indem pq den unendlich kleinen Weg der constanten Kraft P nach ihrer Richtung bezeichnet). Während also der Punct M durch den Halbkreis ADB geht, besteht die Arbeit der Kraft P aus der Summe aller ähnlichen Producte $P \,.\, pq$, $P \,.\, p'q' \ldots$, wobei pq, $p'q' \ldots$, die Projectionen aller der kleinen Bögen, wie Mm auf den Durchmesser AB bezeichnen, und da ihre Summe $= AB$ ist, so ist die genannte Arbeit

$$W = P\,(pq + p'q' + \ldots) = P \,.\, AB, \text{ d. i. } W = P \,.\, 2r.$$

Die gleichzeitige Arbeit des Widerstandes Q besteht in dem Heben des Gewichtes Q auf die Höhe $r\pi$ (weil sich nämlich die Schnur dabei um den halben Umfang des Kurbelkreises aufwindet) oder es ist $W' = Q \,.\, r\pi$. Ganz dasselbe findet auch bei der rückgängigen Bewegung der Stange MN, wobei die Warze M den untern Halbkreis BEA durchläuft, Statt.

Soll nun der Beharrungsstand, d. i. das dynamische Gleichgewicht zwischen P und Q bestehen, so mufs $W = W'$, d. i. $P \,.\, 2r = Q \,.\, r\pi \ldots (b$, also das Verhältnifs $P : Q = 3{\cdot}14 : 2 \ldots (1$, oder die Relation $Q = {\cdot}637\,P \ldots (2$ Statt finden.

Anmerkung 1. Behielte die veränderliche Tangentialkraft p, welche von Null bis P zunimmt, und von da wieder bis Null abnimmt, durchaus den hier gefundenen Werth von $\cdot 637\, P = \frac{2}{\pi} P$ constant bei, so wäre ihre Arbeit während der Bewegung durch den Halbkreis, ebenfalls, wie es jetzt mit der constanten Kraft P der Fall ist,

$$= p\,.\,r\pi = \frac{2}{\pi} P\,.\,r\pi = P\,.\,2r,$$

und man kann daher in dieser Beziehung diese Kraft $\frac{2}{\pi} P$, wofür wir Kürze halber $\frac{2}{3} P$ nehmen wollen, die mittlere Kraft nennen (welche jedoch keineswegs das arithmetische Mittel zwischen 0 und P ist, welches $= \frac{1}{2} P$ wäre).

Die elementare Arbeit der Kraft P ist also im Minimum $= 0$, in ihrem mittlern Werth $= \frac{2}{3} P s$, und in ihrem gröfsten Werth $= P s$, zugleich geben diese 3 Werthe einen deutlichen Begriff von der Ungleichförmigkeit in der Wirkungsart der Kraft P bei der Kurbel.

Anmerkung 2. In der Wirklichkeit ist zwar die Bläuelstange NM mit dem horizontalen oder verticalen Durchmesser nicht vollkommen parallel, allein man kann diese Abweichung, selbst wenn die Stange nur 4 bis 5 Mal so lang, als der Halbmesser des Kurbelkreises ist, hierbei ohne Fehler vernachläfsigen. Auch wird in jenen Fällen, in welchen diese Schub oder Bläuelstange in verticaler Richtung auf und ab geht, die Arbeit der Kraft P während einer vollen Umdrehung der Kurbel durch das Gewicht dieser Stange, welches während der einen halben Umdrehung hindernd, während der andern aber eben so fördernd wirkt, da sich beide Wirkungen aufheben, in nichts geändert.

§. 190. Zweifache oder doppelte Kurbel.

Um in dem Augenblicke, in welchem die Kurbelwarze M im todten Puncte A oder B steht, dennoch eine Drehung um die Achse C hervorzubringen, wendet man öfter 2 oder auch 3 Kurbeln an, welche in verschiedenen, jedoch auf der Achse senkrechten Ebenen, liegen. Es seyen nun CM und CM' (Fig. 153) die Projectionen zweier solcher, auf derselben Achse C befindlichen Kurbeln, auf eine Ebene senkrecht auf diese Achse, und jede der beiden mit AB parallel bleibenden Schub- oder Bläuelstangen sey wieder doppelt wirkend, d. h. sowohl von A gegen B, als auch zurück von B gegen A, und zwar jede mit der Kraft P. Stehen die beiden Arme CM und CM', wie in der Zeichnung auf derselben Seite des verticalen Durchmessers DE, so ist die Elementararbeit der beiden Kräfte P nach der Gleichung (a des vorhergehenden Paragraphes:

$$Cg\,.\,\frac{P}{r}s + Cg'\,.\,\frac{P}{r}s = gg'\,.\,\frac{P}{r}s,$$

so, dafs also diese Arbeit am gröfsten wird, wenn $g g'$ am gröfsten ist, und dieses findet Statt, wenn die Verbindungslinie MM' mit dem Durchmesser DE parallel wird, in welchem Falle dann $g g' = MM' = 2\,OM$, also die gröfste Arbeit $= 2\,\frac{P}{r}\,s\,.\,OM$ . . . (c ist, wenn nämlich CO auf MM' perpendikulär gezogen wird.

Stehen dagegen die beiden Kurbelarme Cm, Cm', wie die punctirten Linien darstellen, auf verschiedenen Seiten dieses Durchmessers DE, so erhält man für die totale Elementararbeit der beiden Kräfte P den Werth:

$$W = \frac{P}{r}\,s\,(Cn + Cn') = \frac{P}{r}\,s\,.\,2\,Cx,$$

wenn man nämlich aus dem Halbirungspuncte o der Verbindungslinie mm' auf DE das Perpendikel ox fällt, wodurch $on = on'$, also

$$Cn + Cn' = 2\,Cx$$

wird. Diese Arbeit wird ein Maximum, wenn Cx am gröfsten, also $= Co = CO$, folglich mm' mit AB parallel wird, in diesem Falle ist diese Arbeit

$$W = 2\,\frac{P}{r}\,s\,.\,CO \;\ldots\; (c'.$$

Wählt man aber den Winkel MCM' dergestalt, dafs OM, wie es das Maximum in der Relation (c fordert, grofs ausfällt, so wird dagegen CO, daher auch die in (c' ausgedrückte Arbeit um so kleiner; sollen sich daher diese beiden äufsern oder obern Grenzen von der mittlern Arbeit gleich weit entfernen, so mufs man $CO = MO$ nehmen, wofür der W. MCM' ein Rechter, und $CO = MO = \frac{r}{\sqrt{2}}$, folglich die gröfste Elementararbeit für jede der beiden Kräfte P $= 2\,\frac{P}{r}\,s\,.\,\frac{r}{\sqrt{2}} = Ps\sqrt{2}$, und für beide zusammen $= 2\,Ps\sqrt{2}$ wird.

Die innere oder untere Grenze der Elementararbeit der beiden Kräfte P tritt ein, wenn eine der beiden Kurbeln horizontal, die andere also vertical steht, was sich bei einer Umdrehung beider Kurbeln vier Mal ereignet; dafür ist die Elementararbeit für die eine Kraft (wofür die Warze M in D oder E steht) $= Ps$, und für die andere (deren Angriffspunct in A oder B liegt) $= o$, also für beide $= Ps$.

Um endlich auch die mittlere Elementararbeit zu bestimmen, hat man, da jetzt bei der doppelten Kraft P für den Beharrungsstand auch die Last Q doppelt so grofs seyn mufs (analog mit der Relat. (b im vorigen Paragraphe) $P\,.\,2r + P\,.\,2r = Qr\pi + Qr\pi$, oder (wie bei der einfachen Kurbel) $Q = \frac{2}{\pi} P = \cdot 637 P$, wodurch sofort diese mittlere Arbeit für jede Kraft $P = \cdot 637 Ps$, und für beide $= 2 \times \cdot 637 Ps$ wird. Die drei Grenzen sind also hier $2 Ps\sqrt{2}$, $2 \times \cdot 637 Ps$ und Ps oder die mittlere Arbeit $= 1$ gesetzt: $1 \cdot 11$, 1, $\cdot 785$, während sie bei der einfachen Kurbel die Werthe o, $\cdot 637 Ps$ und Ps, oder 0, 1, $1 \cdot 57$ sind, woraus sofort folgt, dafs die Unregelmäfsigkeit bei der doppelten Kurbel schon bedeutend geringer, als bei der einfachen Kurbel ist.

§. 191. Dreifache Kurbel. Wendet man zu einer noch gröfsern Gleichförmigkeit (wie diefs u. A. bei Gebläsen geschieht) auf derselben Achse drei Kurbeln an, deren Projectionen auf eine Ebene, welche auf der durch C (Fig. 154) gehenden Achse senkrecht steht, CM, CM', CM'' sind, und wobei die drei Winkel am Mittelpuncte C einander gleich sind; so findet man durch ein ganz gleiches Verfahren, wie vorhin, für die mittlere Elementararbeit der drei Kräfte P den Werth $3P \times \cdot 637 s$, für die obere Grenze derselben (welche immer dann eintritt, wenn eine von den drei Kurbeln vertical steht) $= 2Ps$, und für die untere Grenze (welche eintritt, so oft eine der Kurbeln horizontal steht) $= Ps\sqrt{3}$. Nimmt man wieder die mittlere Elementararbeit (so genannt, weil der Weg s ein Element des Bogens ist) zur Einheit, so erhält man hier für die drei Grenzen: $1 \cdot 045$, 1, $0 \cdot 906$, so, dafs also der Gang der dreifachen Kurbel schon ein sehr regelmäfsiger ist.

Anmerkung. Die practische Ausführung der dreifachen Kurbel wird durch die dabei nöthige Bedingung: vier Zapfenlager ein und derselben Achse genau in einer geraden Linie zu erhalten, wenn nicht unmöglich, doch äufserst schwierig; aus diesem Grunde wendet man lieber eine doppelte und eine einfache Kurbel, deren Stellungen gegen einander jedoch die vorhin für die dreifache Kurbel bezeichneten sind, von einander getrennt an, befestigt auf der Achse einer jeden der beiden Kurbeln ein kleines Stirnrad, und läfst diese in zwei ganz gleiche oder ähnliche Stirnräder, die man auf einer einzigen Achse (welche die Achse der dreifachen Kurbel vertritt oder ersetzt) befestigt hat, eingreifen.

§. 192. Theorie des Schwungrades. Da man sich gewöhnlich nur der einfachen Kurbel bedient, welche, wie oben gezeigt wurde, eine grofse Unregelmäfsigkeit in ihrem Gange darbietet, so wendet man zur Ausgleichung derselben mit der Kurbel zugleich ein Schwungrad an, welches aus einem schweren, gewöhnlich gufseisernen Radkranze besteht, der mittelst eiserner oder auch nur hölzerner Radarme mit einer, in der Regel horizontalen Welle verbunden ist.

Um nun die für eine vorhinein bestimmte Gleichförmigkeit im Gange der Kurbel nöthige Masse eines mit der Achse C (Fig. 152) der einfachen Kurbel verbundenen Schwungrades zu finden, wollen wir uns zuerst diese Masse auf den Umfang des Kurbelkreises reducirt denken, und diese durch M bezeichnen.

Es sey die Geschwindigkeit der Kurbelwarze in $A = v$, die gröfste Geschwindigkeit, welche sie im Halbkreise ADB annimmt $= V$, und die kleinste $= V'$; so ist, da nach Relat. (1, §. 189 für den Beharrungsstand (nach welchem die Warze M in B dieselbe Geschwindigkeit, wie in A haben, und die Arbeit der Kraft P durch den Weg $2r$ von der Arbeit der Last durch den gleichzeitigen Weg $r\pi$ erschöpft werden mufs, was auch immer die Zwischengeschwindigkeiten des Punctes M seyn mögen) $P = 1{\cdot}57Q$ ist, und ferner die Tangentialkraft

$$p = Mq \, . \, \frac{P}{r} = 1{\cdot}5708 \, Q \, . \, \frac{Mq}{r}$$

(Relat. a) von Null (in A) bis $P = 1{\cdot}57Q$ (in D) zunimmt; so gibt es eine Stelle im ersten Quadranten, z. B. in M, in welcher $p = Q$, d. i. $1{\cdot}57 \, Q \, . \, \frac{Mq}{r} = Q$ ist, wofür sofort $Mq = Cg = \frac{r}{1{\cdot}57} = {\cdot}637\,r$ (W. $ACM = 39^\circ, 32', 25''$), und $Cq = {\cdot}77118\,r$, also

$$MF = 2\,Cq = 1{\cdot}54236\,r$$

wird. Dasselbe Verhältnifs von $p = Q$ tritt auch für den Punct F im zweiten, und für die Puncte F' und M' im dritten und vierten Quadranten ein, so, dafs also an diesen vier Puncten die Elementarwirkung der Kraft P jener der Last Q vollkommen gleich ist. Dagegen ist in der Periode von M' bis M, und jener von F bis F' jene der Kraft P kleiner als von der Last Q, und in den beiden Perioden von M bis F und von F' bis M' umgekehrt die Arbeit der Kraft P gröfser als von der Last Q; es findet daher in den beiden zuerst genannten Perioden Verzögerung, und in den beiden letztern Beschleunigung der Masse M Statt, folglich tritt die gröfste Geschwindigkeit V der Kurbel in den Puncten F und M', dagegen die kleinste V' in jenen M und F' ein. Die Arbeit aber, um die träge Masse M von der Geschwindigkeit V' auf jene V zu bringen, nach §. 186 $= \frac{M}{2g}\,(V^2 - V'^2)$ . . . (m wird während der Perioden MF und $F'M'$ in der Masse M angesammelt, und während der beiden andern Perioden FF' und $M'M$ zur Ausgleichung der Bewegung wieder abgegeben.

Nun ist aber die Arbeit der Kraft P in den zuerst genannten Perioden $= P.MF = 1\cdot54236\, rP = 1\cdot54236\, r \times 1\cdot5708\, Q = 2\cdot4227\, rQ$, und die Arbeit der Last $= 1\cdot7614\, rQ$; da nun aber die Differenz aus diesen beiden Arbeiten oder Wirkungen, durch welche die Beschleunigung $V - V'$ in der Masse M erzeugt wird, dem vorigen Ausdrucke (m gleich seyn mufs, so hat man

$$a) \ldots \frac{M}{2g}(V^2 - V'^2) = \cdot6613\, Qr = \cdot421\, Pr,$$

und daraus die gesuchte Masse

$$M = \frac{1\cdot3226\, grQ}{V^2 - V'^2} = \frac{\cdot842\, Pr}{V^2 - V'^2}\, g \ldots (1.$$

Ist v die mittlere Geschwindigkeit, welche die Kurbelwarze je nach dem Zwecke der Maschine haben soll, und wird dabei die Bedingung gestellt, dafs V und V' nicht mehr als um den $n$ten Theil von v abweichen sollen; so ist $V = v + \frac{v}{n}$ und $V' = v - \frac{v}{n}$, daher $V + V' = 2v$ und $V - V' = \frac{2v}{n}$, folglich

$$V^2 - V'^2 = (V + V')(V - V') = \frac{4v^2}{n}.$$

Wird dieser Werth für $V^2 - V'^2$ in der vorigen Gleich. (1 substituirt und dann abgekürzt, so erhält man auch

$$M = \frac{\cdot2105\, Prgn}{v^2} \ldots (2,$$

wobei für die Breite von Wien g die Beschleunigung der Schwere $= 31$ Fufs ist.

Soll dieser Ausdruck durch die Anzahl der Umdrehungen, welche die Kurbel per Minute zu machen hat, und die Anzahl der Pferdekräfte ihrer Leistung ausgedrückt werden, so sey m die erstere und N die letztere Zahl; so ist die Arbeit der Kraft P in einer Minute $= 4mrP$, also per Secunde $= \frac{4mrP}{60}$; da ferner die Pferdekraft (§. 178) $= 430^{\text{F. Pf.}}$ ist, so ist $430\, N = \frac{4mrP}{60}$, also $rPg = \frac{199950\, N}{m}$, und wenn man diesen Werth in der vorigen Formel (2 setzt, auch

$$M = \frac{42090}{mv^2}\, nN \ldots (3,$$

in welcher Formel v in Fufsen zu setzen ist, und M in Pfunden erhalten wird.

Anmerkung. Aus der Formel (1 erkennt man am einfachsten, dafs bei der Kurbelbewegung eine vollständige Gleichförmigkeit unmöglich ist, weil dafür $V' = V$ seyn müfste, wofür der Nenner Null, also die Masse M

unendlich grofs ausfiele; zugleich sieht man, dafs diese Masse um so gröfser seyn mufs, je weniger V und V' von einander verschieden seyn sollen.

Führt man die Rechnung für eine Kraft P mit blofs einfacher Wirkung durch, so, dafs z. B. die Bläuelstange NM nur immer von A gegen B hin geschoben, zurück aber von B nach A durch die blofse Beschleunigung der Masse M gebracht wird; so findet man, dafs für dieselben Werthe von n, N und m, die Masse M beinahe 5 Mal gröfser als im obigen Falle ausfällt.

§. 193. Um nun die Gröfse des mittlern Radkranzhalbmessers R des Schwungrades zu bestimmen, so mufs man die eben gefundene Masse M, welche sich auf den Kurbelkreis vom Halbmesser r bezieht, von dieser Entfernung r auf jene R reduciren; heifst diese reducirte Masse M', so ist (§. 159) $M'R^2 = Mr^2$, woraus man eine der beiden Gröfsen M' oder R bestimmen kann, wenn man die andere im Voraus annimmt, für M' z. B. ist $M' = \frac{r^2}{R^2} M$ . . . (4, wenn man sich über den Durchmesser entschieden hat.

Hat der Radkranz die radiale Breite a, und bei einem rechteckigen Querschnitt die Dicke b, ist ferner S das specifische Gewicht der Materie, woraus der Radkranz besteht, und $\gamma = 56\frac{1}{2}$ Pfund das Gewicht eines Kubikfufses Wasser; so ist das Gewicht des Radkranzes $= 2R\pi abS\gamma$, und wenn man dieses Gewicht allein schon (ohne Rücksicht auf die Radarme) dem Gewichte der Masse M' gleich setzt, und daraus den Querschnitt ab bestimmt: $ab = \frac{M'}{2\pi RS\gamma}$. Besteht der Radkranz, wie gewöhnlich aus Gufseisen, so ist $S = 7{\cdot}2$, und wegen $\gamma = 56{\cdot}5$ und $\pi = 3{\cdot}1416$ sofort $ab = \frac{M'}{2556\,R}$, wobei man ab in Quadratfufsen erhält, und dann über die beiden Dimensionen a und b noch eine Bedingung hinzufügen kann. Will man dagegen diese beiden Gröfsen im Voraus festsetzen, und darnach R bestimmen, so darf man in diese letzte Gleichung nur für M' den Werth aus der Gleichung (4 setzen und R ausdrücken, so erhält man $R = \sqrt[3]{\frac{Mr^2}{2556\,ab}}$.

Anmerkung. Durch das Auslassen der Radarme aus der Rechnung wird in der Wirklichkeit die Ausgleichung im Gange der Kurbel noch etwas vollständiger oder die Zahl n des Bruches $\frac{1}{n}$ noch etwas gröfser.

Was übrigens diese Zahl n betrifft, so darf man sie nicht gröfser annehmen, als unumgänglich nothwendig, weil man sonst nur die Kosten und die Reibung des Schwungrades in der Radachse unnützerweise vermehrt, wodurch allein mehrere Pferdekräfte absorbirt werden können.

Für einen gewöhnlichen mittleren Gang der Maschine setzt man $n = 10$, dagegen dort, wo eine grofse Regelmäfsigkeit erforderlich ist, $n = 15$ bis 20. Die Engländer nehmen sogar für Spinnereien $n = 30$.

Weil $\frac{r}{R} v$ die mittlere Geschwindigkeit eines Punctes im mittlern Kreise des Radkranzes ist, so hann man in den obigen Formeln (1 bis (3, M ohne weiters für M' gelten lassen, wenn man unter v, V und V' nicht die Geschwindigkeiten im Kurbel-, sondern in diesem Schwungradkreise versteht.

§. 194. Weitere Anwendung des Schwungrades. Es gibt in der ausübenden industriellen Mechanik sehr viele Fälle, in welchen nicht, wie vorhin bei der Kurbel, der Widerstand Q constant, und die bewegende Kraft P durch ihre eigenthümliche Wirkungsweise veränderlich, sondern wo umgekehrt die wirkende oder bewegende Kraft constant, dagegen der Widerstand Q veränderlich ist. So ist z. B. bei einem Walzwerke der Widerstand, welcher in dem Augenblicke, als das zu walzende Metall zwischen die Walzen gebracht wird, entsteht, nicht fortwährend, sondern nur periodenweise vorhanden, indem die auszuwalzende Schiene z. B. von der einen Seite des Walzwerkes auf die andere leer zurückgeht, um wieder ein neues Caliber der Walzen zu passiren, und überhaupt immer gewisse Zwischenpausen eintreten. Bei einer Bretsäge, mit auf und abgehendem Sägegatter ist der Hauptwiderstand nur immer während des Niedergehens desselben vorhanden. In den Spinnereien wird durch das zufällige gleichzeitige Abstellen vieler Maschinen der Widerstand für die Betriebskraft oft momentan bedeutend vermindert u. s. w.

Um nun auch für solche Fälle die gewünschte oder nöthige Gleichförmigkeit zu erreichen, wendet man, aufser den sogenannten Regulatoren, welche weiter unten besprochen werden, ebenfalls das Schwungrad an, dessen Gewichtsbestimmung auf eine der vorigen ganz ähnliche Weise vorgenommen wird.

§. 195. Ist z. B. beim Walzwerke die gröfste Geschwindigkeit des Schwungrades in dem Augenblicke eingetreten, in welchem das Eisen oder Metall zwischen die Walzen gebracht wird, und nimmt diese während des Durchgehens desselben allmälig ab, so, dafs diese Geschwindigkeit in dem Momente, als das Metall die Walzen verläfst, am kleinsten geworden ist; so hat man hier blofs, wenn V und V' die gröfste und kleinste Geschwindigkeit des Schwungrades, und S den Unterschied zwischen der nöthigen Arbeit, um die Schiene durch die Walzen zu bringen, und der in derselben Zeit vom Motor ausgeübten kleinern Kraft oder Arbeit bezeichnet, $\frac{M}{2g}(V^2 - V'^2) = S$ zu setzen, um daraus die nöthige Gröfse oder Masse des Schwungrades zu finden, wobei man, wie bei der Kurbel hinsichtlich der Abweichung der gröfsten- und kleinsten Geschwindigkeit von der mittlern, gewisse Grenzen festsetzen und für diese Geschwindigkeit einen bestimmten Werth annehmen kann.

Ist das Schwungrad unmittelbar an der Achse der einen Walze angebracht, so ist dessen Umdrehungszahl per Minute aus der Natur der Sache, also auch dadurch die mittlere Geschwindigkeit v im Radkranze gegeben; aber auch bei Anwendung eines Zwischengeleges, wodurch das Schwungrad viel schneller umläuft, kann diese Geschwindigkeit v als bekannt oder gegeben angesehen werden. Zu einer vollständigen Periode, innerhalb welcher die gröfste und kleinste Geschwindigkeit Statt findet, kann man übrigens auch nach Umständen die Zeit rechnen, während welcher das auszuwalzende Metall zwei oder mehrere Male durch die Walzen gegangen ist.

§. 196. Bei einer Bretsäge, bei welcher das Gatter mittelst eines Krummzapfens und einer Bläuelstange auf und ab bewegt wird, mufs man berücksichtigen, dafs beim Hinaufgehen das Gewicht des Gatters und der Bläuelstange zu überwinden ist, dieses Gewicht jedoch beim Herabgehen, wo eben der überwiegende Widerstand des Sägens eintritt, der bewegenden Kraft wieder zu Statten kommt. Man mufs also auf ähnliche Weise, wie im §. 189, die elementaren Wirkungen oder Arbeiten der bewegenden Kraft gegen jene der Last durch den ganzen Kurbelkreis untersuchen, wobei wieder an jenen Puncten, wo diese Elementararbeiten der Kraft und Last einander gleich sind, das Maximum und Minimum der Geschwindigkeit eintritt; der Ueberschufs der Arbeit der Kraft über jene des Widerstandes zwischen diesen beiden Puncten gibt wieder die Wirkung auf Beschleunigung der Masse des Schwungrades, aus welcher entstehenden Gleichung dann (analog mit jener (α in §. 192) sofort das Gewicht der Schwungmasse gefunden wird.

§. 197. Für Spinnereien kann die Rechnung auf folgende Weise, wenigstens näherungsweise geführt werden:

Gesetzt der gleichzeitige Betrieb aller Spinn- und Vorbereitungsmaschinen der Fabrik erfordere eine Kraft von 30 Pferden, welche etwa durch eine Dampfmaschine geliefert wird. Durch das gleichzeitige Abstellen mehrerer dieser Maschinen während t Secunden werde dieser Widerstand um vier Pferdekräfte vermindert, so wird diese gewonnene Kraft oder Arbeit $= 4 \times 430\,t = 1720\,t^{\text{F. Pf.}}$ sofort zur Beschleunigung des Schwungrades verwendet, wodurch dessen Geschwindigkeit von der vorgeschriebenen, dem regelmäſsigen Gange der Maschine angemessenen mittlern Geschwindigkeit v während dieser Zeit t bis auf jene V gesteigert werden mag. Da nun aber die nöthige Arbeit, um die Masse M des Schwungrades von der Geschwindigkeit v auf jene V zu bringen (§. 186) $= \frac{M}{2g}(V^2 - v^2)$ ist, so muſs dieser Ausdruck dem vorigen gleich seyn, wodurch

$$\frac{M}{2g}(V^2 - v^2) = 1720\,t \text{ wird.}$$

Soll nun die gröſste Geschwindigkeit V von der mittlern v um nicht mehr als den n ten Theil abweichen, nämlich $V = v + \frac{1}{n} v = \frac{n+1}{n} v$ seyn, so muſs

$$\frac{M}{2g}\left(\frac{2n+1}{n^2}\right) v^2 = 1720t, \text{ also (wegen } g = 31\text{) } M = \frac{53320\,t\,n^2}{(2n+1)^{2}} \text{ seyn.}$$

Im Durchschnitt kann man hier $n = 15$ bis 20 setzen, obschon englische Ingenieure darin weiter gehen, und ohne erst eine solche Rechnung durchzuführen, für n den Werth 30 zu nehmen pflegen.

Daſs in dieser Formel v in Fuſsen auszudrücken ist, und M in Pfunden erhalten wird, erhellet von selbst.

Anmerkung. Sammelt man bei einem Schwungrade, wie es z. B. öfter bei Prägwerken geschieht, die Arbeit durch mehrere Secunden, und bringt dadurch die Masse desselben auf die Geschwindigkeit v; so wird, wenn die ganze Arbeit zur Überwindung eines momentanen Widerstandes benützt oder verwendet wird, dieser bedeutend gröſser als die vorhandene Kraft seyn können. Ist dieser z. B. bei einem Prägwerke $= Q$, und die Tiefe des Eindruckes $= s$, so ist $Qs = \frac{Mv^2}{2g}$, also $Q = \frac{Mv^2}{2gs}$. Für $M = 100$ Pfd., $v = 5$ Fuſs und $s = \frac{1}{2}$ Linie, könnte der Widerstand

$$Q = \frac{2500 \times 144}{31} = 11613 \text{ Pfund seyn.}$$

Auf ähnliche Weise läſst man oft bei Walzwerken das Schwungrad zuerst mehre Male leer herumlaufen, und darin die Arbeit $\frac{Mv^2}{2g}$ ansammeln, bevor man das auszuwalzende Metall zwischen die Walzen bringt, um es mit gehöriger Geschwindigkeit und bei dem nöthigen Hitzgrade durch zu bringen.

Siebentes Kapitel.

Vom Stofse der Körper.

§. 198. Erklärung. Bewegen sich zwei Körper, z. B. zwei Kugeln *C* und *c* (Fig. 155) nach derselben Richtung, und hat die nachfolgende *C* eine gröfsere Geschwindigkeit, als die vorausgehende *c*, so wird die letztere von der erstern eingeholt, und es entsteht im Augenblicke des Begegnens ein Stofs. Der Stofs heifst centrisch oder central, wenn sich die Körper in der geraden Linie bewegen, welche man durch ihre Schwerpuncte ziehen kann, sonst excentrisch; der Stofs wird gerad genannt, wenn im Augenblicke des Stofses die Berührungsflächen beider Körper auf der Richtung ihrer Bewegung senkrecht stehen, im Gegentheile heifst er schief. Die Wirkung des Stofses besteht aber darin, dafs die am und in der Nähe des Berührungspunctes liegenden materiellen Theilchen verschoben werden, und sich an den beiden Berührungsflächen kleine Eindrücke bilden. Durch den Widerstand aber, welchen die Körper einer solchen Verschiebung ihrer Theilchen entgegensetzen, ändern sich die Geschwindigkeiten beider Kugeln, so lange bis diese einander gleich geworden sind, wobei die vorausgehende Kugel *c* an Geschwindigkeit gewonnen, die nacheilende aber an dieser verloren hat, und in dem Augenblicke, in welchem diese Gleichheit der Geschwindigkeiten eintritt, haben auch die Eindrücke oder Formänderungen ihr Maximum erreicht.

Sind die Körper vollkommen unelastisch, in welchem Falle die durch den Stofs bewirkten Eindrücke an diesen haften bleiben, so üben die beiden Körper keine weitere Wirkung mehr gegen einander aus, und sie gehen gemeinschaftlich, wie ein einziger Körper, mit einerlei Geschwindigkeit fort. Sind dagegen die Körper elastisch, d. h. suchen die verdrängten materiellen Theilchen ihre ursprüngliche Lage wieder einzunehmen, oder die Körper nach dem Aufhören der pressenden oder stofsenden Kraft ihre ursprüngliche Form entweder ganz oder zum Theil wieder herzustellen (vollkommene oder unvollkommene Elasticität); so entsteht noch eine zweite gegenseitige Einwirkung, indem sich die Kugeln dabei so lange von einander entfernen, bis die entstandenen Eindrücke, so weit es nach dem Elasticitätsgrade dieser Körper möglich ist, wieder verschwunden sind. Nach diesem zweiten Act gehen die Kugeln mit ungleicher Geschwindigkeit fort, und zwar die gestoſsene Kugel c mit einer gröſsern, die anstoſsende C mit einer kleinern, als die gemeinschaftliche Geschwindigkeit in dem Augenblicke der gröſsten Zusammendrückung war.

Obschon wir aber weder vollkommen unelastische, noch vollkommen elastische Körper kennen, so müssen wir dennoch zur Vereinfachung und Erleichterung der Untersuchung beim Stoſse der Körper diese beiden Zustände voraussetzen. Auch betrachten wir hier nur jenen Fall, in welchem die Berührung beim Stoſse bloſs in einem einzigen Puncte Statt findet, so wie endlich nur den geraden, centralen Stoſs.

§. 199. Stoſs unelastischer Körper. Es seyen m und m' die Massen der beiden Kugln C und c, welche sich nach einerlei Richtung von C gegen c in der durch ihre Schwer- oder Mittelpuncte gehenden geraden Linie (wodurch ein gerader und centraler Stoſs entsteht) mit den Geschwindigkeiten v und v', wobei $v > v'$ seyn soll, bewegen. Da die Kräfte, welche die Massen m und m' in Bewegung gesetzt haben (§. 132), durch mv und $m'v'$ ausgedrückt werden; da ferner die beiden Kugeln nach dem Stoſse wie eine einzige Masse $m+m'$, mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit, welche V heiſsen mag, fortgehen, und da endlich die Summe der bewegenden Kräfte durch den Stoſs nicht geändert wird; so ist

$$(m + m')V = mv + m'v',$$

und daraus $$V = \frac{mv + m'v'}{m + m'} \quad \ldots (1.$$

d. h. die nach dem Stoſse eintretende gemeinschaftliche Geschwindigkeit ist die Summe aus den bewegenden Kräften dividirt durch die Summe der Massen.

Anmerkung. Da die vorausgehende Kugel durch den Stoſs die Geschwindigkeit $V - v'$, folglich an bewegender Kraft $m'(V - v')$ gewinnt, dagegen die nachfolgende die Kraft $m(v - V)$ verliert, und da dabei Gewinn und Verlust gleich groſs seyn müssen, so ist $m'(V - v') = m(v - V)$, woraus für V wieder der vorige Werth (1 folgt.

§. 200. Besondere Fälle. Bewegen sich die beiden Kugeln gegen einander, so darf man in der vorigen Formel bloſs die Geschwindigkeiten mit entgegengesetzten Zeichen einführen, und

z. B. v positiv und v' negativ nehmen; dadurch erhält man

$$V = \frac{mv - m'v'}{m + m'} \ldots (2,$$

und je nachdem dabei V positiv oder negativ ausfällt, wird die Bewegung nach dem Stofse im Sinne von v (d. i. von C gegen c) oder von v' (von c gegen C) Statt finden.

Sollen die Kugeln nach dem Stofse liegen bleiben, jede also ihre bewegende Kraft gänzlich verlieren, so mufs $mv - m'v' = o$, d. i. $mv = m'v'$, oder $v : v' = m' : m$ seyn, woraus also folgt, dafs zwei Körper dieselbe bewegende Kraft oder die gleiche Gröfse der Bewegung haben (woher eigentlich auch diese letztere Benennung genommen ist), wenn die Producte aus den Massen in ihre Geschwindigkeiten gleich grofs sind, oder wenn sich die Geschwindigkeiten verkehrt wie ihre Massen verhalten. (Vergl. §. 132.)

Im Falle die Kugel c oder Masse m' ruht, ist $v' = o$, daher nach den beiden vorigen Formeln:

$$V = \frac{mv}{m + m'} \ldots (3.$$

Ist dabei die anstofsende Masse m gegen die ruhende m' (wie z. B. beim Eisgange oft die Eismasse gegen ein Brückenjoch oder ein sonstiges Hindernifs, welches man auf eine ruhende Masse reduciren kann) sehr grofs, so kann man in der letzten Formel näherungsweise m' gegen m auslassen, und man erhält dann sehr nahe $V = v$.

Aufgabe. Bei einer Kunstramme (Schlagmaschine zum Einrammen der Pfähle) fällt der Hoyer oder Rammbär, dessen Masse $= M$ ist, von der Höhe h auf den einzurammenden Pfahl von der Masse m, welcher als unelastisch angesehen wird; wenn dieser nun auf den letzten Schlag um die Gröfse s in das Erdreich eindringt, so ist die Frage, welche ruhige Belastung er, ohne noch tiefer einzudringen, ertragen kann?

Da der Hoyer oder Rammklotz durch den freien Fall (§. 142, Form. 3) die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh} \ldots (r$ erlangt, so gehen dieser und der Pfahl nach dem Stofse mit der Geschwindigkeit (obige Formel 3) $V = \frac{Mv}{M + m}$ fort, und es ist nach §. 185 die nöthige Wirkung um der (dem Gewichte nach ausgedrückten) Masse $M + m$ diese Geschwindigkeit V zu benehmen $= (M + m) \frac{V^2}{2g}$. Sieht man nun den mittlern Widerstand, welchen das Erdreich dem Eindringen des Pfahles entgegensetzt, als eine constante Kraft P an, so ist die Wirkung dieses

Widerstandes während des Weges s, nach §. 172 (Gleich. m) $= Ps$, folglich, da beide Wirkungen einander gleich seyn müssen $(M + m) \times \frac{V^2}{2g} = Ps$, oder wenn man für V den vorigen Werth, und anstatt des dabei enstehenden Bruches $\frac{V^2}{2g}$ aus der Relation r seinen Werth h setzt und abkürzt, auch $\frac{M^2 h}{M + m} = Ps$. Fügt man endlich, mehr zur Vervollständigung der theoretischen Entwickelung, als dafs es von erheblichem Einflusse wäre, im ersten Theile noch die Wirkung $(M + m) s$, welche nach dem Stofse durch das Gewicht des Pfahles und jenes des durch kurze Zeit darauf ruhenden Rammklotzes hinzu, so erhält man:

$$\frac{M^2 h}{M + m} + (M + m) s = Ps \ldots (4,$$

aus welcher Relation sowohl die mit dem Widerstande des Bodens im Gleichgewichte stehende Belastung des Pfahles $P - m$, wenn die Gröfse s, um welche der Pfahl bei dem letzten Schlag in den Boden eingedrungen ist, als auch umgekehrt diese Gröfse s bestimmt werden kann, wenn die Last $P - m$, welche mit dem Widerstande des Bodens im Gleichgewichte stehen soll, gegeben ist.

Anmerkung. Mit Rücksicht auf den Umstand, dafs jeder einzurammende Pfahl in der Wirklichkeit bis zu einer gewissen Grenze elastisch und zusammendrückbar, also nicht absolut hart oder unelastisch ist, wird die vorige Relation (4 noch zusammengesetzter, und es läfst sich diese mit Benützung einiger Sätze, welche erst im zehnten Kapitel, bei der Lehre der Festigkeit der Materialien vorkommen können, auf folgende Weise ableiten.

Bezeichnen, wie vorhin, M und m die dem Gewichte nach ausgedrückten Massen des Rammklotzes und Pfahles, h die Fallhöhe des erstern, s den Betrag, um welchen der Pfahl auf einen Schlag in den Boden eindringt, P den Widerstand, welchen dabei der Boden dem Pfahle entgegensetzt; ferner a den Querschnitt und l die Länge des Pfahles, $\mathfrak{M}$ der dem Materiale, woraus der Pfahl besteht, entsprechende Modul der Elasticität (§. 252), und e die Gröfse, um welche der Pfahl auf einen Schlag zusammengedrückt wird (wobei die Gewichte gleichmäfsig in Pfunden oder Centnern, so wie die Längen und Flächen in Zollen und Quadratzollen oder in Fufsen und Quadratfufsen auszudrücken sind) — so kann man, da der Widerstand, welchen der als elastisch angenommene Pfahl der Zusammendrückung entgegensetzt, gleichförmig von 0 bis P zunimmt, den mittlern Werth dieses Widerstandes, welcher durch den ganzen Weg e als constant anzusehen ist, gleich $\frac{1}{2} P$ setzen, wodurch die Wirkung dieses Widerstandes $= \frac{1}{2} Pe$ wird.

Mit Rücksicht auf diese Compression e sinkt der Rammklotz auf jeden Schlag nicht blofs um die oben angenommene Gröfse s, sondern um $s + e$, so wie auch der Pfahl dabei (da dessen Schwerpunct wegen der bloſsen Zusammendrückbarkeit des Pfahles um $\frac{1}{2}e$ tiefer geht) um $s + \frac{1}{2}e$ herabgeht. Man erhält daher anstatt der obigen Relation (4, wobei der Kopf des Pfahles immer noch als unelastisch angenommen wird, die nachstehende:

$$\frac{M^2 h}{M + m} + M(s + e) + m(s + \tfrac{1}{2}e) = Ps + \tfrac{1}{2}Pe,$$

welche offenbar in die obige übergeht, wenn man $e = o$ setzt.

Setzt man nun für die Zusammendrückung e (die unter gleichen Umständen mit der Ausdehnung als gleich groſs angenommen wird) den im §. 252 angegebenen Werth $e = \frac{lP}{\mathfrak{M}a}$, und bestimmt dann aus dieser Relation beziehungsweise P und s; so erhält man:

$$P = \left(M + \tfrac{1}{2}m - \frac{\mathfrak{M}as}{l}\right)$$
$$+ \sqrt{\left[\left(M + \tfrac{1}{2}m - \frac{\mathfrak{M}as}{l}\right)^2 + \frac{2\mathfrak{M}a}{l}\left(\frac{M^2 h}{M+m} + (M+m)s\right)\right]}$$

und $s = \left[\frac{M^2 h}{M + m} - \frac{Pl}{\mathfrak{M}a}(\tfrac{1}{2}P - [M + \tfrac{1}{2}m])\right] : [P - (M + m)]$.

Setzt man in dieser letztern Relation $s = o$ und bestimmt aus der entstehenden Gleichung den Quotienten $\frac{m}{M}$, so erhält man, wegen

$$\left(\frac{m}{M}\right)^2 + \frac{m}{M} = \frac{2\mathfrak{M}ah}{P^2 l}m,$$

oder wenn man im zweiten Theile $m = alk$ setzt, wo k das Gewicht der cubischen Einheit des Materiales bezeichnet, woraus der einzurammende Pfahl besteht:

$$\frac{m}{M} = \tfrac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{\left(1 + \frac{8\mathfrak{M}ka^2 h}{P^2}\right)}\right],$$

Eben so ist umgekehrt für $\frac{m}{M} = n$ unter dieser Voraussetzung:

$$P = \sqrt{\left(\frac{2\mathfrak{M}a^2 kh}{n + n^2}\right)},$$

wodurch sofort das Verhältniſs zwischen den Gewichten des Rammklotzes und Pfahles bestimmt ist, bei welchen der Pfahl, unter Annahme eines gewissen Werthes für P, nicht mehr weiter in den Boden eindringen kann.

In der Anwendung legt man einem solchen Pfahle der Sicherheit wegen nur den vierten bis zehnten, in besondern Fällen selbst nur den zwanzigsten Theil von jener Last P auf, welche mit dem Widerstand des Bodens im Gleichgewichte steht.

1. Wird z. B. ein 8 Centner schwerer Pfahl auf eine solche Weise eingerammt, daſs der 12 Centner schwere Rammklotz von einer Höhe von 4 Fuſs so lange darauf fällt, bis der Pfahl in der letzten Hitze von 25 Schlägen nur mehr um 2 Zoll, also auf den letzten Schlag um $\frac{2}{25}$ Zoll oder um

$\frac{1}{150}$ Fuſs fortrückt oder in den Boden eindringt, so folgt, wenn der Pfahl 20 Fuſs lang ist, 1 Quadratfuſs im Querschnitt hat und aus Eichenholz besteht, wovon der Cubikfuſs 40 Pfund wiegt, aus der ersten dieser drei Formeln, wegen $M = 12$, $m = 8$, $h = 4$, $l = 20$, $a = 1$, $s = \frac{1}{150}$ und (S. 218, wo sich die Zahlen auf 1 Quadratzoll Querschnitt und auf Pfunde beziehen) $\mathfrak{M} = 144 \times 14000$ sofort $P = 1846{\cdot}6$ Centner.

2. Soll zweitens einer Pilote von denselben, im vorigen Beispiele angenommenen Dimensionen und den gleichen Verhältnissen beim Einrammen derselben eine Last von 585 Centner aufgelegt werden, und verlangt man dabei eine vierfache Sicherheit, so, daſs der Boden diesem Pfahl zuletzt einen Widerstand von $4 \times 585 = 2340$ Centner entgegensetzen soll; so erhält man aus der zweiten dieser Formeln, wegen $P = 2340$ und den vorigen Werthen von M, m, h, l, a und $\mathfrak{M}$ sofort $s = {\cdot}000868$ Fuſs oder nahe $\frac{1}{100}$ Zoll, so daſs der Pfahl in der letzten Hitze von 25 Schlägen nur mehr um $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ Zoll eindringen darf.

3. Soll endlich für einen Widerstand des Bodens von $P = 5000$ Centner das Verhältniſs von $m : M$ gefunden werden, für welches der Pfahl m durch den 15 Fuſs hoch herabfallenden Rammklotz M nicht weiter in den Boden eindringen kann; so darf man nur in der dritten der drei genannten Formeln $P = 5000$, $k = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ und $h = 15$ setzen, so erhält man nahe $\frac{m}{M} = {\cdot}6$, so, daſs, wenn der Pfahl 6 Centner wiegt, der Rammklotz sofort 10 Centner schwer seyn muſs.

§. 201. Verlust an lebendiger Kraft durch den Stoſs. Die Summe der lebendigen Kräfte beider Massen vor dem Stoſse ist (§. 159, Anmerk.) $mv^2 + m'v'^2$, und nach dem Stoſse ist diese Kraft $= (m + m') V^2 = (m + m') \frac{(mv + m'v')^2}{(m + m')^2}$. Zieht man diesen Ausdruck von dem ersten ab und bezeichnet die Differenz, d. i. den Verlust an lebendiger Kraft beim Stoſse unelastischer Körper mit d; so ist nach allen Reductionen

$$d = \frac{mm'(v - v')^2}{m + m'} \quad (4.$$

§. 202. Stoſs vollkommen elastischer Körper. Theilt man die Wirkung des Stoſses solcher Körper in zwei Perioden, in deren erstern die Körper an ihren Berührungsflächen zusammengedrückt, und in der zweiten zur Herstellung ihrer ursprünglichen Form mit gleicher Kraft und Geschwindigkeit wieder ausgedehnt werden; so geschieht in der ersten Periode genau das, was bei den unelastischen Körpern Statt hat, es gewinnt nämlich die vorausgehende Kugel, wenn wir die Bezeichnung der vorigen beiden Paragraphe beibehalten, die

Geschwindigkeit $V - v'$, während die nachfolgende jene $v - V$ verliert. Durch den Act der zweiten Periode des Stoſses aber gewinnt die erstere Kugel abermals, und zwar aus gleichem Grunde die Geschwindigkeit $V - v'$, und die zweite verliert nochmals die Geschwindigkeit $v - V$, so, daſs wenn C' und C die Geschwindigkeiten der gestoſsenen und anstoſsenden Kugel nach dem Stoſse bezeichnen, sofort $C' = v' + 2(V - v') = 2V - v'$ und $C = v - 2(v - V) = 2V - v$ ist, wobei V den in (§. 199, Gleich. 1) angegebenen Werth besitzt.

§. 203. Besondere Fälle. Für $m = m'$ ist

$$V = \frac{v + v'}{2}, \text{ also } C = v' \text{ und } C' = v,$$

d. h. die Geschwindigkeiten haben sich verwechselt. Dieſs gilt auch noch für den Fall, in welchem eine der beiden Kugeln, z. B. jene m' ruht, weil dafür $v' = o$, also $C = o$ und $C' = v$ wird.

Ist für ungleiche Massen $v' = o$, so ist

$$C = \frac{(m - m')v}{m + m'} \text{ und } C' = \frac{2mv}{m + m'};$$

ist nun die ruhende Masse m' sehr bedeutend gegen jene m, so nähert sich von diesen beiden Brüchen der erstere immer mehr und mehr dem Werthe $C = -v$, und der letztere $C' = o$, je mehr man m als Null ansehen kann; hieraus folgt, daſs der anstoſsende Körper in diesem Falle nahe mit derselben Geschwindigkeit zurückspringt, dagegen der angestoſsene Körper so gut wie keine, oder nur eine äuſserst kleine Geschwindigkeit erhält. Ist der Körper M fest oder unbeweglich, so tritt die vorige Bedingung vollkommen ein, indem es so viel ist, als ob M unendlich groſs wäre.

Aus diesem Grunde legt man oft unter jene Massen, welche Stöſse auszuhalten haben, elastische Körper, wie z. B. unter die Schmiede-Amboſse hölzerne Pfosten, damit der Hammer immer wieder zurückgeworfen werde. Auch erklärt sich hieraus, daſs ein horizontal liegender Mensch, welcher nur an beiden Enden gestützt ist oder aufliegt, und auf seiner Brust einen Amboſs trägt, die mit einem Hammer darauf geführten Schläge um so weniger empfindet, je schwerer der Amboſs ist.

§. 204. Durch den Stoſs vollkommen elastischer Körper *findet* **kein Verlust** *an lebendiger Kraft Statt.* Sucht man wieder, wie im §. 201, die vorhandenen lebendigen Kräfte beider Massen vor und nach dem Stoſse, so ist jene vor dem Stoſse $= mv^2 + m'v'^2$, und die lebendige Kraft nach dem Stoſse

$$= mC^2 + m'C'^2 = m(2V - v)^2 + m'(2V - v')^2 = mv^2 + m'v'^2,$$

wenn man nämlich für V wieder den Werth aus §. 199 setzt und reducirt; da nun diese Kraft nach dem Stoſse genau eben so groſs, als vor dem Stoſse ist, so findet hier in der That kein Verlust an lebendiger Kraft, folglich auch kein Verlust an Wirkung oder Arbeit Statt.

§. 205. Stoſs von unvollkommen elastischen Körpern. Ein vollkommen elastischer Körper, z. B. eine solche Kugel, würde, gegen eine absolut harte Ebene mit der Geschwindigkeit v normal gestoſsen, mit derselben Geschwindigkeit v zurückspringen. Bei einer unvollkommenen Elasticität dagegen wird diese letztere Geschwindigkeit nur einen gewissen Theil von der anfänglichen v betragen, und $= nv$ seyn, wo $n < 1$ ist.

Bei dem Stoſse solcher Körper wird in der ersten Periode der gestoſsene Körper wieder (genau wie bei unelastischen Körpern) die Geschwindigkeit $V - v'$ gewinnen, und der anstoſsende Körper jene $v - V$ verlieren; durch die in der zweiten Periode entstehende Ausdehnung geht die letztere mit der Geschwindigkeit $n(v - V)$, und verliert sonach von seiner Geschwindigkeit im Ganzen

$$v - V + n(v - V) = (n + 1)(v - V),$$

während der gestoſsene Körper die Geschwindigkeit

$$V - v' + n(V - v') = (n + 1)(V - v')$$

gewinnt. Die Geschwindigkeiten der beiden Massen m und m' sind also nach dem Stoſse beziehungsweise

$$C = v - (n + 1)(v - V) = V - n(v - V), \text{ und}$$

$$C' = v' + (n + 1)(V - v') = V + n(V - v').$$

Der Verlust an lebendiger Kraft ist $d = \dfrac{(1 - n^2)\, mm'(v - v')^2}{m + m'}$.

Für $n = 1$ erhält man daraus wieder die analogen Formeln für vollkommen elastische, für $n = o$ jene für unelastische Körper.

Anmerkung. Die vollkommen elastischen Körper erstatten also jene Arbeit wieder, welche zu ihrer Zusammendrückung verwendet wurde, während die unvollkommen elastischen oder unelastischen Körper davon beziehungsweise nur einen Theil oder gar nichts ersetzen, so, daſs also ein Verlust an Arbeit entsteht, welcher durch $\frac{d}{2g}$ gemessen wird, wenn d den durch den Stoſs herbeigeführten Verlust an lebendiger Kraft bezeichnet, und dieser Verlust wird lediglich zur Formänderung der Körper, die aber selten beabsichtigt oder gewünscht wird, verwendet.

Auch läfst sich einsehen, wie elastische Körper eine gewisse Arbeit aufnehmen und aufbewahren können, um sie unter andern Umständen nach und nach wieder zurück zu geben, wie es z. B. mit dem Wärmestoff des Wasserdampfes, ferner den Stahlfedern der Uhren u. s. w. der Fall ist.

§. 206. Mittelpunct des Stofses. Sind an den Puncten A, A' (Fig 138) einer um C mit gleichförmiger Bewegung in der Ebene ACB schwingenden Geraden AC die Massen m und m' angebracht, und soll in dieser der Punct F gefunden werden, in welchem sie gegen einen festen Widerstand, oder auch, auf welchen ein Körper stofsen kann, ohne dafs dadurch der Punct oder die Achse C eine Erschütterung oder Rückwirkung (Prellung) erfährt, folglich der Stofs ganz und gar durch die trägen Massen m, m' aufgehoben wird; so sey $CA = a$, $CA' = a'$ und $CF = x$, ferner seyen v und v' die Geschwindigkeiten, welche die Massen m und m' besitzen, mithin

$$v : v' = a : a' \ldots (1.$$

Die bewegenden Kräfte P und P', welche in diesen Massen m, m' die Geschwindigkeiten v, v' erzeugen, sind (§. 132) den Producten mv und $m'v'$ proportional, so, dafs

$$P : P' = mv : m'v' = ma : m'a'$$

(wegen Gleich. 1), oder

$$P.m'a' = P'.ma \ldots (2$$

Statt findet.

Soll nun durch einen Stofs auf den Punct F die Achse C keinen Druck oder Stofs erleiden, so darf dabei um den Punct F keine Drehung Statt finden, folglich müssen die statischen Momente der Kräfte P und P' in Beziehung auf diesen Punct einander gleich, d. i. es mufs

$$P.AF = P'.A'F \quad \text{oder} \quad P(a - x) = P'(x - a')$$

seyn. Diese Gleichung durch die vorige (2 dividirt gibt

$$\frac{a - x}{m'a'} = \frac{x - a'}{ma}, \text{ und daraus folgt } x = \frac{ma^2 + m'a'^2}{ma + m'a'}.$$

Genau eben so erhält man, wenn ein ganzes System von materiellen Puncten m, m', m'' ... um C schwingt, deren Abstände davon a, a', a'' ... sind, für die Entfernung dieses in der Ebene, welche durch den Schwerpunct des Systems senkrecht auf die Achse geht, angenommenen Punctes F, welchen man den **Mittelpunct des Stofses** nennt, von der Drehachse:

$$x = \frac{ma^2 + m'a'^2 + m''a''^2 + \ldots}{ma + m'a' + m''a'' + \ldots}.$$

Handelt es sich nicht bloſs um einzelne materielle Puncte, sondern um einen Körper, dessen Masse $= M$ ist, und wovon der Schwerpunct von der Drehungsachse den Abstand d hat; so ist

$$ma^2 + m'a'^2 + \ldots = \mathfrak{M}$$

das Moment der Trägheit, und

$$ma + m'a' + \ldots = Md$$

das statische Moment des im Schwerpuncte vereinigten Gewichtes des Körpers von der Drehungsachse, folglich $x = \frac{\mathfrak{M}}{Md}$.

Da nun aber auf diese Weise der Mittelpunct des Stoſses F, wie der Ausdruck in §. 170 zeigt, genau so, wie der Mittelpunct des Schwunges bestimmt wird, so fallen diese beiden Puncte in einen zusammen, oder sie bilden nur einen einzigen Punct.

Führt man mit einem Hammer einen Streich gegen einen Körper, so muſs man diesen so treffen, daſs der Schlag durch den Mittelpunct des Stoſses des Hammers geht, wenn man in der Hand keine Prellung erfahren will. Dasselbe muſs überhaupt auch bei Hammerwerken beobachtet werden, weil sonst in der Achse oder Hammerhülse nachtheilige Erschütterungen entstehen.

Man findet mit Rücksicht auf diese Eigenschaft den Mittelpunct des Stoſses eines Hammers durch Versuche, indem man den Hammer auf die Kante eines Prisma schlagen läſst, und dabei das Prisma gegen die nur leicht gehaltene Umdrehungsachse des Hammers so lange hin und her schiebt, bis in dieser keine Erschütterung oder Bewegung wahr zu nehmen ist; oder noch einfacher, indem man diesen Punct als Mittelpunct des Schwunges nach §. 153 behandelt und bestimmt.

Aufgabe. Der Körper CB (Fig. 130), dessen Masse M ist, kann um eine horizontale, durch C gehende, auf der Ebene der Figur senkrechte Achse, wie ein Pendel schwingen; wenn nun gegen dieses ruhende zusammengesetzte Pendel eine Kugel E, von der Masse m in der Richtung ED, wobei diese Gerade in der Ebene der Figur liegen soll, gerade und central (in Beziehung auf E) mit der Geschwindigkeit v anstöſst, so soll die Winkelgeschwindigkeit u gefunden werden, mit welcher sich das Pendel im ersten Augenblicke nach dem Stoſse fortbewegt.

Es sey der Hebelsarm der Stoſskraft $CD = a$, das Moment der Trägheit des Pendels in Beziehung auf die Achse C gleich $\mathfrak{M}$, und die auf den Punct D reducirte Masse M desselben $= M'$, also (§. 159)

$$M' = \frac{\mathfrak{M}}{a^2} \ldots (n;$$

so ist der Erfolg des Stoſses gerade so, als ob eine in D befindliche ruhende Masse M' von der Kugel oder Masse m mit der Geschwindigkeit v in der Richtung ED gestoſsen würde, welche im ersten Augenblicke nach dem Stoſse in derselben Richtung (als Tangente des Kreises, welchen der

Punct D um C beschreibt) mit dieser Geschwindigkeit ausweicht; nimmt man daher beide Körper als unelastisch an, so hat man (§. 200, Formel 3) $V = \frac{mv}{M' + m}$, oder wenn man für M' den Werth aus (n setzt, und gleich die Winkelgeschwindigkeit u des Pendels bestimmt, also $V = au$ setzt, und mit a abkürzt:

$$u = \frac{mav}{\mathfrak{M} + ma^2} \ldots (o.$$

Benützt man nun ein solches Pendel von grofser Masse nach Robins, in welchem Falle es dann das ballistische Pendel genannt wird, zur Bestimmung der Geschwindigkeit der Gewehr- und Geschützkugeln; so sey α der Elongationswinkel, welchen das Pendel durch den angenommenen Stofs von der Kugel m beschreibt, und der Abstand des Mittelpunctes des Schwunges F des Pendels von der Masse $M + m$ (weil nämlich die abgeschossene Kugel m im Pendel stecken bleibt) von der Achse C, d. i. $CF = l$, so erhebt sich dabei dieser Punct F um den Sinusversus des zugehörigen Bogens $l\alpha$, nämlich um $l \, Sinv \, \alpha = l\,(1 - Cos\,\alpha)$, wozu (§. 142, Gleich. 2 und §. 143) eine Anfangsgeschwindigkeit

$$V' = \sqrt{[2gl\,(1 - Cos\,\alpha)]},$$

also eine Winkelgeschwindigkeit

$$(\text{wegen } V' = lu')\ u' = \frac{V'}{l} = \sqrt{\left[\frac{2g}{l}(1 - Cos\,\alpha)\right]}$$

gehört, und da diese der vorigen in (1 ausgedrückten gleich seyn mufs, so hat man, $u = u'$ gesetzt, und aus der entstehenden Gleichung v bestimmt, für die Geschwindigkeit der ganz nahe auf das Pendel abgeschossenen Kugel

$$v = \frac{\mathfrak{M} + ma^2}{ma} \sqrt{\left[\frac{2g}{l}(1 - Cos\,\alpha)\right]},$$

wobei die Richtung, damit die Achse nicht zu sehr erschüttert wird, möglichst durch den Mittelpunct des Schwunges oder Stofses gehen soll.

Wäre z. B. $a = l = 3$ Fufs, $\alpha = 20$ Grad, $m = 1$, und (am einfachsten nach §. 170, Anmerk. 1 zu finden) $\mathfrak{M} = 5400$ Pfund, so wäre wegen $1 - Cos\,20^\circ = 1 - \cdot 9397 = \cdot 0603$, und $\frac{2g}{l} = \frac{62}{3} = 20\cdot 667$, sofort die Wurzelgröfse $\sqrt{1\cdot 2462} = 1\cdot 116$, und daher

$$v = 1803 \times 1\cdot 116 = 2012 \text{ Fufs}.$$

Achtes Kapitel.

Von der Verzahnung.

§. 207. Zweck und Bedingungen der Verzahnung. Um eine kreisförmige Bewegung in eine ähnliche oder auch geradlinige zu verwandeln, bedient man sich gewöhnlich der verzahnten Räder oder Stangen (§. 103); dabei erhalten die Zähne, je nach den verschiedenen Bedingungen, auch verschiedene Formen. Die gewöhnliche Bedingung, welche man macht, ist die, dafs die Kraft, welche an dem einen Rade wirkt, mit der Last oder dem Widerstand an dem andern Rade beständig im Gleichgewicht stehen, oder die Kraft stets mit gleicher Stärke auf das zweite Rad übertragen werden solle, und dafs, wenn das eine Rad mit gleichförmiger Geschwindigkeit umgedreht wird, auch das zweite Rad eine eben solche Bewegung annehme. Diese Bedingungen würden aber in aller Strenge und ganz einfach erfüllt werden, wenn die Umfänge der unverzahnten (oder gleichsam mit unendlich kleinen Zähnen versehenen) Räder, gegen einander geprefst, sich gegenseitig durch die blofse Reibung (§. 102), ohne über einander zu gleiten, mitnehmen könnten, indem dann durch die gleichförmige Umdrehung des Rades C (Fig. 156) um seine Achse durch eine in A wirkende Kraft P, das zweite Rad, welches im Berührungspuncte a einen constanten Widerstand $= P$ verursacht, ebenfalls um seine Achse gleichförmig umgedreht würde.

Die Form der Zähne mufs also so gewählt werden, dafs die Bewegung der beiden verzahnten Räder eben so, wie durch einfache Berührung der Umfänge der unverzahnten Räder Statt findet.

§. 208. Erklärungen. Laufen die Achsen C und c (Fig. 157) der beiden verzahnten Räder mit einander parallel und bewegen sich die Räder durch das Ineinandergreifen ihrer Zähne eben so, als ob sich die beiden Kreise von den Halbmessern Ca und ca unmittelbar berührten, wobei noch, wie sich zeigen wird, $Ca : ca = m : n$ Statt findet, wenn m und n die Anzahl der Zähne im Rade C und in jenem c bezeichnen; so heifsen diese beiden Berührungskreise die *primitiven* oder *mechanischen* oder *Grund-* oder auch, weil man auf ihnen die Eintheilung der Zähne vornimmt, die *Theilkreise* oder *Theilrisse*.

Sind die Zähne, so wie die Zeichnung zeigt, gebildet, so wird der über dem Theilrifs hervorragende abgerundete Theil ebe' der *Kopf*, und der nach einwärts gegen den Mittelpunct gerichtete gerade Theil $e\,e'\,g\,g'$ die Flanke, öfter auch die Brust oder Wurzel des Zahnes genannt; endlich heifst (wie bereits in §. 103 erwähnt) von zwei verzahnten Rädern, die hier insbesondere, weil die Zähne auf den äufsern Umfängen radial angebracht sind, Stirnräder, sonst aber, wenn die Zähne oder Kämme auf den Kreisebenen senkrecht stehen, Kron- oder Kammräder genannt werden, das kleinere davon gewöhnlich das Getrieb. Auch wird in dem hier angenommenen Falle die Verzahnung eine Cylinderverzahnung genannt, während, wenn die Achsen der beiden in einander greifenden Räder nicht parallel laufen, sondern einen Winkel bilden, die Kegelverzahnung und dabei die Kegel-, conischen oder Winkelräder angewendet werden.

§. **209.** Um nun zu sehen, wovon die obigen Bedingungen, nämlich, dafs die von einem Rad auf das andere zu übertragenden Pressungen constant, und die Bewegung gleichförmig sey, abhängen, so seyen C und c (Fig. 158) die Mittelpuncte der beiden Räder (d. h. die Puncte, durch welche die auf den Kreisebenen senkrecht stehenden Achsen gehen), CA und cA die Halbmesser der primitiven oder Theilkreise und NO und no zwei steife, mit diesen Kreisen fest verbundene krumme Linien von der Art, dafs durch die beständige Berührung dieser Curven, wobei der Druck im Berührungspuncte fortwährend in der Richtung der Normale beider Curven Statt findet, die Bewegung des Rades C auf jenes c in der erwähnten Weise übertragen werde. Es sey P die im Theilkreise zur Bewegung des Rades C nöthige Kraft und P' der durch die Mittheilung der Bewegung erzeugte Widerstand oder Gegendruck von Seite des zweiten Rades c, welchen man sich ebenfalls auf den Umfang des Theilkreises wirksam oder reducirt denkt; so ist, wenn man aus C und c auf die durch den Berührungspunct M beider Curven gehenden Normale Dd die Perpendikel CD und cd zieht, der im Puncte M Statt findende Druck von Seite der bewegenden Kraft P gleich dem von P auf D reducirten Druck; heifst dieser p, so ist

$$P : p = CD : CE = CD : CA \ldots (n.$$

Dieser auf die Curve no übertragene Druck p bringt nach der Voraussetzung auf der Peripherie An den Druck P' hervor, und da $p : P' = cA : cd$ ist, so erhält man durch Zusammensetzung dieser beiden Proportionen $P : P' = CD \,.\, cA : CA \,.\, cd$, oder wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke CBD und cBd, woraus $CD : cd = CB : cB$ folgt, auch $P : P' = CB \,.\, cA : CA \,.\, cB$.

Sollen aber die Räder so, wie durch die bloſse Berührung der beiden primitiven oder Grundkreise geführt werden, also der Widerstand und die Kraft immer gleich groſs, d.i. $P' = P$ seyn, so muſs (zu Folge dieser letzten Proportion) sofort

$$CB \, . \, cA = CA \, . \, cB, \quad \text{d. i.} \quad CA : CB = cA : cB$$

Statt finden, eine Bedingung, welche nur möglich ist, wenn der Punct B mit jenem A zusammenfällt, d. h. wenn die Normale Dd fortwährend durch den Berührungspunct A der beiden Grundkreise geht. Liegt B zwischen c und A, so ist $P' < P$, liegt dagegen B zwischen A und C, so ist umgekehrt $P' > P$ Da nun bei der Anwendung einer solchen Verzahnung mit ganz willkürlichen Curven NO und no der Punct B bald zwischen C und A, bald zwischen A und c fällt; so würde in der Wirkung der bewegenden Kraft bei Übertragung des Widerstandes von einem Rad auf das andere eine Ungleichförmigkeit eintreten, welche man zu vermeiden suchen muſs.

§. 210. Durch die Anwendung aber von solchen Curven, für welche die gemeinschaftliche, durch den Berührungspunct M der Curven gehende Normale beständig durch den Berührungspunct A der beiden Grundkreise geht, wird auch die zweite der oben gemachten Bedingungen in Beziehung auf gleiche Umfangsgeschwindigkeiten der beiden Räder erfüllt; denn sind V und v die Umfangsgeschwindigkeiten der Grundkreise CA und cA und ist V' die Geschwindigkeit des Punctes D, so ist $V : V' = CA : CD$, und weil V' zugleich auch die Geschwindigkeit des Punctes d ist, auch $V' : v = cd : cA$, folglich, wenn man diese Proportionen zusammensetzt,

$$V : v = CA \, . \, cd : CD \, . \, cA,$$

geht aber, wie vorausgesetzt wird, die Normale Dd durch den Punct A, so ist $CD : cd = CA : cA$ oder $CD \, . \, cA = cd \, . \, CA$, folglich ist auch $V = v$ gerade so, als ob die Bewegung der Räder durch die einfache Berührung der Grundkreise bewirkt worden wäre.

§. 211. Bestimmung der Krümmung der Zähne. Es ist leicht einzusehen, daſs man von den beiden Curven NO und no die eine ganz beliebig wählen kann, wenn man dann die andere nur so annimmt, daſs (zu Folge der beiden vorhergehenden Paragraphen) die in jeder Position durch den Berührungspunct beider Zähne gezogene gemeinschaftliche Normale beständig durch den Berührungspunct der beiden Grundkreise geht. Denn ist ONE (Fig. 159) eine beliebige Curve für die Zähne des Rades C, ferner NA die Entfernung von einem Zahnmittel bis zum nächst folgenden (die sogenannte Theilung), und Bogen *An* (auf dem Theilkreis des zweiten Rades) = Bogen *AN*, so handelt es sich um die Auffindung einer durch *n* gehenden Curve *nMo*, welche bei beständiger Berührung mit der erstern Curve *OME* von dieser nach den obigen Bedingungen fortgeführt wird. Zieht man also (da diese immer durch *A* gehen soll) durch den Punct *A* die Normale *AM* an die Curve *ONE*, so mufs diese Gerade zugleich auch eine Normale für die gesuchte Curve *nMo* im Berührungspuncte *M* bilden. (Man erhält diese Normale, indem man aus *A* einen Kreisbogen beschreibt, welcher die Curve *ONE* in zwei sehr nahe beisammen liegenden Puncten durchschneidet und den zwischen diesen beiden in der Mitte liegenden Punct *M* mit *A* verbindet.) Theilt man die Kreisbögen *AN* und *An* in eine gleiche Anzahl gleicher Theile in den Puncten 1, 2..., 1′, 2′...; so kommen bei der gleichförmigen Umdrehung beider Räder um ihre Achsen (oder bei der Wälzung des Bogens *AN* über jenen *An*) nach und nach die Puncte 1, 2... mit jenen 1′, 2′.... in *A* zur Berührung, folglich geht auch die, beiden Curven gemeinschaftliche Normale in diesen Augenblicken durch diese Puncte 1 1′, 2 2′...; beschreibt man demnach aus dem Puncte 1′ als Mittelpunct mit dem kürzesten Abstande des Punctes 1 von der Curve *ONE* (d. i. der Länge der Normale 1 *t*) einen Kreisbogen, so mufs dieser die gesuchte Curve berühren. Macht man dasselbe auch aus den übrigen Puncten 2′, 3′... mit den kleinsten Abständen der Puncte 2, 3... von der Curve *ONE*; so darf man zuletzt nur die Curve *nNo* so ziehen, dafs sie diese sämmtlichen Kreisbögen berührt oder einhüllt.

§. **212. Anwendung der Epicycloide und der Kreisevolvente.** Gewöhnlich sind es nur diese eben genannten beiden Curven, welche man bei der Verzahnung in Anwendung bringt. Was die Epicycloide betrifft, so sey das Rad *c* (Fig. 160) durch jenes *C* so zu bewegen, als ob es durch die blofse Berührung der Theil- oder Grundkreise *CA*, *cA* in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung um seine Achse gedreht würde. Läfst man einen Kreis, welcher nur halb so grofs als der Grundkreis des zweiten oder durch das erste Rad mitzunehmenden Rades *cA* ist, auf dem äufsern oder convexen Umfang des Grundkreises des ersten Rades *CA* wälzen, so beschreibt der Punct *A* dabei die Epicycloide *AN*, dagegen, wenn er auf dem innern oder concaven Umfang des zweiten Kreises *cA* gewälzt wird, die nach dem Mittelpuncte *c* gehende gerade Linie *Ac*.

Ist nun die Curve AN mit dem ersten Kreise C und die gerade Linie Ac mit dem zweiten Kreise c fest verbunden, so wird bei der Umdrehung des Rades C um seine Achse in der angedeuteten Richtung das Rad c durch die successive Berührung der Puncte der Curve AN mit jenen der Geraden Ac eben so mitgenommen und um dessen Achse, wie durch blofse Berührung der beiden Grundkreise umgedreht. Dabei geht die Normale mA des Berührungspunctes der Curve AN, welche letztere, sobald A nach a gekommen ist, die Lage an und die Gerade Ac jene bc annimmt und die Curve in m berührt, indem Amc ein rechter Winkel ist, beständig durch den Punct A. Ferner ist Bogen Am = Bogen Ab (es hat nämlich der Winkel Acb im Kreise c den Bogen Ab und im Kreise o den halben Bogen Am zum Mafs; da nun dieser letztere Kreis nur halb so grofs als der erstere ist, so sind diese beiden Bögen gleich grofs); da nun aber nach der Entstehungsart der Epicycloide auch Bogen Am = Bogen Aa ist, so folgt Bogen Ab = Bogen Aa, so, dafs also auch die Bedingung der gleichen Umfangsgeschwindigkeiten der beiden Grundkreise dadurch erfüllt ist.

Auch kann umgekehrt das Rad C durch jenes c (in entgegengesetzter Richtung) geführt werden, weil dabei immer die Gerade bc die Epicycloide an in einem Punct m der Peripherie des Kreises o berührt und die Verbindungslinie mA zugleich auf mc und der Curve an normal steht.

§. **213.** Was die Anwendung der K r e i s e v o l v e n t e betrifft, so seyen C und c (Fig. 161) wieder die Mittelpuncte der beiden Räder, so wie CA und cA die Halbmesser ihrer Theil - oder Grundkreise. Man ziehe durch den Berührungspunct A irgend eine Gerade Dd, fälle darauf aus C und c die Perpendikel CD, cd, und beschreibe endlich noch aus diesen Puncten C, c mit den Abständen CD, cd als Halbmesser die Kreise. Nun sey NO die Abgewickelte von dem Kreise CD, so ist die Tangente Dd normal auf diese Curve im Puncte m, folglich mufs dieser Punct zugleich auch der Berührungspunct mit der zweiten entsprechenden Curve on seyn. Bei der Umdrehung des Kreises C um seinen Mittelpunct wird die daran befestigte Curve NO mitgeführt, wobei die Gerade Dd fortwährend darauf, also auch auf der zweiten Curve normal bleibt und durch die auf einander folgenden Berührungspuncte beider Curven geht; da aber auf diese Weise die sämmtlichen Normalen der Curve no Tangenten an den Kreis cd bilden, so ist auch diese zweite, der erstern entsprechende Curve on eine K r e i s e v o l v e n t e, und zwar von dem Grundkreise cd.

Da ferner $Dm =$ Bogen DN und $dm =$ Bogen dn ist, und das Verhältnifs von $Dm : dm$ constant bleibt, so rücken die Puncte N und n in ihren Kreisbögen CD und cd, folglich auch, wegen $CA : cA = CD : cd$, die Grundkreise CA und cA immer um gleich viel, d. i. gleichförmig fort, wie es die obige Bedingung im §. 207 verlangt.

Anmerkung. Die nach der Kreisevolvente geformten Zähne bieten noch den eigenthümlichen Vortheil dar, dafs der Druck nicht blofs (§. 209) wie auch bei der Epicycloiden-Verzahnung, von einem Grundkreis auf den andern unverändert übertragen wird, sondern, dafs dieser auch zwischen den Zähnen selbst constant bleibt; denn nach der Proportion n des angezogenen Paragraphes verhält sich der zwischen den Zähnen Statt findende Druck P zu jenem p auf die Grundkreise bezogen, wie (Fig. 158) $CD : CA$, wobei CD veränderlich und CA constant, also auch p variabel ist. Bei Anwendung der Kreisevolvente dagegen ist dieses Verhältnifs $CD : CA$ (weil die Normale im Berührungspuncte der Zähne eine Tangente an beide Kreise CD und CA bildet), folglich auch der Druck p zwischen den Zähnen selbst constant. Daraus folgt jedoch keinesweges, dafs sich die Zähne nach ihrer ganzen Länge gleichmäfsig abnützen werden, sondern diese Abnützung wird an der Wurzel des Zahnes, wo der Wälzungsbogen kleiner ist, gröfser als am Kopfe, wo dieser Bogen gröfser ist.

§. **214.** Wird von den beiden Grundkreisen CA und cA (Fig. 162) der erstere auf den letztern gewälzt, so entsteht die Epicycloide AN, und wenn man sich diese mit dem führenden Kreise c, dagegen den blofsen materiellen Punct A mit dem zu führenden Kreise C fest verbunden denkt, so wird bei der Umdrehung des Kreises c um seinen Mittelpunct in der angezeigten Richtung um den Bogen Aa', die Epicycloide die Lage $a'n$ angenommen und der Kreis C sich durch das Fortschieben des Punctes A um den Bogen $Aa =$ Bogen Aa' (weil die Curve $a'a$ durch Wälzung des Bogens Aa über jenen Aa' entsteht) um seinen Mittelpunct umgedreht haben, dabei geht, zufolge einer bekannten Eigenschaft der Epicycloide, die Normale im Berührungspunct a zugleich auch durch den Punct A, so dafs bei Anwendung dieser Curve für die Krümmung der Zähne des Rades c und von blofsen Puncten im Rade C wieder alle Bedingungen des §. 207 erfüllt werden.

Da nun aber in der Wirklichkeit kein blofser Punct A oder a, d. h. keine steife materielle Linie, deren Querschnitt ein solcher Punct ist, bestehen kann, sondern dafür ein Cylinder, dessen Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r genommen wird; so darf man zu der auf dem vorigen Wege erhaltenen Epicycloide an nur eine Parallele bm im Abstande r ziehen, um die eigentliche den cylindrischen Zähnen des Rades C, welche man dann Triebstöcke nennt, entsprechende Curve der Zähne des Rades c zu erhalten.

§ 215. Bestimmung der Halbmesser der Räder. Sind R und r die Halbmesser der Grund- oder Theilkreise zweier in einander greifender verzahnter Räder, V und v ihre Umfangs-, folglich (§. 127) $C = \frac{V}{R}$ und $c = \frac{v}{r}$ ihre Winkelgeschwindigkeiten, so verhalten sich, weil $V = v$ seyn soll, diese Winkelgeschwindigkeiten verkehrt wie die Halbmesser der Räder. Sind n und n' die gleichzeitigen Umdrehungszahlen und m, m' die Anzahl der Zähne in den Rädern R und r, so hat man offenbar $n : n' = C : c = \frac{1}{R} : \frac{1}{r} = r : R$ und $m : m' = R : r$. Um also die Halbmesser $CA = \mathrm{R}$ und $cA = r$ (Fig. 162) der Grundkreise oder Theilrisse zu erhalten, mufs man die Centrilinie der beiden Räder im Puncte A nach dem geraden Verhältnifs der Anzahl der Zähne, oder im verkehrten Verhältnifs der Umlaufzahlen der Räder C und c theilen. Ist also n die Verhältnifszahl (der Quotient) zwischen der Anzahl der Umdrehungen des kleinern Rades c (des Getriebes) und des gröfsern C, so wird

$$R = nr \ldots (1,$$

und wenn $Cc = D$ gesetzt wird,

$$D = R + r \ldots (2,$$

so dafs man aus diesen beiden Gleichungen von den vier darin vorkommenden Gröfsen zwei bestimmen kann, wenn die beiden übrigen gegeben sind. Sind z. B. n und D gegeben, so ist

$$R = \frac{nD}{n+1} \text{ und } r = \frac{D}{n+1}.$$

§. 216. Dicke der Zähne. Die Dicke der Zähne wird auf dem Umfang des Theilkreises, dagegen ihre Breite nach der Richtung der Radachse, also senkrecht auf die Kreisebene gemessen. Der Zwischenraum zwischen zwei auf einander folgenden Zähnen heifst L ü c k e oder geradezu Z w i s c h e n r a u m. Die Summe aus der Dicke eines Zahnes und eines Zwischenraumes wird T h e i l u n g oder S c h r i f t genannt, und diese mufs sofort auf beiden Grund- oder Theilkreisen gleich grofs oder die nämliche seyn (und zwar immer im Bogen gemessen).

Was nun die Dicke und Breite der Zähne betrifft, so hängt diese von dem Widerstande ab, welchen dieselben zu überwinden haben, und wird dieser nach den im §. 263 anzugebenden Regeln bestimmt.

Damit die Zähne des einen Rades in den Zwischenräumen des andern den nöthigen Spielraum finden, so macht man den Zwischenraum, je nach der Genauigkeit der ganzen Ausführung um $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{15}$ der Zahndicke gröfser. Ist also a die Theilung und d die Dicke der Zähne, so ist, wenn diese in beiden Rädern aus einerlei Material bestehen, $a = d + 1{\cdot}1\, d$ oder auch (bei sehr genauer Ausführung) $a = d + 1{\cdot}067\, d$. Sind die Zähne aus verschiedenem Materiale (z. B. in dem einen Rad aus Holz und in dem andern aus Gufseisen) und sind d und d' die Zahndicken in beiden Rädern, so ist in diesen beiden Fällen:

$$a = d + 1{\cdot}1\, d' \quad \text{oder} \quad a = d + 1{\cdot}067\, d'.$$

Für die Anzahl der Zähne m und m' in den beiden Rädern R und r hat man $m = \frac{2 R \pi}{a}$ und $m' = \frac{2 r \pi}{a} = \frac{m}{n}$, wo n der Quotient aus der Umdrehungszahl des kleinern durch das gröfsere Rad ist.

Da übrigens m und m' nach diesen Formeln selten ganze Zahlen werden, so nimmt man dafür nicht blofs die nächst kleinere ganze, sondern der nöthigen Symmetrie in der Ausführung wegen, auch noch eine durch die Zahl der Radarme theilbare Zahl, wodurch die Zähne um eine unbedeutende Gröfse dicker ausfallen.

Anmerkung. Englische Ingenieure nehmen für gufseiserne Zähne $d = \frac{a}{2{\cdot}1}$ und die Entfernung des Theilkreises vom Radkranze (Höhe der Flanke des Zahns) $h = 1{\cdot}2\, d = \frac{4}{7} a$.

§. 217. Cylinder-Verzahnung nach der Epicycloide.

Es seyen C und c (Fig. 163) die Mittelpuncte der beiden Stirnräder, ferner nach den vorigen Bestimmungen $CA = R$ und $cA = r$ die Halbmesser der Theil- oder Grundkreise des Rades und Getriebes, und $Ag = Ag'$ die Theilung oder Schrift. Nachdem die Dicke der Zähne und Breite der Lücken oder Höhlungen auf beide Theilkreise aufgetragen, und sowohl durch diese sich ergebenden, als auch durch die Halbirungspuncte die Halbmesser von unbestimmter Länge gezogen worden, schreitet man zur Abrundung der Zähne. Die Curve oder Epicycloide An, welche durch die Wälzung des Kreises o (als Erzeugungskreis), dessen Durchmesser $cA = r$ ist, auf dem Theilkreis des Rades (als Grundkreis) C bis zum Durchschnitt n mit dem Halbmesser Cn entsteht, bildet die Krümmung für die Zähne des Rades C; dieser Curve entspricht die gerade Linie Ac als Flanke des Getriebzahnes, an welche sich diese Curve bei der Bewegung des Rades in der angedeuteten Richtung anlegt und das Getrieb c führt.

Eben so bildet die Curve An', welche durch Wälzung des Kreises O, dessen Durchmesser $CA = R$ so grofs wie der Halbmesser des

Theilkreises des Rades C ist, auf dem Theilkreis cA des Getriebes, die Krümmung der Zähne des Getriebes, welcher wieder die Halbmesser CA als Flanken der Radzähne entsprechen.

Damit sich aber die Räder nach beiden Richtungen gleich gut drehen lassen, müssen die Zähne in Beziehung auf die Mittellinien Cn, cn' (eigentlich auf die durch diese Linien auf die Kreisflächen senkrechten Ebenen) symmetrisch geformt werden, so, daſs also diese Mittellinien die Grenzen für die von beiden Seiten in n und n' zusammenlaufenden Krümmungen der Zähne bilden.

Beschreibt man aus C mit dem Halbmesser Cn einen Kreis, so bestimmt dieser die Länge der Zähne des Rades, so wie ein aus c mit dem Halbmesser cn' beschriebener Kreis jene der Getriebszähne. Der zuerst genannte Kreis durchneidet jenen oA im Puncte i und die Centrilinie Oc im Puncte d; beschreibt man daher aus c mit den Entfernungen ci und cd als Halbmesser Kreise, so bestimmt der erstere die Länge der Flanken uw und der letztere die Tiefe der Höhlungen der Getriebszähne. Auf ganz gleiche Weise thun die aus C mit den Halbmessern Ci' und Cd' beschriebenen Kreise dasselbe für die Radzähne. (Dabei werden die Flanken um so kürzer, je gröſser das Rad ist; für einen unendlich groſsen Halbmesser oder eine gezahnte Stange fallen sie ganz weg.)

Die Höhlungen oder Lücken sind sogenannte verlängerte Epicycloiden und entstehen für das Rad durch Wälzung des Theilkreises cA des Getriebes auf dem Theilkreis CA des Rades, wobei jedoch nicht cA selbst, sondern der damit concentrische Kreis vom Halbmesser ci' (welcher die Länge der Getriebszähne bestimmt) der Erzeugende ist.

Für die Höhlungen des Getriebes wird CA auf cA gewälzt und der die Länge der Radzähne bestimmende Kreis Ci ist dabei der Erzeugende.

Anmerkung. In der Praxis wird nur von einem Zahn und einer Höhlung die Zeichnung, und darnach eine Chablone oder Lehre ausgeführt, diese der Reihe nach auf die Theilungspuncte gehörig aufgelegt und die Zähne und Lücken vorgerissen.

Da aber auf diese Weise die Zähne ganz schneidig ausfallen, so kann man sie auch wie in p und p' abstumpfen, und daher auch den Grund der Höhlungen durch einen Kreisbogen beziehungsweise vom Halbmesser cr und Cr' begrenzen. Bei groſsen Rädern geht man damit so weit, wie in s und s', wodurch die Höhlungen ganz wegfallen und die Zähne nur aus dem Kopf oder gekrümmten Theil ux und der Flanke uw bestehen; dabei werden die Höhlungen durch einen Kreisbogen, beziehungsweise vom Halbmesser *cs* und *Cs'* begrenzt. Das Abstumpfen der Zähne soll jedoch nicht weiter getrieben werden, als dafs der über den Theilkreis vorspringende Zahnkopf wenigstens noch die halbe Zahndicke beträgt.

Noch ist zu bemerken, dafs der Eingriff sanfter wird, wenn der nächst folgende Zahn, nachdem der vorhergehende im Begriffe steht auszulassen, seinen Eingriff nicht vor, sondern in der Centrilinie *Cc* beginnt, so, dafs man also, wenn es sich mit den übrigen Bedingungen verträgt, diese Eigenschaft mit berücksichtigen soll. Die Rechnung zeigt, dafs wenn ein Zahngetrieb weniger als 10 Zähne erhält, diese Bedingung selbst bei 50 Zähnen des Rades noch nicht erfüllt werden kann, weil die Radzähne dadurch so nahe an einander kämen, dafs die Zahndicke des Getriebes zu gering ausfiele.

Obschon endlich die mechanische Verzeichnung der Epicycloiden durch Wälzung der betreffenden Kreisbögen zum Behufe der Anfertigung der Chablonen durchaus keiner Schwierigkeit unterliegt, so ziehen es die Practiker doch gewöhnlich vor, diese genauen Curven durch genäherte Kreisbögen zu ersetzen, wofür es mancherlei Vorschriften gibt.

§. 218. Cylinderverzahnung nach der Kreisevolvente. Soll ein Rad mehrere kleinere Räder oder Getriebe von verschiedener Gröfse in Bewegung setzen, so kann die Verzahnung nicht mehr nach der Epicycloide ausgeführt werden, weil diese nach §. 212 nur einer Gröfse des zu führenden Rades gehörig entsprechen kann; in einem solchen Falle wendet man die Kreisevolvente an, bei welcher keine solche Beschränkung eintritt.

Hat man, wie vorhin die Halbmesser der Theilkreise, die Schrift oder Theilung und die Dicke der Zähne bestimmt, liegt ferner der Punct *A* (Fig. 164) in der Centrilinie *Cc* beider Räder und ist *Ab* die Theilung im Getriebe *c*; so ziehe man den Halbmesser *cb* und durch den Berührungspunct *A* der beiden Theilkreise auf *cb* das Perpendikel *EF*, so bildet diese Gerade die gemeinschaftliche Normale aller der gleichzeitig in Berührung befindlichen Zähne, folglich sind die darauf gefällten Perpendikel *CD* und *cd* die Halbmesser der Kreise, von welchen die die Krümmung der Zähne bildenden Curven oder Kreisevolventen abgewickelt werden.

Beschreibt man aus *C* mit dem Halbmesser *Cd* einen Kreis, so bestimmt dieser die Länge der Zähne des Rades *C*. Verlängert man ferner, wenn *Ae* gleich der Theilung der Räder ist, die durch *e* gehende Kreisevolvente des Getriebzahnes bis zum Durchschnitte *n* mit der Normale *EF*, und beschreibt aus *c* mit dem Halbmesser *cn* einen Kreis, so begrenzt dieser eben so die Zähne des Getriebes *c*. Von den Kreisen

CD und cd (auf welchen die Abwicklung geschieht und bis wohin die Zahnkrümmung reicht) werden die Zähne nach einwärts noch um ·15 bis ·19 Zoll verlängert, um den Zähnen in den entsprechenden Lücken den gehörigen Zwischen- oder Spielraum zu verschaffen; die Lücken werden im Grunde von Kreisbögen begrenzt, welche durch die Puncte, die auf die eben erwähnte Weise bestimmt worden, aus C und c beschrieben werden, deren Halbmesser nämlich um ·15 bis ·19 Zoll kleiner als jene CD und cd sind.

Anmerkung. Bei dieser Verzahnung ergreifen sich die Zähne vor und hinter der Centrilinie Cc in der Entfernung der Schrift oder Theilung. Sollten die Zähne an der Spitze zu schwach ausfallen, so müfste man diese näher gegen die Centrilinie auf einander wirken lassen, was dadurch bewirkt wirkt, dafs man die ganze Construction neuerdings, jedoch mit einer Entfernung Ab wiederholt, welche nur drei Viertel oder die Hälfte der Schrift oder Theilung beträgt.

§. **219. Innere Verzahnung.** Sind CA und cA (Fig. 165) die Halbmesser der im Puncte A sich berührenden Theilkreise des Rades C und Getriebes c, ferner a, a'... die Zahnmittel des Rades und b, b'... jene des Getriebes, folglich $aa' = a'a'' = bb'$... die Theilung; so bildet die Hypocycloide An, welche durch Wälzung des Kreises O, dessen Durchmesser dem Halbmesser des Getriebes Ac gleich ist, auf dem innern Umfang des Theilkreises CA des Rades entsteht, die Krümmung für einen Radzahn, so wie der Halbmesser Ac (als Hypocycloide, erzeugt durch den Kreis O auf dem innern Umfang des Kreises c des Getriebes) die entsprechende Flanke des Getriebzahnes. Setzt man die Curve An fort bis zum Durchschnitt n mit dem durch die Mitte a des Zahns gehenden Halbmesser a AC, und beschreibt aus C mit dem Radius Cn einen Kreis, so begrenzt dieser die Länge der Radzähne, und wenn man durch den Punct i, wo dieser Kreis den Erzeugungskreis O schneidet, aus c einen Kreis beschreibt, so bestimmt dieser die Länge der Flanken mi der Getriebzähne.

Der vorige aus C, mit dem Halbmesser Cn beschriebene Kreis durchschneidet den Halbmesser CA in einem Puncte d, und wenn man durch diesen Punct aus c einen Kreis beschreibt, so begrenzt dieser die Höhlungen oder Lücken der Getriebzähne.

Anmerkung. Diese Lücken sollten streng genommen verlängerte Hypocycloiden seyn, welche durch Wälzung des Theilkreises CA des Rades auf jenen cA des Getriebes entstehen, wobei der mit dem erstern concentrische Kreis vom Halbmesser Cd der Erzeugende ist. Da man indefs die Zähne gewöhnlich wie in v abstumpft, so wird auch der Grund der Lücken wie in s durch einen Kreisbogen vom Halbmesser cs begrenzt.

Wie man sieht, so haben hier die Radzähne keine Flanken und die Getriebszähne keine Köpfe oder Abrundungen.

§. 220. Verzahnung eines Rades mit einer Zahnstange. Denkt man sich in den vorigen Fällen den Halbmesser des einen Rades oder Getriebes unendlich grofs, so geht der Theilkreis desselben in eine gerade Linie DD' (Fig. 166) über, die Curve der Radzähne oder die Epicycloide verwandelt sich in eine Kreisevolvente und jene für die Zähne der Stange in eine gemeine Cycloide. Soll die Zahnstange (Kammbaum) bei einer Umdrehung des Rades C um die Höhe h gehoben oder überhaupt nach der Richtung $D'D$ bewegt werden, so erhält man für den Halbmesser $CA = r$ des Theil- oder Grundkreises wegen $2r\pi = h$, sofort

$$r = \frac{h}{2\pi} \quad . \; . \; . \; (1.$$

Hat man die Dicke der Zähne nach dem zu überwindenden Widerstand angenommen, so kann man die Theilung a und damit die Anzahl der Zähne $m = \frac{2r\pi}{a}$ bestimmen, wobei man für m wieder (wenn m gebrochen ausfällt) die nächst kleinere ganze Zahl nimmt.

Nachdem man nun die Theilung $Ab = Aa = a$, die letztere im Bogen gemessen auf der Theillinie und den Theilkreis, so wie die Zahndicken und ihre Mittellinien (Zahnmittel) gehörig aufgetragen und mit dem Theilkreis CA als Grundkreis, die Evolvente oder Abgewickelte (welche auch durch Wälzung einer geraden Linie DD' über dessen Umfang entsteht) construirt hat, rundet man damit die Radzähne bis zum Durchschnitt n' des Zahnmittels zu beiden Seiten ab und zieht, um ihre Länge zu begrenzen, aus C mit dem Halbmesser Cn' einen Kreis.

Zur Abrundung der Zähne der Stange dient die Cycloide, welche den Kreis vom Durchmesser CA auf der Geraden DD' beschreibt, wofür man indefs in der Praxis gewöhnlich nur einen Kreisbogen nimmt. Begrenzt werden die Zähne durch eine mit DD' durch den Punct n gezogene Parallele, welche zugleich den Kreis vom Durchmesser CA im Puncte i schneidet. Der aus C mit dem Halbmesser Ci beschriebene Kreis begrenzt die Flanken ai der Radzähne, während die Höhlungen durch Wälzung der Tangente oder Theillinie DD' auf dem Theilkreis CA durch den Punct n des darauf befestigten Perpendikels nr beschrieben werden (also verlängerte Kreisevolventen sind). Die Höhlungen der Zähne der Stange dagegen sind verlängerte Cycloiden, für welche der Kreis vom Halbmesser Cn' erzeugender und der Theilkreis CA wälzender auf der Geraden DD' ist. Auch hier kann man die Zähne und Höhlungen zum Theil oder, was gewöhnlich geschieht, wie in p, p', q, q' so abstumpfen, dafs die Höhlungen ganz ausbleiben und nur Flanken vorkommen.

§. 221. Hebeköpfe für Stampfwerke. Analog mit den vorigen Constructionsarten ist auch jene zur Bestimmung der Krümmung der Hebeköpfe für Stampfwerke, aus welchem Grunde diese gleich hier mit vorgenommen wird.

Soll der Stampfer M (Fig. 167) auf die Höhe h gehoben werden und ist m die Anzahl der Hebköpfe Ae für einen Stampfer, so, dafs also bei einer Umdrehung der Welle C derselbe Stämpfer m Mal gehoben wird; dreht sich ferner die Welle in einer Minute n Mal um und ist $CA = r$ der Halbmesser des Grundkreises, über welchen man einen Faden abwickeln (oder die Tangente Aa' wälzen) mufs, um die Krümmung Aa der Hebeköpfe zu erhalten; so ist die Umdrehungszeit der Welle per Secunde $= \frac{60}{n}$ und die Zwischenzeit von einem Angriff desselben Stämpfers bis zum nächst folgenden $t = \frac{60}{nm}$. Diese Zeit zerfällt aber in die Hubzeit t', Fallzeit t'' und eine kleine Ruhezeit, um sicher zu seyn, dafs die Heblatte AB des Stämpfers nicht auf den Hebkopf Aa der Welle auffällt. Nimmt man diese zu $\frac{1}{10}t$ an, so ist $\frac{9}{10}t = t' + t''$ und wegen (§. 142) $t'' = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, die Hubzeit $t' = \frac{54}{mn} - \sqrt{\frac{2h}{g}}$, und da dieses zugleich auch die Zeit für die Bewegung eines Punctes A durch den Kreisbogen $AA' = Aa' = h$ ist, so hat man, da hier eine gleichförmige Bewegung vorausgesetzt wird,

$$2r\pi : \text{Bogen } AA' = \frac{60}{n} : t'$$

und daraus

$$r = \frac{60h}{2n\pi\left(\frac{54}{mn} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)} \dots (1$$

als Halbmesser des Grundkreises CA.

Um die Curve der Hebköpfe Aa zu begrenzen, beschreibt man, wenn $Aa' = h$ ist, aus C mit dem Halbmesser Ca' einen Kreis.

Anmerkung 1. Oft läfst man die Ruhezeit aus der Rechnung weg und nimmt dagegen den ohne diesen Werth gefundenen Halbmesser r auf Gerathewohl um $\frac{1}{12}$ gröfser.

Anmerkung 2. Die Anwendung dieser Hebeköpfe hat das Nachtheilige, dafs sie bei ihrer Bewegung jedesmal an die ruhende Heblatte AB des Stämpfers anstofsen und diesen immer plötzlich von der Ruhe aus auf die Geschwindigkeit des Punctes A bringen, wodurch, da man es nicht mit vollkommen elastischen Körpern zu thun hat (§. 201), ein Verlust an Arbeit entsteht. Um diesen Stofs zu vermeiden, hat man den Hebeköpfen eine Krümmung zu geben versucht, für welche im Augenblicke des Angriffes die Fläche AB der Heblatte eine Tangente bildet, und sonach der Stämpfer von der Ruhe aus nur allmälig auf seine gröfste Geschwindigkeit gebracht wird; obschon dadurch wieder, da der Weg des Übereinandergleitens gröfser wird, auch die Wirkung der Reibung vergröfsert wird. Eben so sind die Frictionsrollen oder Walzen, welche dabei versucht worden, nicht dauerhaft genug.

§. 222. Hebeköpfe für Stirnhämmer. Soll der um c drehbare Hammer bc (Fig. 168) durch eine Daumenwelle C in gewissen Zwischenräumen oder Zeiten gehoben werden, so mufs der abgerundete Theil ab des Hebekopfes, da er während des ganzen Hubes mit der Geraden cb des Hammers in Berührung bleiben soll, eine Epicycloide seyn, welche der Kreis vom Durchmesser cb auf den Theilkreis CA als Grundkreis beschreibt. Um den Halbmesser r dieses Theilkreises zu finden, mufs die Gröfse des Bogens $Ab = a$ oder die Hubhöhe des Hammers gegeben seyn oder angenommen werden; setzt man diese Gröfse a statt h in der vorigen Formel (1 und behält im Übrigen die dortige Bezeichnung bei, so wird

$$r = \frac{60\,a}{2\,n\,\pi\left(\frac{54}{m\,n} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)},$$

wobei der kleine Zeitverlust im Niederfallen des Hammers, da er nicht wie der Stämpfer vertical, sondern wie über eine schiefe Ebene herabfällt, durch den elastischen „Stofsreutel" ersetzt wird.

Ist die Epicycloide ab construirt, so begrenzt man diese durch einen aus C mit dem Halbmesser Cb beschriebenen Kreisbogen; um das Abfallen des Hammers zu erleichtern, gibt man der untern Seite des Hebekopfes die radiale Richtung.

§. 223. Ganz dieselbe Construction findet auch für die Hebeköpfe der Schwanzhämmer (wobei die Drehungsachse zwischen dem Hammer und der Daumenwelle) und der Aufwerfer (bei welchem die Daumenwelle zwischen dem Hammer und der Drehungsachse liegt) Statt.

Was die erstern betrifft, so sey (Fig. 169) CA der Halbmesser des Theilkreises der Welle, c der Drehungspunct des Hammers, wofür AB die niedrigste und aB' die höchste Lage der Stellung bezeichnet.

Der Punct A des Kreises vom Durchmesser Ac beschreibt bei seiner Wälzung auf dem Theilkreis CA die Epicycloide Ae, nach welcher die Hebeköpfe wie ab auf der untern Seite abgerundet werden müssen; dabei bestimmt ein aus C mit dem Halbmesser Ca beschriebener Kreis die Länge derselben.

§. **224. Winkelverzahnung.** Es wurde bereits in §. 208 bemerkt, dafs man, im Falle die beiden Räderachsen nicht parallel sind, zu den conischen oder Kegelrädern seine Zuflucht nimmt; am häufigsten bilden dabei die Achsen einen rechten Winkel, obschon dieser auch spitz oder stumpf seyn kann, wenn gleich die Ausführung dadurch etwas schwieriger wird.

Es sey nun S (Fig. 170) der Durchschnitt der beiden Achsen CS, cS der zu verzahnenden Räder (im Falle sich die Achsen nicht schneiden, müssen drei Kegelräder angewendet werden); theilt man den Winkel CSc durch die Gerade SA in zwei solche Theile CSA und ASc, dafs sich diese wie die Anzahl der Zähne (oder umgekehrt wie die Umdrehungszahlen) der Räder AB und Ab verhalten; so bildet SA die gemeinschaftliche Kante oder Berührungslinie der Grundkegel ABS und AbS, durch deren blofse Berührung die Umdrehung des einen Kegels ABS um seine Achse SC im angenommenen Verhältnifs der Umdrehungsgeschwindigkeiten auf den zweiten Kegel AbS übertragen wird.

Da man die Zähne nicht bis in die Spitze S, sondern nur bis auf eine gewisse Länge AL fortsetzt, so wird dadurch zugleich die Kronbreite der Kegelflächen, welche auf der von S entgegengesetzten Seite ebenfalls durch Kegelflächen begrenzt werden, deren Spitzen oder Scheitel in C und c so liegen, dafs die Gerade Cc auf AS perpendikulär steht, bestimmt. Diese letztern Kegelflächen $ABDE$ und $Abde$ bilden die äussern Stirnflächen der Zähne, während die innern Stirnflächen durch das, durch den Punct L auf AS geführte Perpendikel bestimmt werden. Die Kegelflächen AE und Ae haben sonach eine durch die Kante Dd gehende, auf AS perpendiculäre gemeinschaftliche Berührungsebene, und man kann, da das Profil eines Zahns auf der Kegelfläche nur einen sehr kleinen Theil davon einnimmt, ohne Fehler annehmen, dafs der Eingriff der in A sich berührenden Zähne in dieser Berührungsebene

Statt findet, so, daſs unter dieser Voraussetzung die Zähne genau jene Form, wie bei den cylindrischen Rädern erhalten; man darf sich also nur die beiden Kegelflächen, deren Scheitel in C und c liegen, abgewickelt, d. i. in eine Ebene ausgebreitet denken, und da dabei die Umfänge AB und ab in die aus C und c mit den Radien CA und cA beschriebenen Theilkreise AF und Af von cylindrischen Rädern übergehen, darauf die ausgemittelte Anzahl der Zähne und deren Dicke auftragen und die Verzahnung nach einer der in den frühern Paragraphen angeführten Methoden construiren.

Anmerkung. Schneidet man ein Stück Blech in Form dieser Zähne als Chablone und legt dieses Netz oder die Patrone auf den äuſsern Stirnflächen AE und Ae herum, reiſst die Conturen mit einem Stifte auf, wobei man früher schon die Zahnköpfe $BG = li$ und $bg = no$ auf die Grundkegel beiläufig und noch in gröſsern Dimensionen befestigt hat, und arbeitet die Zähne, welche entweder aus Holz in das guſseiserne Rad eingesetzt sind, oder sammt dem hölzernen Rad nur als Guſsmodelle dienen, nach diesem Profile von allen Seiten gegen S verjüngt zu; so hat man die Zähne richtig und am einfachsten construirt. Auch kann man ein ähnliches Profil oder eine Patrone MN, wobei $Cp = KP$ gleich dem Halbmesser des Theilkreises der innern Stirnfläche, alles Übrige aber der vorigen Patrone ähnlich ist, für die innere Stirnfläche construiren und diese darauf eben so vorreiſsen, so, daſs die Zähne jetzt nur nach diesen beiden correspondirenden Profilen ausgearbeitet werden dürfen.

Genau dasselbe gilt natürlich auch für das zweite Kegelrad Db.

Übrigens wurden hier der Vollständigkeit wegen die Höhlungen der Zähne non' mit angegeben, allein diese werden in der Praxis immer ausgelassen, so, daſs die Zähne nur wie in q aus den Köpfen oder Abrundungen und Flanken bestehen und der Grund der Lücken von einer Kegelfläche gebildet wird, deren Basis den Halbmesser Cn hat und Spitze in S liegt. Die Zähne selbst werden so stark abgestumpft, daſs sie nur um die halbe Zahndicke über den Grundkegel oder Theilriſs CA vorragen. Dasselbe gilt auch vom zweiten Kegelrad*).

§. 225. Verzahnung bei der Schraube ohne Ende. In jenen Fällen, in welchen die Achsen einen rechten Winkel

*) Weitere Details über die Verzahnung, wohin auch die Kron- und Kammräder gehören, die ebenfalls zur rechtwinklichten Fortpflanzung der Bewegung dienen und vor der Einführung der conischen Räder sehr häufig angewendet wurden, so wie über den Bau der Räder selbst, findet man u. A. in Haindl's Maschinenkunde und Maschinenzeichnen, und im dritten Bande von Gerstner's Handbuch der Mechanik.

mit einander bilden, ohne in derselben Ebene zu liegen, wendet man in der Regel die Schraube ohne Ende an (§. 116).

Ist die Höhe a des Schraubenganges (Fig. 171), wofür immer ein flaches Gewind angewendet wird, nach der Gröfse des zu überwindenden Widerstandes bestimmt, so bildet diese zugleich auch die Theilung oder Schrift des Getriebes, so, dafs wenn man den Halbmesser des Theilkreises $Ca = r$ und die Anzahl der Zähne $= n$ setzt, sofort $2r\pi = na$, also $r = \frac{na}{2\pi}$ seyn mufs. Dabei macht, weil bei jeder Umdrehung der Schraube ein Punct im Theilrifs um den Bogen a der Theilung fortrückt, die Schraube n Umdrehungen bei einer Umdrehung des Getriebes.

Liegt die durch C gehende Achse des Rades horizontal, so steht jene BB' der Schraube vertical, und es müssen die Zähne nicht nur nach der Kreisevolvente für den Grundkreis Ca abgerundet, sondern gegen die Achse unter denselben Neigungswinkel i gestellt werden, welchen die Schraubenlinie mit der Horizontalen bildet.

Anmerkung. Da die Construction nicht leicht ganz genau ausfällt, so läfst man in der Praxis die Zähne des Rades durch die Schraube selbst, d. h. durch eine ihr ganz gleiche Schneidspindel (auf ähnliche Weise, wie das Gewind einer Schraubenmutter eingeschnitten wird) aus- oder einschneiden.

Neuntes Kapitel.

Von den Hindernissen der Bewegung.

§. 226. Reibung. Alle Körper, selbst die best geglätteten und polirten, besitzen auf ihrer Oberfläche noch gewisse Unebenheiten und Rauhigkeiten, wodurch, wenn ein Körper über einen andern hin bewegt wird, die Erhöhungen des einen in die Vertiefungen des andern eingreifen, und die Bewegung nur dadurch möglich wird, dafs diese Erhöhungen umgebogen, abgebrochen oder über einander weggehoben werden. Der dadurch in der Bewegung erzeugte Widerstand heifst Reibung oder Friction, und dieser kann immer als eine hemmende, der Bewegung entgegen wirkende Kraft angesehen werden.

Dieser Widerstand besteht streng genommen aus zwei verschiedenen Theilen: der Adhäsion der sich berührenden Flächen und der eigentlichen Reibung, und er ist verschieden, je nach der materiellen Beschaffenheit der Körper, der gröfsern oder geringern Rauhigkeit der reibenden Flächen, dem Drucke derselben gegen einander, dem dazwischen gebrachten Schmiermittel, der obwaltenden Temperatur, und endlich dem Zustande der Ruhe oder Bewegung.

Man unterscheidet zwei Gattungen der Reibung: die gleitende, wenn ein Körper über einen andern weggeschoben wird, wozu auch die drehende oder Achsenreibung gehört, und die rollende oder wälzende, wenn ein runder Körper über einen andern wegrollt.

§. 227. Mafs der gleitenden Reibung. Legt man die eine ebene Fläche des Körpers *B* (Fig. 172), dessen Reibung untersucht werden soll, horizontal, und darauf den zweiten Körper *A*, ebenfalls mit einer ebenen Fläche, welchen man noch, um einen grössern Normaldruck zwischen den reibenden Flächen zu erhalten, mit Gewichten belasten kann, befestigt daran eine Schnur, läfst diese horizontal über eine Rolle *C* gehen, und hängt endlich an das andere Ende eine Wagschale; so wird man durch successives Auflegen von Gewichten auf diese Schale, und zwar so lange, bis entweder die Bewegung eben anfängt, oder durch einen kleinen Anstofs eine gleichförmige Bewegung des Körpers *A* eintritt, dieses Gewicht (jenes der Wagschale mit inbegriffen) die Gröfse oder den Werth der Reibung, und zwar im ersten Falle von der Ruhe aus, im letztern, während der Bewegung angeben.

Die Gesetze nun, welche man auf diese Weise durch sehr viele und sorgfältig angestellte Versuche für die gleitende Reibung gefunden hat, sind wesentlich folgende:

1. Die Reibung ist von der Gröſse der Berührungs- oder Reibungsflächen unabhängig. Man erklärt sich dieses daraus, daſs bei einer gröſsern Fläche zwar mehr Unebenheiten in einander, dagegen aber, da der Druck auf eine gröſsere Fläche vertheilt wird, nicht so tief eingreifen oder eingedrückt werden; übrigens wird dabei vorausgesetzt, daſs (wie es z. B. bei Fuhrwerken oft geschieht) keine Geleise oder Furchen dabei entstehen.

2. Die Geschwindigkeit der Bewegung hat auf die Gröſse der Reibung ebenfalls keinen Einfluſs. Es kommen zwar bei einer gröſsern Geschwindigkeit in derselben Zeit mehr Theile zur Berührung, sie haben aber auch nicht Zeit so tief einzudringen; dabei darf jedoch die Geschwindigkeit niemals so groſs werden, daſs eine Erhitzung zwischen den Reibungsflächen eintritt, weil dadurch die Reibung oft bedeutend zunimmt.

3. Die Reibung ist dem Normaldrucke zwischen den sich reibenden Flächen, sobald dieser schon eine solche Gröſse erreicht hat, daſs die Adhäsion nur mehr einen geringen oder untergeordneten Antheil an dem Widerstande hat, genau proportional.

4. Die Reibung ist von der Ruhe aus gröſser als während der Bewegung. Im erstern Falle scheinen die Unebenheiten (wozu sie Zeit gehabt haben) tiefer einzudringen, als im letztern.

5. Durch das Einschmieren der sich reibenden Flächen mit passenden Schmiermitteln wird nicht nur die Reibung bedeutend vermindert, sondern zugleich auch aller Unterschied, welcher bei trockener Reibung zwischen Körpern von *verschiedener* Materie besteht, aufgehoben. Durch passende Schmieren werden nämlich die Poren oder Vertiefungen der Reibungsflächen ausgefüllt.

§. 228. Coefficient und Wirkung der Reibung. Da die Reibung F unter übrigens gleichen Umständen dem Normaldruck Q zwischen den reibenden Flächen proportional, d. i.

$F : F' = Q : Q'$ ist, so folgt $F = \frac{F'}{Q'} Q$, oder, wenn man den Quotienten $\frac{F'}{Q'} = f$ setzt: $F = fQ$.

Diese Verhältnifszahl f, welche man aus Versuchen findet, indem man für die betreffenden Körper bei irgend einem Normaldrucke Q die Gröfse der Reibung F' bestimmt, und mit welcher man den zwischen den reibenden Flächen derselben Körper Statt findenden Normaldruck Q multipliciren mufs, um den Betrag der Reibung F zu erhalten, heifst Reibungscoefficient. Multiplicirt man den Betrag der Reibung mit der Geschwindigkeit der reibenden Flächen, so erhält man die Wirkung oder Arbeit der Reibung, welche sofort, da F dabei constant, der Geschwindigkeit proportional ist.

Anmerkung. Zur Bestimmung der Reibungscoefficienten kann man sich aufser des im vorigen Paragraphe erwähnten horizontalen Tisches auch einer beweglichen schiefen Ebene bedienen. Bildet nämlich die, um eine durch A auf ABC senkrechte Achse bewegliche schiefe Ebene AB (Fig. 97, a) die eine, und die untere Fläche des darauf gelegten Körpers vom Gewichte Q die zweite reibende Fläche, und vergröfsert man nach und nach den Winkel BAC so lange, bis durch einen kleinen Anstofs ein Herabgleiten des Körpers, und zwar mit gleichförmiger Bewegung (wobei dann die Beschleunigung durch die Reibung F aufgehoben wird) eintritt; so ist, wenn p die aus der Zerlegung von Q entstehende parallele Kraft mit AB und q den Normaldruck bezeichnet (§. 109), $p : q = BC : AC$, oder $\frac{p}{q} = f = \frac{BC}{AC} = tang\, \alpha$, wenn W. $BAC = \alpha$ ist.

§. 229. In den nachstehenden beiden Tabellen sind die Reibungscoefficienten f für die in der Anwendung am meisten vorkommenden Körper, und zwar, da bei heterogenen Körpern, wenn diese so lange mit einander in Berührung waren, bis die Reibung ihr Maximum erreicht hat (was z. B. bei Eisen auf Holz 5 bis 6 Tage dauern kann), diese von der Ruhe aus bedeutend gröfser ist, als jene während der Bewegung, in der ersten Tabelle für die Bewegung von der Ruhe aus, und in der zweiten während der Bewegung für verschiedene Zustände der Körper zusammen gestellt.

Tabelle I.

Reibungscoefficienten für die Bewegung von der *Ruhe* aus, wenn die ebenen Flächen durch längere Zeit mit einander in Berührung waren.

Benennung der sich reibenden Körper.		Zustand der Flächen u. Gattung der Schmiere. Trocken.	Mit Wasser benetzt.	Oliven-Oel.	Schweinschmalz.	Unschlitt.	Trockene Seife.	Fettig und polirt.	Fettig und benetzt.
Holz auf Holz	im Minim.	·30	·65	—	—	·14	·22	·30	
	» Mittel	·50	·68	—	·21	·19	·36	·36	
	» Maxim.	·70	·71	—	—	·25	·44	·40	
Metall auf Metall . . .	im Minim.	·15	—	·11	—	—	—	·12	
	» Mittel	·18	—	·12	·10	·11	—	·15	
	» Maxim.	·24	—	·16	—	—	—	·17	
Holz auf Metall oder umgekehrt . .		·60	·65	·10	·12	·12	—	·10	
Hanfseile od. Gurten auf Holz	im Minim.	·50							
	» Mittel	·63	·87						
	» Maxim.	·80							
Starkes Sohlenleder für Liederungen, auf Holz oder Gufseisen	nach der Kante . .	·43	·62	·12	—	—	—	—	·27
	flach . . .	·62	·80	·13					
Riemen von schwarzem Leder auf einer Trommel von	Holz . . .	·47							
	Gufseisen	·54	—	—	—	—	—	·28	·38
Kalkstein (Roggenstein) auf Kalkstein		·74							
Muschelkalk auf Roggenstein		·75							
Ziegel auf Roggenstein		·67							
Eichenholz auf Roggenstein, über Hirn		·63							
Eisen auf Roggenstein		·49							
Muschelkalk auf Muschelkalk . . .		·70							
Ziegel auf Muschelkalk		·67							

Tabelle II,
Reibungscoefficienten für das Übereinandergleiten ebener Flächen während der *Bewegung.*

Benennung der sich reibenden Körper.		Trocken.	Mit Wasser benetzt.	Oliven-Oel.	Schwein-schmalz.	Unschlitt.	Schweinschmalz und Graphit.	Gereinigte Wagenschmiere.	Trockene Seife.	Fettig.
		Zustand der Flächen und Gattung der Schmiere.								
Holz auf Holz . .	im Minim.	·20	—	—	·06	·06	—	—	·14	·08
	» Mittel	·36	·25	—	·07	·07	—	—	·14	·12
	» Maxim.	·48	—	—	·07	·08	—	—	·16	·15
Metall auf Metall	im Minim.	·15	—	·06	·07	·07	·06	·12	—	·11
	» Mittel	·18	·31	·07	·09	·09	·08	·15	·20	·13
	» Maxim.	·24	—	·08	·11	·11	·09	·17	—	·17
Holz auf Metall oder umgekehrt	im Minim.	·20	—	·05	·07	·06	—	—	—	·10
	» Mittel	·42	·24	·06	·07	·08	·08	·10	·20	·14
	» Maxim.	·62	—	·08	·08	·10	—	—	—	·16
Hanfseile, Gurten auf	Eichenholz	·45	·332							
dto. dto.	Gufseisen	—	—	·15	—	·19				
Sohlenleder, die flache Seite auf Holz oder Metall	roh . . .	·54	·36	·16	—	·20				
	geklopft .	·30	—							
	fett . . .	—	·25							
Dto. mit der Kante (Garnituren bei Kolben oder Pistons)	trocken .	·34	·31	·14	—	·14				
	geschmiert	—	·24							

Anmerkung. Nach Rondelet ist der Reibungscoefficient für trockene pulverisirte Erde = ·94, für angefeuchtete = 1·38, für feinen trockenen Sand = ·69; nach Barlow für feste Erde = 1·4, für leichten Sand = ·8. Nach Rondelet für gut polirten Lyas (liais, Kalkstein von sehr feinem Korn) auf einem gleichen Stein = ·58. Nach Boistard für einen sehr harten, mit dem Pick- und Stockhammer behauenen Kalkstein auf einem gleichen = ·78. Nach Coulomb für Eisen auf Eisen trocken = ·29, geschmiert = ·10, für Kupfer auf Eisen, trocken = ·16 und geschmiert = ·09.

§. 230. Reibung auf der horizontalen Ebene. Liegt ein Körper auf einer horizontalen Ebene MN (Fig. 173), und wird derselbe von einer durch dessen Schwerpunct O gehenden Kraft P

nach der Richtung OA gezogen, so muſs man zur Bestimmung des Einflusses der Reibung die Kraft $P = Oc$ in zwei auf einander senkrechte Kräfte $Oa = p$ und $Ob = q$ zerlegen, wovon die letztere normal auf die Ebene MN wirkt, und den Normaldruck zwischen den reibenden Flächen vermindert, nämlich auf $Q - q$ reducirt, wenn Q das Gewicht des Körpers bezeichnet.

Da nun (§. 228) der Betrag der Reibung $F = f(Q - q)$ ist, wo f aus einer der vorigen Tabellen zu nehmen ist, so muſs, wenn die Kraft p mit diesem Widerstande im Gleichgewichte seyn soll $p = f(Q - q)$, oder da aus $p : P = Oa : Oc$ und $q : P = ac : Oc$, sofort $p = P\frac{Oa}{Oc}$ und $q = P\frac{ac}{Oc}$ folgt, auch $P\frac{Oa}{Oc} = f\left(Q - P\frac{ac}{Oc}\right)$,

$$\text{d. i. } P = \frac{fQ}{\frac{Oa}{Oc} + f\frac{ac}{Oc}} \; . \; . \; . \; (1 \text{ seyn.}$$

Anmerkung. Wäre die Kraft P abwärts nach OA' gerichtet, so würde der Normaldruck nicht $Q - q$, sondern $Q + q$ seyn, so, daſs man also in dem vorigen Ausdrucke q oder $\frac{ac}{Oc}$ negativ zu nehmen hat, wodurch (da nun der Nenner kleiner wird) die nöthige Zugkraft P gröſser ausfällt.

Ist OA horizontal oder mit MN parallel, so wird in (1 $ac = o$ und $Oa = Oc$; folglich $P = fQ$, wie es seyn soll.

Wird der Winkel AOa, welchen die Richtung des Zuges mit der Horizontalen bildet, mit α bezeichnet, so ist $\frac{Oa}{Oc} = Cos\,\alpha$ und $\frac{ac}{Oc} = Sin\,\alpha$, daher auch (Formel 1) $P = \frac{fQ}{Cos\,\alpha + f\,Sin\,\alpha}$. Soll die Kraft P am kleinsten werden, so muſs der Nenner dieses Bruches bei gleichen Werthen von Q und f am gröſsten ausfallen, und man findet für diese Bedingung $tang\,\alpha = \frac{ac}{Oa} = f$, d. h. es muſs die trigon. Tangente des Neigungswinkels dem Reibungscoefficienten gleich seyn, wenn die Zugkraft die vortheilhafteste Richtung haben soll; ihre Gröſse ist dann

$$P = \frac{Q\,Sin\,\alpha}{Sin\,\alpha^2 + Cos\,\alpha^2} = Q\,Sin\,\alpha.$$

§. 231. Reibung auf der schiefen Ebene.

Wirkt eine Kraft $P = Oc$ (Fig. 174) durch den Schwerpunct O eines auf der schiefen Ebene AB liegenden Körpers, dessen Gewicht $Q = OE$ ist, nach der Richtung OD, um denselben hinauf zu ziehen, so zerlege man $P = Oc$ in die beiden Kräfte Oa und Ob parallel und senkrecht auf AB, ferner eben so $Q = OE$ in Oe und Od; so ist

$Od - Ob$ der Normaldruck, folglich, wenn in allen Fällen f den Reibungscoefficienten zwischen den reibenden Flächen bezeichnet, $f(Od - Ob)$ der Betrag oder Widerstand der Reibung nach Oe, so, dafs für das Gleichgewicht $Oa = Oe + f(Od - Ob)$ seyn mufs, wenn nämlich durch einen kleinen Anstofs die Kraft P den Körper über die schiefe Ebene hinauf ziehen soll. Soll dagegen die Kraft P den Körper auf der schiefen Ebene blofs erhalten, also am Hinabgleiten hindern, so kommt die Reibung dieser Kraft zu Hilfe, und es ist

$Oa + f(Od - Ob) = Oe$ oder $Oa = Oe - f(Od - Ob)$, so, dafs man im vorigen Ausdrucke den Reibungscoefficienten f blofs negativ zu nehmen braucht, um daraus den letztern Werth von Oa zu erhalten.

Anmerkung. Ist i der Neigungswinkel der Kraft P mit der schiefen Ebene, α jener der schiefen Ebene mit dem Horizonte, so ist $Oa = Oc \,.\, Cos\, i = P\, Cos\, i$, $Ob = ac = P\, Sin\, i$, $Od = OE\, Cos\, \alpha = Q\, Cos\, \alpha$ und $Oe = dE = Q\, Sin\, \alpha$, folglich, wenn man diese Werthe in den ersten der beiden vorigen Ausdrücke von Oa substituirt, auch $P\, Cos\, i = f(Q\, Cos\, \alpha - P\, Sin\, i) + Q\, Sin\, \alpha$,

und daraus $$P = \frac{Q\,(Sin\, \alpha + f\, Cos\, \alpha)}{Cos\, i + f\, Sin\, i} \;\ldots\; (1.$$

Da der Zähler dieses Bruches für denselben Körper und die nämliche schiefe Ebene constant, dagegen der Nenner nach dem vorigen Paragraphe für $tang\, i = f$ am gröfsten wird, so ist auch dafür wieder, wie vorhin die Kraft P am kleinsten, oder sie wirkt unter diesem Neigungswinkel (wofür $\frac{ac}{aO} = f$) am vortheilhaftesten und hat den Werth $P = Q\, Sin\,(\alpha + i)$.

Ist Od parallel mit der schiefen Ebene, so ist $i = o$, folglich (aus 1)

$$P = Q\,(Sin\, \alpha + f\, Cos\, \alpha) \;\ldots\; (2.$$

Liegt OD unterhalb Oa, so bringt die jetzt nach abwärts wirkende Seitenkraft Ob ebenfalls einen Druck auf die Ebene hervor, so, dafs jetzt der Normaldruck nicht die Differenz, sondern die Summe $Od + Ob$ beträgt, folglich Ob oder in der Gleichung (1 $Sin\, i$ negativ zu nehmen ist, wodurch

$$P = \frac{Q\,(Sin\, \alpha + f\, Cos\, \alpha)}{Cos\, i - f\, Sin\, i} \;\ldots\; (2 \text{ wird.}$$

Ist OD horizontal oder parallel mit AC, so ist $i = \alpha$, daher

$$P = \frac{Q\,(Sin\, \alpha + f\, Cos\, \alpha)}{Cos\, \alpha - f\, Sin\, \alpha} = \frac{Q\,(f + tang\, \alpha)}{1 - f\, tang\, \alpha} \;\ldots\; (3,$$

oder wenn man $AC = b$ und $BC = h$ setzt, auch $\left(\text{wegen } tang\, \alpha = \frac{h}{b}\right)$:

$$P = \frac{Q\,(h + bf)}{b - fh} \;\ldots\; (4.$$

Wie bereits bemerkt, hat man in allen diesen Formeln den Reibungscoefficienten f mit dem entgegensetzten Zeichen zu nehmen, wenn P nicht die bewegende, sondern nur die **erhaltende** Kraft seyn soll.

§. 232. Reibung am Keil. Ist die normale Pressung auf jeder Seite des Keils BAB' (Fig. 175) $= Q$, so ist die beim Eintreiben desselben, der bewegenden Kraft in den Richtungen AB und AB' entgegenwirkende Reibung auf jeder Seite $= fQ$. Verlängert man BA und $B'A$, und schneidet auf den Verlängerungen $AC = AC' = fQ$, d. h. dieser widerstehenden Kraft fQ proportional ab, so gibt die Diagonale AD des Kräftenparallelogramms die Gröfse und Richtung der Resultirenden P' aus der Reibung, und es ist $P' = AD = 2AF$, oder da (wegen Ähnlichkeit der Dreiecke ACF und ABE) $AF : AC = AE : AB$, und daraus $AF = fQ \cdot \frac{AE}{AB}$ folgt, auch $P' = 2fQ \cdot \frac{AE}{AB}$.

Nach §. 113 (Gleich. 2) ist **ohne** Reibung $P = Q\frac{BB'}{AB}$, folglich, da die senkrecht auf BB' wirkende Kraft K mit dieser Kraft P und der Reibung P' im Gleichgewichte stehen, also $K = P + P'$ seyn mufs, so hat man

$$K = Q \cdot \frac{BB'}{AB} + 2fQ \cdot \frac{AE}{AB}.$$

Ist z. B. $f = \frac{1}{10}$ und etwa auch $\frac{BB'}{AB} = \frac{1}{10}$, in welchem Falle ohne merkbaren Fehler $\frac{AE}{AB} = 1$ gesetzt werden kann; so wird für eine Pressung von $Q = 100$ Pfund, sofort $K = 100 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot 100 = 10 + 20 = 30$ Pfd., so, dafs also die nöthige Kraft, mit Rücksicht auf die Reibung (ungeachtet der Reibungscoefficient so klein als möglich angenommen wurde) 3 Mal so grofs, als ohne diese seyn müfste.

Diese Reibung ist übrigens bei den allermeisten Anwendungen des Keils in der Industrie höchst nothwendig und nützlich, weil der Keil ohne dieselbe, auf jeden Schlag, womit er eingetrieben wird, zurückspringen, und überhaupt keine bleibende Pressung, wie z. B. bei der **Keilpresse** verlangt und nothwendig wird, möglich wäre.

Ist der Keil für die vorhandene Reibung zu stumpf, so springt derselbe auch wirklich zurück, und zwar findet dieses Statt, wenn $P > P'$, d. i. $Q\frac{BB'}{AB} > 2fQ\frac{AE}{AB}$, d. i. $BB' > 2f \cdot AE$ ist. Für das vorige Beispiel von $f = \frac{1}{10}$, würde dieser Fall für $BB' > \frac{1}{5}AE$, dagegen, wenn $f = \frac{1}{6}$, für $BB' > \frac{1}{3}AE$ eintreten oder der Keil zurückspringen.

§. 233. Reibung bei der Schraube. Ist r der mittlere Halbmesser der Spindel (§. 114), also $2r\pi$ ihr Umfang, ferner bei einem flachen Gewinde h die Höhe eines Schraubenganges, so ist unmittelbar nach der Formel (4 des §. 231.) P die am Umfange der Spindel nach der Tangente zur Überwindung der Reibung nöthige Kraft; wirkt aber die Kraft K an einem Hebel von der Länge l, so ist $K = \frac{r}{l} P$, oder, wenn man für P den Werth aus der angezogenen Formel und dabei zugleich $b = 2r\pi$ setzt:

$$K = \frac{r}{l} Q \frac{h + 2r\pi f}{2r\pi - fh} \quad \ldots (1.$$

Die Wirkung oder Arbeit dieser Kraft K ist bei einer Umdrehung $W = K \cdot 2l\pi$, d. i.

$$W = 2r\pi Q \frac{h + 2r\pi f}{2r\pi - fh} = Qh + Qf\left[\frac{h^2 + 4r^2\pi^2}{2r\pi - fh}\right] \quad \ldots (2.$$

Diese besteht also aus dem Nutzeffecte Qh und der auf Reibung verwendeten Arbeit $Qf[\ldots]$, welche sonach verloren geht.

Für eine Spindel mit scharfem Gewinde findet man die analoge Gleichung

$$W = Qh + \frac{1}{n} fQ\left[\frac{h^2 + 4r^2\pi^2}{2r\pi - fh}\right] \quad \ldots (3,$$

wobei n die Verhältnifszahl der Höhe oi zur Seite op des gleichschenklichen Dreieckes oqp (Fig. 106, a), welches das Profil des Gewindes bildet, bezeichnet.

Da nämlich bei einem scharfen Gewind der Normaldruck R (Fig. 97, b) gröfser als die lothrecht widerstehende Last Q ist, indem man hat (§. 109, Relat. 4.) $R = \frac{AB}{AC} Q$, oder wegen $\frac{AC}{AB} = \frac{oi}{op} = n$, $R = \frac{Q}{n}$; so mufs man in dem letzten, von der Reibung herrührenden Glied $Qf[\ldots]$ der obigen Formel (2, $\frac{Q}{n}$ statt Q setzen.

Setzt man für eine eiserne Spindel mit flachem Gewind und metallener Mutter $h = \frac{4}{7} r$ und f $= \frac{1}{6}$, so erhält man aus der obigen Formel (2 für die bei einer Umdrehung der Spindel von der Reibung absorbirten Arbeit $1{\cdot}072\, Qr$ oder nahe $1{\cdot}9\, Qh$, so dafs also W $= Qh + 1{\cdot}9\, Qh = 2{\cdot}9\, Qh$, nämlich der durch die Reibung verursachte Arbeitsverlust beinahe dem doppelten Nutzeffect gleich kommt.

Setzt man ferner für eine hölzerne Spindel ein scharfes Gewind voraus, wobei das Dreieck opq (Fig. 106, a) gleichseitig, folglich $n = \frac{oi}{op} = {\cdot}866$ ist, und setzt $h = \frac{1}{3} r$, also $r = 3h$ und $f = \frac{1}{5}$; so erhält man eben so aus der Formel (3 für die bei einer Umdrehung durch die

Reibung erschöpfte Wirkung $\frac{1}{n} fQ\,[\ldots] = 4{\cdot}41\, Qh$, folglich $W = Qh + 4{\cdot}41\, Qh = 5{\cdot}41\, Qh$, so dafs also bei dieser Voraussetzung die zur Überwindung der Reibung verwendete Wirkung oder Arbeit beinahe dem $4\frac{1}{2}$fachen Nutzeffecte der Schraube gleichkommt.

Aufser der eben betrachteten Reibung in dem Gewinde kommt gewöhnlich noch eine an der Grundfläche der Spindel, wie z. B. bei Spindelpressen, Schraubzwingen u. s. w., oder der Schraubenmutter, wie bei Serviettenpressen u. s. w. vor, welche im §. 235 berechnet werden wird.

Anmerkung. Soll die Schraube nach ausgeübtem Drucke von selbst zurückspringen, so mufs (§. 231) f negativ genommen werden, und da man in einem solchen Falle immer ein flaches Gewind anwendet, so wird man diese Zeichenänderung in der obigen Gleichung (1 vornehmen und darin zugleich, um die Grenze zu finden, bei welcher die Reibung noch gerade hinreicht, dem Drucke Q das Gleichgewicht zu halten, $K = o$ setzen; dadurch erhält man $o = h - 2r\pi f$ und daraus $f = \frac{h}{2r\pi}$, so, dafs also für $f < \frac{h}{2r\pi}$ (wofür K positiv, folglich zur erhaltenden Kraft wird) die Spindel zurückspringt, dagegen für $f > \frac{h}{2r\pi}$ durch die blofse Reibung festhält.

Ist z. B. $f = \frac{1}{8}$, so mufs für den erstern Fall $\frac{h}{2r\pi} > \frac{1}{8}$ oder nahe $h > \frac{4}{5}$ seyn; da jedoch dadurch die Steigung der Gewinde für eine einfache Schraube zu bedeutend würde, und die Schraubenmutter, ohne dieselbe unverhältnifsmäfsig hoch oder dick machen zu müssen, nicht die für die Tragkraft nöthige Gewindezahl erhalten könnte, so wendet man in einem solchen Falle eine mehrfache oder mehrgängige Schraube an. (§. 114, Anmerkung.)

§. 234. Reibung an den Zähnen der Stirnräder. Sind C und c (Fig. 159) die Mittelpuncte der Grundkreise der in einander greifenden cylinderischen Räder, $CA = R$ und $cA = r$ ihre Halbmesser, so wie m und m' die Anzahl ihrer Zähne; ist ferner das Rad C das treibende und jenes c das getriebene, und setzt den in diesem letztern zu überwindenden, auf den Umfang des Grundkreises cA reducirten Widerstand $= Q$, so wie die am Umfange CA des treibenden Rades nöthige Kraft $= P$; so würde bei einer richtigen Verzahnung (§. 207) $P = Q$ seyn, wenn zwischen den Zähnen keine Reibung Statt fände. Mit Rücksicht jedoch auf diesen bei M zu überwindenden Reibungswiderstand mufs $P > Q$ seyn, so, dafs $P' = P - Q$ den Betrag dieser Reibung darstellt.

Durch eine für diesen Fall hinreichend genaue Näherungsrechnung findet man nun, wenn f den betreffenden Reibungs-Coefficienten und π wie immer die Ludolphische Zahl bezeichnet, für diesen Betrag der Reibung:

$$P' = \pi f Q \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \ldots \quad (1,$$

so, dafs dann die am Umfange des Grundkreises des treibenden Rades nöthige Kraft $P = Q + P'$ wird.

Ist nämlich $D d$ (Fig. 159) die gemeinschaftliche Tangente, so wie $A M$ die Normale im Berührungspuncte beider Zähne $N O$ und $n o$, und zieht man aus C und c die Perpendikel CD und $c d$ auf die erstere, so wie CB und cb auf die letztere, und bezeichnet den zwischen diesen Zähnen (auf welche man in der Rechnung wieder den gesammten Druck übertragen kann) Staat findenden Normaldruck mit p; so müssen für das Gleichgewicht offenbar die beiden Relationen bestehen:

$$PR = p \,.\, CB + pf \,.\, CD \text{ und } Qr = p \,.\, cb - pf \,.\, cd,$$

oder, wenn man die Winkel $ACB = Acb = \alpha$ und die Normale $AM = l$ setzt, wodurch $CB = R \, Cos\, \alpha$, $CD = l - R \, Sin\, \alpha$, $cb = r \, Cos\, \alpha$ und $cd = l + r \, Sin\, \alpha$ wird, und wenn man Kürze halber

$$cos\, \alpha + f\left(\frac{l}{R} - Sin\, \alpha\right) = A \text{ und } Cos\, \alpha - f\left(\frac{l}{R} + Sin\, \alpha\right) = B$$

setzt, auch

$$P = pA \text{ und } Q = pB.$$

Daraus folgt

$$\frac{P}{Q} = \frac{A}{B} \text{ oder } P = Q\,\frac{A}{B} \text{ und } P - Q = Q\left(\frac{A}{B} - 1\right),$$

oder, wenn man wieder für A und B die Werthe setzt und gehörig reducirt, auch

$$P - Q = \frac{Qf\left(\frac{l}{R} + \frac{l}{r}\right)}{Cos\, \alpha - f\left(\frac{l}{r} + Sin\, \alpha\right)}.$$

Setzt man nun, da der Winkel α immer nur klein ist, $Cos\, \alpha = 1$, und läfst gegen die Einheit die sehr kleinen Brüche $f\,\frac{l}{r}$ und $f\, Sin\, \alpha$ aus, wodurch der Nenner des vorigen Bruches $= 1$ wird, so hat man auch

$$P - Q = Qf\left(\frac{l}{R} + \frac{l}{r}\right).$$

Ist ferner in der bezeichneten Figur Bog. $AN =$ Bog. an gleich der sogenannten Theilung der Räder, also (§. 211) Bog. $AN = \frac{2R\pi}{m}$ und Bog. $an = \frac{2r\pi}{m'}$, und nimmt man an, dafs (wie es am zweckmäfsigsten ist) der Eingriff zwischen den beiden Zähnen von der Centrilinie, d. i. von dem Puncte A an bis zu jenem N dauert, so kann man ohne Fehler die Normale l dieser

Bögen AN und an gleich, also $l = \frac{2R\pi}{m} = \frac{2r\pi}{m'}$ setzen, und wenn man für diese Normale, welche vom Beginne des Eingriffes der beiden Zähne, bis sie sich auslassen, von Null bis $AM = l$ (wo l die eben angegebenen Werthe hat) zunimmt, ihren mittleren oder halben Werth als constant bleibend in Rechnung nimmt, auch $l = \frac{R\pi}{m}$ und $l = \frac{r\pi}{m'}$, oder $\frac{l}{R} = \frac{\pi}{m}$ und $\frac{l}{r} = \frac{\pi}{m'}$ annehmen, so, dafs, wenn man diese beiden letztern Werthe oben substituirt, sofort endlich $P - Q = Qf\pi\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right)$ wird, wie oben angegeben wurde.

Ist z. B. $m = 60$, $m' = 30$ und $f = \frac{1}{10}$, so ist der Betrag der Reibung zwischen den Zähnen der beiden Räder $P - Q = 0{\cdot}0157\ Q$, so dafs für einen Widerstand von $Q = 430$ Pfund und eine Geschwindigkeit der Räder in den Grundkreisen von 1 Fufs, die zur Überwindung dieses Widerstandes nöthige Arbeit nicht mehr als 6·751 F. Pf., d. i. bei Übertragung von einer Pferdekraft nahe $\frac{1}{64}$ Pferdekraft beträgt; bei einer guten und richtig ausgeführten Verzahnung wirkt also die Reibung an den Zähnen weniger durch den Kraftverlust als durch die Abnützung und Formänderung der Zähne nachtheilig.

Anmerkung. 1. Für eine innere Verzahnung wird in der obigen Formel 1 (weil in dem Ausdrucke Bog. $AN = \frac{2R\pi}{m}$, R negativ zu nehmen ist) m negativ und daher $P' = \pi f Q\left(\frac{1}{m'} - \frac{1}{m}\right)$, wobei $m > m'$ ist.

2. Für den Eingriff eines Getriebes in eine Zahstange wird (weil in dem vorigen Ausdrucke $R = \infty$ ist) m unendlich, oder $\frac{1}{m} = o$, folglich $P' = \pi f Q \,.\, \frac{1}{m'}$; es ist also in beiden diesen Fällen der Betrag der Reibung kleiner als im ursprünglichen Falle (1.

3. Für Winkel- oder Kegelräder kann man sich ebenfalls der obigen Formel (1, und zwar um so mehr bedienen, als dabei der auf den Umfang des Grundkreises des treibenden Rades reducirte Reibungswiderstand sogar etwas kleiner als bei cylinderischen Rädern ausfällt. So kann man z. B. bei den beiden in einander greifenden Winkelrädern in Fig. 170, bei welchen AI und Ai die Halbmesser der Grundkreise und m, m' die Anzahl ihrer Zähne bezeichnen sollen, den Reibungswiderstand so ansehen, als fände er zwischen den Zähnen der beiden cylinderischen Räder von den Halbmessern CA und cA (auf ihre Grundkreise bezogen) und derselben Theilung Statt, bei welcher also die Zähnezahl M und M' im Verhältnifs von $AI : AC$ und $Ai : Ac$ gröfser als jene m und m', nämlich

$$M = \frac{AC}{AI}\, m \text{ und } M' = \frac{Ac}{Ai}\, m',$$

oder, wenn man die Winkel ASI und ASi (welche in der durch die Achsen der beiden Kegelräder gehenden Ebene liegen) mit a und b bezeichnet, $M = \frac{m}{Cos\, a}$ und $M' = \frac{m'}{Cos\, b}$ ist, so, daſs nach der obigen Formel (1 dieser Widerstand durch $n)\ P' = \pi f Q \left(\frac{Cos\, a}{m} + \frac{Cos\, b}{m'}\right)$ am Umfange des Grundkreises AI des treibenden Rades gemessen werden kann, welcher offenbar kleiner ist, als wenn die Achsen CS und cS parallel wären, also $a = b = o$ und $Cos\, a = Cos\, b = 1$, wie bei cylinderischen Rädern Statt fände.

Will man anstatt der beiden Winkel a und b lieber jenen $\alpha = a + b$ der beiden Achsen in die Formel bringen, so hat man wegen
$m : m' = AI : Ai = Sin\, a : Sin\, b$ auch $m\, Sin\, b = m'\, Sin\, a$, oder
$(m\, Sin\, b - m'\, Sin\, a)^2 = o$, d. i. $m^2\, Sin\, b^2 + m'^2\, Sin\, a^2 - 2\, m\, m'\, Sin\, a\, Sin\, b =$, oder auch
$m^2 (1 - Cos\, b^2) + m'^2 (1 - Cos\, a^2) + 2\, m\, m' (Cos\, \alpha - Cos\, a\, Cos\, b) = o$, (weil aus $Cos\, \alpha = Cos\, (a + b) = Cos\, a\, Cos\, b - Sin\, a\, Sin\, b$, sofort $Sin\, a\, Sin\, b = Cos\, a\, Cos\, b - Cos\, \alpha$ folgt, und wenn man mit $m^2\, m'^2$ durchaus dividirt:

$$\frac{1}{m'^2}(1 - Cos\, b^2) + \frac{1}{m^2}(1 - Cos\, a^2) + \frac{2}{m\, m'}(Cos\, \alpha - Cos\, a\, Cos\, b) = o \text{ oder}$$

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m'^2} + \frac{2\, Cos\, \alpha}{m\, m'} = \frac{Cos\, a^2}{m^2} + \frac{Cos\, b^2}{m'^2} + \frac{2\, Cos\, a\, Cos\, b}{m\, m'} \left(\frac{Cos\, a}{m} + \frac{Cos\, b}{m'}\right)^2$$

und daher endlich

$$\frac{Cos\, a}{m} + \frac{Cos\, b}{m'} = \sqrt{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m'^2} + \frac{2\, Cos\, \alpha}{m\, m'}\right)},$$

so, daſs, wenn man diesen Werth oben in $n)$ substituirt, auch

$$P' = \pi f Q \sqrt{\left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{m'^2} + \frac{2\, Cos\, \alpha}{m\, m'}\right)} \text{ wird.}$$

Für $\alpha = o$ geht dieser Ausdruck, wie es seyn soll, wieder in jenen (1 für cylinderische Räder mit äuſserer, so wie für $\alpha = 180^0$ in jenen für innere Verzahnung, wobei er zugleich am kleinsten wird, über.

§. 235. Reibung an den Gewinden einer Schraube ohne Ende.

Was den auf den Punct a (Fig. 171) reducirten Reibungswiderstand an den Zähnen und Gewinden der Schraube ohne Ende betrifft, so kann man dafür ohne Fehler denselben Ausdruck $P' = \pi f Q \frac{1}{m}$, wie bei dem Eingriffe eines Getriebes in eine Zahnstange (voriger Paragraph, Anmerkung 2) gelten lassen, wobei m die Anzahl der Zähne im Rade C und Q den auf den Punct a reducirten Widerstand bezeichnet, welcher durch das Rad überwunden werden soll, so, daſs also die Schraube sofort den Widerstand $P' + Q$ zu überwinden hat.

(Die Achsenreibung ist dabei noch eben so wenig, wie bei den frühern Beispielen berücksichtigt.)

§ 236. Reibung eines Cylinders auf seiner Basis. Um die Reibung der Kreisfläche des Zapfens einer stehenden Welle W zu finden, sey $ac = r$ (Fig. 176) der Halbmesser des Zapfens und Q das Gewicht der Welle oder der zwischen der Basis des Zapfens und der Pfanne in der Richtung der Achse Statt findende Druk, folglich fQ der Betrag der Reibung.

Da nun diese Reibung eben so wie der Druck Q auf alle Puncte der Kreisfläche ca gleichförmig vertheilt ist, so kann man die auf einen unendlich schmalen Sector acb der reibenden Kreisfläche vom Mittelpuncte c gegen den Umfang ab kommenden kleinen Reibungen, als lauter auf dem Halbmesser ci senkrecht stehende parallele Kräfte ansehen, deren Summe der Dreiecksfläche acb proportional ist, und deren Resultirende sonach durch den Schwerpunct dieses kleinen Dreieckes, welcher also (§. 48) um $\frac{2}{3} r$ von c gegen i liegt, geht. Da nun dasselbe von allen den rings herum liegenden kleinen Sectoren gilt, welche die Kreisfläche ausmachen, so folgt, dafs man sich die ganze Reibung auf dem einzigen, mit dem Halbmesser $\frac{2}{3} r$ aus c beschriebenen Kreis vereinigt denken kann, wobei man diesen Halbmesser $\frac{2}{3} r$ den Hebelsarm der mittlern Reibung nennt.

Um also die am Umfange des Zapfens nöthige Kraft P' zu finden, welche mit dieser Reibung im Gleichgewichte steht, hat man $rP' = \frac{2}{3} rfQ$, folglich $P' = \frac{2}{3} fQ \ldots$ (1. Die Arbeit dieser Reibung während einer Umdrehung des Zapfens ist $W = 2r\pi P'$, d. i. $W = \frac{4}{3} r\pi fQ \ldots$ (2.

Besteht z. B. der Zapfen aus Gufseisen, und läuft dieser auf einer gufseisernen oder stählernen Platte als Unterlage, so ist, wenn gehörig geschmiert wird, $f = {\cdot}07$, folglich, wenn etwa $Q = 2000$ Pfund und $r = 2$ Zoll wäre, sofort $W = \frac{4}{3} \times \frac{2}{12} \times 3{\cdot}14 \times {\cdot}07 \times 2000 = 97{\cdot}6^{\text{F. Pf.}}$

§. 237. Drehende oder Zapfenreibung. Liegt der cylinderische Zapfen C (Fig. 177) einer horizontalen Welle in seinem Lager A, nämlich in einem Theile oder Segmente eines hohlen Cylinders von etwas gröfserem Halbmesser, und wird dieser Zapfen um seine Achse C nach der angedeuteten Richtung umgedreht; so entsteht, da derselbe nicht wie auf einer horizontalen Ebene fortrollen kann, sondern nur bis zu einem Puncte m, für welchen die nach der Tangente MF wirkende Seitenkraft der Reibung (welche als eine nach mM wirkende Kraft angesehen werden kann), gleich ist, hinaufsteigt, eine gleitende Reibung, welche sich auf folgende Art bestimmen läfst:

Es sey $R = md$ die Gröfse und Richtung der Resultirenden aus allen auf den Zapfen wirkenden Kräften (wie z. B. die darauf ruhende Last und die Kraft, welche die Welle umdreht), welche in die beiden, auf einander senkrechten Kräfte ma und mb zerlegt, beziehungsweise die Tangentialkraft und den Normaldruck bezeichnen; so ist der Betrag der Reibung

$$P = f \, . \, mb \; . \; . \; . \; (1,$$

folglich nach der genannten Bedingung für das Gleichgewicht $f \, . \, mb = ma$, oder $f = \frac{ma}{mb}$. Da aber aus dem rechtwinklichten Dreiecke mbd sofort

$$R = \sqrt{(mb^2 + ma^2)} = mb \sqrt{\left[1 + \left(\frac{ma}{mb}\right)^2\right]} = mb \sqrt{(1 + f^2)},$$

also $mb = \frac{R}{\sqrt{(1 + f^2)}}$ ist, so erhält man auch, wenn dieser Werth in Gleich. (1 substituirt wird, für die Reibung den Ausdruck

$$P = \frac{fR}{\sqrt{(1 + f^2)}} \; . \; . \; . \; (2.$$

Da man den Reibungs-Coefficienten f in allen vorkommenden Fällen kleiner als $\frac{1}{3}$ annehmen kann, so ist auch $\sqrt{(1 + f^2)} < \sqrt{(1 + \frac{1}{9})}$, nämlich kleiner als 1·05, so, dafs man in ber Anwendung ohne Fehler $\sqrt{(1 + f^2)} = 1$ setzen kann, in welchem Falle sich aber der vorige Ausdruck (2 auf den einfachern: $P = fR \; . \; . \; .$ (3 reducirt, gerade so, als ob der Druck R normal auf die Berührungsflächen Statt fände, die Richtung von R nämlich durch den Mittelpunct C ginge.

Ist r der Halbmesser des Zapfens, so ist die bei jeder Umdrehung desselben von der Reibung absorbirte Arbeit:

$$W = 2 r \pi \, . \, fR \; . \; . \; . \; (4,$$

wenn man nämlich für den Reibungswiderstand den einfachern Ausdruck (3 nimmt.

§. 238. Zapfenreibung am Rad an der Welle.

Sind R, r, r' die Halbmesser des Rades, der Welle und der Zapfen, Q die zu hebende Last, G das Gewicht der Welle sammt allem, was die Zapfen zu tragen haben, und P die ebenfalls lothrecht wirkende Kraft, welche mit der Last Q und der Reibung im Gleichgewichte stehen soll; so ist der Druck auf die Zapfen (wobei man, wie vorhin wieder nur einen in Rechnung bringt) $= Q + G + P$, folglich die Reibung, wenn man Kürze halber $\frac{f}{\sqrt{(1 + f^2)}} = f'$ setzt (§. 237, Gleichung 2) $= f'(Q + G + P)$, und das statische Moment der Reibung (welche am Umfange des Zapfens, also in der Entfernung r' von der Drehachse Statt findet) $= r'f'(Q + G + P)$; für das Gleichgewicht ist also (§. 100) $PR = Qr + r'f'(Q + G + P)$, woraus sofort für die Gesammtkraft

$$P = \frac{Qr + (Q + G)f'}{R - f'r} \ldots (1,$$

folgt, und wobei man in der Regel statt f' den Reibungs-Coefficient f selbst und seinen Werth wieder aus der Tabelle II nehmen kann.

Ohne Reibung wäre (wie in §. 100) wegen $f' = o$ sofort

$$P = \frac{Qr}{R}.$$

Anmerkung. Für die Rolle ist $R = r$, und da man dabei das Gewicht derselben vernachläfsigen oder $G = o$ setzen kann, so folgt aus der vorigen Gleichung (1 dafür

$$P = Q\,\frac{r + fr'}{r - fr'}, \text{ oder genau genug } P = \left(1 + 2f\,\frac{r'}{r}\right) \ldots (2,$$

so, dafs also die Gröfse der Reibung $P - Q = \frac{2r'}{r} fQ$ ist.

§. 239. Zapfenreibung beim Flaschenzug.

Ist D der Durchmesser der sämmtlichen Rollen (Fig. 76, 3) in der Kehle oder dem Schnurlauf, so wie d die Dicke ihrer Zapfen, so ist nach der vorigen Gleichung (2, wenn man Kürze halber $1 + 2f\frac{d}{D} = m$ .. (1 setzt, die Kraft, welche an einer Rolle mit der Last Q' und der Reibung im Gleichgewichte steht $p = mQ'$.

Sind die Spannungen der Schnüre von der ersten, an der festen oder unbeweglichen Flasche befestigten, bis zur letzten, woran die Kraft P wirkt, der Reihe nach $t_1, t_2 \ldots t_{n+1}$ für n Rollen oder tragende Schnüre; so ist also $t_2 = m t_1$, $t_3 = m t_2 = m^2 t_1$,

$$t_4 = m t_3 = m^3 t_1 \ldots t_{n+1} = P = m^n t_1 \ldots (a.$$

Die Last Q (das Gewicht der untern oder beweglichen Flasche, sammt ihren Rollen mitbegriffen) ist gleich der Summe aus allen Spannungen der tragenden Schnüren, also:

$$Q = t_1 + t_2 + \ldots + t_n = t_1(1 + m + m^2 + \ldots + m^{n-1}) = t_1\,\frac{m^n - 1}{m - 1}.$$

Wird die vorige Gleichung (a durch diese letztere dividirt, so erhält man, wenn dann gleich mit Q multiplicirt wird, für die nöthige Kraft mit Rücksicht auf die Zapfenreibung:

$$P = \frac{Q m^n (m - 1)}{m^n - 1} \ldots (2.$$

Sind z. B. 6 Rollen, also eben so viele tragende Schnüre vorhanden, hat ferner jede Rolle einen Durchmesser von 10 Zoll, und jeder Zapfen eine Dicke von $1\frac{3}{4}$ Zoll, und setzt, da hier nur selten eingeschmiert wird, $f = \cdot 15$; so wird, wegen $n = 6$, $D = 10$, $d = 1\frac{3}{4}$, folglich $m = 1 + \cdot 30 \times \frac{7}{40} = 1\cdot 052$ und $m^n = (1\cdot 052)^6 = 1\cdot 355$, sofort nach der vorigen Formel (2 sehr nahe $P = \cdot 2\, Q$ oder $P = \frac{1}{5}\, Q$, während ohne diese Zapfenreibung nur $P = \frac{1}{6}\, Q$ seyn dürfte, so, daſs also bei diesem Flaschenzug die Achsenreibung eine Kraft von $\frac{1}{30}\, Q$ oder $3\frac{1}{3}$ Procent der Last absorbirt. Uebrigens muſs, wie wir weiter unten sehen werden, wegen der Steifheit der Seile oder Schnüre auch diese Kraft $\frac{1}{5}\, Q$ noch weiter vergröſsert werden.

§. 240. Reibung eines Seiles über einen Cylinder. Es sey ein Seil, an dessen einem Ende die Last Q hängt, über einen horizontal liegenden, nicht drehbaren Cylinder C (Fig. 179) vom Halbmesser r, und zwar über den Bogen Aab geschlagen, und es soll eine an dem andern Ende desselben wirkende Kraft P sowohl die Last Q als auch die Reibung, welche das Seil auf dem genannten Bogen des Cylinders erleidet, überwinden.

Theilt man zur Bestimmung dieser Kraft P den Bogen Aab in sehr viele gleiche Theile und zieht in den Theilungspuncten $A, a, b\ldots$ die Tangenten, welche sich in den Puncten $m, n\ldots$ schneiden; so ist die Spannung des Seils nach $mA = Q$, jene t_1 von m nach n ist $= Q +$ der Reibung, welche das Seil über den kleinen Bogen Aa erfährt, es ist nämlich $t_1 = Q + fp$, wenn f der Reibungscoefficient und p der Normaldruck des Seils gegen den Bogen Aa ist. Es ist aber, wenn man das Parallelogramm Amh ergänzt, wobei $ma = mA$ ist, sofort $p = mh$, wenn man $mA = ma$ für Q nimmt; da aber die Dreiecke mAh und AaC ähnlich sind, so folgt $Am : mh = Ac : Aa$ oder $Q : p = r : s$ (wenn man den erwähnten sehr kleinen Bogen Aa, welchen man mit seiner Sehne verwechseln darf, $= s$ setzt), und daraus folgt $p = \frac{Qs}{r}$, so, daſs also

$$t_1 = Q + f\frac{Qs}{r} = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)$$

wird.

Eben so findet man für die Spannung des Seils in der folgenden Tangente nb: $t_2 = t_1\left(1 + \frac{fs}{r}\right) = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^2$, wenn man nämlich für t_1 substituirt; dann wieder $t_3 = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^3$ u. s. f., also, wenn man den Bogen Aab in n gleiche sehr kleine oder Elementarbögen s getheilt hat; $t_n = P = Q\left(1 + \frac{fs}{r}\right)^n$.

Ist S die Gröfse des von dem Seile umspannten Bogens, also $S = ns = ri$, wenn i den entsprechenden Mittelpunctswinkel dieses Bogens S bezeichnet, so läfst sich in der Voraussetzung, dafs s unendlich klein, also n unendlich grofs ist, diese letztere Formel auf die Form

$$P = Q e^{fi} \ldots (1$$

bringen, wenn $e = 2{\cdot}71828$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist.

Wird das Seil n Mal um den Cylinder geschlagen, so ist $i = 2n\pi$ und daher

$$P = Q e^{2n\pi f} \ldots (2,$$

wobei also die Dicke des Cylinders keinen Einflufs hat.

§. 241. Wälzende oder rollende Reibung. Aus den hierüber angestellten Versuchen ergibt sich, dafs die wälzende Reibung sehr nahe dem Drucke direct und dem Durchmesser der Walze oder Rolle verkehrt proportional ist. Haben nämlich zwei Walzen oder Rollen die Halbmesser r und r', werden diese mit den Gewichten Q und Q' gegen die Unterlagen gedrückt und sind F und F' die entsprechenden Reibungs- oder Wälzungswiderstände; so ist $F : F' = \frac{Q}{r} : \frac{Q'}{r'}$. Ist dann für irgend einen Werth von Q' und r' die Reibung F' durch Versuche gefunden und setzt man $\frac{F'r'}{Q'} = f'$; so ist $F = f'\frac{Q}{r}$ die Reibung zwischen denselben Körpern, bei beliebigen Werthen von Q und r.

Was den Reibungs-Coefficienten f' betrifft, so ist dieser, wenn r in Wiener Zoll ausgedrückt wird, für Walzen aus Guajak- auf Eichenholz $= \frac{1}{54}$ und für Walzen aus Ulmenholz, welche auf einer eichenen Unterlage rollen, $= \frac{1}{32}$.

§. 242. Frictionsrollen. Zur Verminderung der gleitenden Reibung und um diese zum Theil in eine wälzende zu verwandeln, benützt man sehr oft dte sogenannten Frictionsrollen, deren Anwendung durch folgende Beispiele erläutert werden soll.

1. Anstatt z. B. das Prisma A (Fig. 180), welches in einer Maschine (z. B. der Wagen in einer Metallhobelmaschine) zur hin- und hergehenden horizontalen Bewegung bestimmt seyn kann, unmittelbar auf seiner festen Unterlage B gleiten zu lassen, bringt man kleine Rollen C. wovon hier nur eine (welche auch, wie bei den Wellzapfen in §. 238, für die Rechnung hinreicht) angedeutet ist, so an, dafs sich diese, als feste Rollen, nur um ihre Achsen, welche senkrecht auf die Richtung

der hin- und hergehenden Bewegung von A gelegt werden, umdrehen und das darauf ruhende Prisma A nach der Tangente der Rollen bewegt.

Ist Q der Druck zwischen A und C, R der Halbmesser der Rolle und r jener des Zapfens, so ist die Reibung in der Pfanne $= fQ$ und ihr statisches Moment $= rfQ$. Ist nun zur Überwindung derselben in C nach der Tangente die Kraft F nöthig, so ist

$$RF = rfQ \text{ oder } F = \frac{r}{R} fQ \ldots (m,$$

während ohne diese Rolle zur Überwindung der entstehenden gleitenden Reibung von A auf B eine Kraft $F' = fQ$ nothwendig wäre; es wird also durch die Anwendung von Frictionsrollen (selbst, wenn man für f in beiden Fällen dieselben Werthe gelten läſst, obschon sie im erstern Falle bei der drehenden Reibung, auch schon, weil man die Schmiere leichter erneuern kann, immer etwas kleiner sind) die Reibung im Verhältniſs der Durchmesser der Rollen zur Dicke der Zapfen vermindert.

Anmerkung. Befindet sich am Umfange der Rolle, z. B. in a eine Erhöhung oder sonstiges Hinderniſs, so muſs bei der hier angenommenen Bewegung die Last Q durch eine in der Richtung des Prisma A wirkende Kraft k, mit Hilfe der zwischen dem Prisma A und dem Hinderniſs a Statt findenden Reibung $f'Q$, um die Höhe dieses Hindernisses ba gehoben werden, so daſs es im ersten Augenblicke, wo a mit dem Prisma zur Berührung kommt, gerade so ist, als ob die Kraft K an den Arm CA des um c drehbaren Winkel-Hebel ACD angebracht wäre, an dessen zweiten, auf dem erstern perpendikulären Arm CD in D die Last Q lothrecht abwärts entgegenwirkt, so, daſs also $k \,.\, CA = Q \,.\, CD$, oder wenn man $CD = Aa = l$ und $ba = h$ setzt, sofort

$$k = Q\frac{l}{R} = Q\sqrt{\frac{l^2}{R^2}} = Q\sqrt{\frac{h(h+2R)}{R^2}} = \sqrt{\frac{2Rh}{R^2}},$$

d. i. endlich $k = Q\sqrt{\frac{2h}{R}} \ldots (m$ wird, wenn man die immer nur kleine Gröſse h gegen $2R$ in der Summe $h + 2R$ ausläſst.

Die gesammte nöthige Kraft ist daher $P = F + k = \frac{r}{R} fQ + Q\sqrt{\frac{2h}{R}}$ oder, wenn das Gewicht q der Rolle dabei berücksichtigenswerth wäre:

$$P = \frac{r}{R} f(Q+q) + Q\sqrt{\frac{2h}{R}}.$$

§. **243.** 2. Ruht der Zapfen C (Fig. 181) einer Welle, anstatt auf einer festen Unterlage, auf den Rollen A, A', welche sich um ihre Achsen drehen können; so entsteht, wenn man den in der Richtung CD Statt findenden Druck Q des Zapfens C in die zwei Normaldrücke $Ca = q$ und $Ca' = q'$, welche durch die Achsen der Rollen gehen, zerlegt, die Reibung an der Rolle A nach der vorigen Formel (*m*, wenn R und r wieder dieselbe Bedeutung haben, $\frac{r}{R} f q$, und eben so an der Rolle A', wenn R' und r' die Halbmesser der Rolle und des Zapfens sind, $\frac{r'}{R'} f q'$, so, dafs also die gesammte Reibung

$$F = f\left(\frac{r}{R} q + \frac{r'}{R'} q'\right) \ldots (n \text{ ist.}$$

Sind, wie gewöhnlich, die Rollen gleich grofs, also $R' = R$, $r' = r$, und ist auch $q' = q$; so wird einfacher $F = 2 \frac{r}{R} f q$, während die Reibung des Zapfens C in einer Pfanne, oder wenn die Rollen keine Achsendrehung hätten: $F' = 2 f q$, also im Verhältnifs von $r : R$ gröfser wäre.

Gleichwohl wendet man in solchen Fällen die Frictionsrollen, da sie zu complicirt und zu wenig solid sind, im Maschinenbaue fast niemals an, und begnügt sich, die Zapfen bei gehöriger Ausführung in festen Pfannen laufen zu lassen.

§. 244. 3. Auf dieselbe Art findet man auch die zur Fortschaffung einer auf einem Wagen liegenden Last nöthige Zugkraft, wenn die Rollen, indem sie sich um ihre Achsen drehen, gleichzeitig, wie diefs bei den Wagenrädern der Fall ist, auf einer festen horizontalen Ebene fortrollen. Betrachtet man wieder nur ein einziges Rad, setzt die auf dessen Achse ruhende Last $= Q$, dessen eigenes Gewicht $= q$, und die parallel zu dem festen, ebenen Boden, also horizontal durch die Radachse wirkende Zugkraft $= F$; so ist mit Beibehaltung der vorigen Bezeichnung und Berücksichtigung zugleich der rollenden Reibung (§. 241)

$$F = f' \frac{(Q + q)}{R} + \frac{r}{R} f Q \ldots (s.$$

(Das Weitere siehe in den Zusätzen über F u h r w e r k e.)

§. 245. Der Prony'sche Zaum. Um schliefslich noch von der Reibung eine Anwendung zu zeigen, wollen wir den von Prony angegebenen Apparat zur Bestimmung der Leistungsfähigkeit eines Wasserrades, einer Dampfmaschine u. s. w. hier erklären.

Ist C (Fig. 183) die horizontale Welle des Wasserrades oder Schwungrades der Dampfmaschine u. s. w., so umgibt man einen Theil derselben, welcher entweder schon cylindrisch ist, oder durch Anbringung eines concentrischen Ringes für den Versuch so hergestellt wird, mit einem aus einem Balken oder Hebel AB und einem darüber liegenden und mit Schraubenbolzen daran befestigten hölzernen Deckel oder

Sattel DE bestehenden Zaum oder Bremsdynamometer in der Art, dafs man durch Anziehen oder Nachlassen der Schraubenmuttern a, a, die Reibung des Zapfens C in dieser dadurch entstehenden hölzernen Pfanne beliebig vergröfsern oder vermindern kann. Die dadurch an dem Umfange der Welle C erzeugte Reibung kann als eine Last Q angesehen werden, welche an einer um diese Welle sich aufwickelnden Schnur hängt, so, dafs man also durch das genannte mehr oder weniger Anziehen der Schrauben, diese Last Q beliebig vergröfsern oder verkleinern kann.

Hat man daher bei dem Versuche, bei welchem die Welle C die normale Geschwindigkeit erlangt haben soll, in die in A aufgehangene Wagschale so lange Gewichte aufgelegt, und die Schraubenmutter a, a durch beständiges Reguliren so angezogen, dafs der Hebel AB (kleine Oscillationen abgerechnet) dabei horizontal bleibt, so hat sich die Last oder Reibung Q mit der Kraft P in's Gleichgewicht gestellt, und es ist, wenn $Cb = r$ der Halbmesser der Welle, und $CF = l$ die Länge des Hebels, an dessen Endpunct A das Gewicht P (das auf diesem Puncte A auf die im §. 78 angegebene practische Weise reducirte Gewicht des Hebels und das der Wagschale mit eingerechnet) aufgehängt ist, sofort $Qr = Pl$. Dreht sich nun die Welle beim normalen Gange des Rades oder der Maschine per Secunde n Mal um, so ist die Arbeit der Reibung, also auch jene des Motors, während einer Secunde $= Q . 2r\pi . n$, oder in Pferdekräften ausgedrückt, wenn die Anzahl derselben $= N$ ist (§. 178): $2\pi n Q r = 430 N$, und wenn man für Qr den Werth aus der vorigen Gleichung setzt, auch $2\pi n P l = 430 N$, woraus sofort $N = \frac{n\pi Pl}{215} = \cdot 0146\, nPl \ldots (1$ folgt, wobei man aber P in Pfunden und l in Fufsen substituiren mufs.

Macht z. B. beim normalen Gange, also auch während des Versuches (worauf man dabei sehen mufs) die Welle 15 Umdrehungen in einer Minute, und beträgt dabei das auf den 10 Fufs langen Hebel oder Balken auf den Punct A reducirte und aufgehängte Gewicht 10 Centner: so ist

$$n = \tfrac{15}{60} = \tfrac{1}{4},\ P = 1000,\ l = 10,$$

folglich nach der obigen Formel (1

$$N = \cdot 0146 \times \tfrac{1}{4} \times 1000 \times 10 = 36\cdot 5,$$

so, dafs man also (vorausgesetzt, dafs der Versuch durch längere Zeit gedauert hat) die Leistungsfähigkeit des betreffenden Motors zu $36\frac{1}{2}$ Maschinen-Pferdekraft annehmen kann.

§. 246. Unbiegsamkeit oder Steifheit der Seile. Bei einem über eine Rolle gelegten Seile würden die beiden lothrecht herabhängenden Seilstücke zu einander genau parallel seyn, wenn dasselbe vollkommen biegsam wäre, und wenn an einem Ende die Last Q, am andern die Kraft P angebracht wäre, so würde, da die Reibung des Seils auf den Umfang der Rolle kein Gleiten zuläfst, diese letztere um ihre Achse gedreht, und das Ganze (wie in §. 95 bemerkt) als ein gleicharmiger Hebel, dessen Arme $= r + \frac{1}{2}d$ sind, wenn r der Halbmesser der Rolle und d die Dicke des Seils ist, anzusehen, also für das statische und dynamische Gleichgewicht

$$P(r + \tfrac{1}{2}d) = Q(r + \tfrac{1}{2}d), \text{ d. i. } P = Q \text{ seyn.}$$

Da jedoch wegen der Steifheit des Seils eine gewisse Kraft nothwendig ist, um das gerade Seil zu biegen (streng genommen ist auch eine kleine Kraft erforderlich, das gebogene Seil wieder gerade zu richten, allein diese kann vernachläfsigt, oder besser gleich in die erstere mit eingerechnet werden), so werden die Seilstücke nicht diese parallele, sondern beiläufig die in Fig. 184 dargestellte Lage annehmen, wodurch also der Hebelarm CB der Last Q gröfser als jener CA der Kraft P wird. Setzt man den letztern, d. i. den Halbmesser der Rolle um die halbe Seildicke vermehrt, einfach $=$ r, und $CB - CA = x$, d. i. $CB = r + x$; so ist für's Gleichgewicht $Q(r + x) = Pr$, also offenbar $P > Q$; setzt man daher $P = Q + F$, so ist F der aus der unvollkommenen Biegsamkeit des Seils entspringende Widerstand und aus der Gleichung $Q(r + x) = (Q + F)r$, sofort

$$F = \frac{Qx}{r} \ldots (1.$$

Aus den zur Bestimmung der Gröfse x vorgenommenen Versuchen geht hervor, dafs die Unbiegsamkeit der Seile, der Spannung gerade und dem Durchmesser der Rolle verkehrt, so wie auch bei neuen Seilen der 2ten, bei mehr gebrauchten der $\frac{3}{2}$, und bei ganz dünnen Schnüren oder Bändern der ersten Potenz der Dicke des Seiles gerade proportional seyen, so, dafs, wenn wieder d die Dicke des Seiles, r der Halbmesser der Rolle oder des Cylinders, um welchen es geschlagen wird, Q die Spannung und k ein Erfahrungscoefficient ist, sofort für neue Seile $F = kd^2\frac{Q}{r}$, für schon gebrauchte $F = kd^{\frac{3}{2}}\frac{Q}{r}$, und für ganz dünne Schnüre $F = kd\frac{Q}{r}$ ist.

Da aus der obigen Gleichung (1 $x = \frac{r}{Q}F$ folgt, so erhält man, wenn für F diese Werthe substituirt werden, die Vergröfserung x des Hebelarmes, woran die Last Q hängt, indem man für neue Seile das

Quadrat der Dicke des Seils mit dem Erfahrungscoefficienten k multiplicirt; in den übrigen beiden Fällen mufs man k beziehungsweise mit $d^{\frac{3}{2}}$ und d multipliciren.

Werden d und r in Wiener Zollen ausgedrückt, so kann man den Versuchen zu Folge ganz einfach $k = \frac{1}{2}$ setzen.

Beispiel. Ist ein 2 Zoll dickes Seil über eine Rolle von 18 Zoll Durchmesser gelegt, um damit eine Last von 500 Pfund aufzuziehen, so ist $r = 9 + 1 = 10$ und die Vergröfserung des Hebelarmes der Last (für ein neues Seil) $x = \frac{1}{2} . 4 = 2$, daher ist $500 \times 12 = P \times 10$ oder $P = 600$ Pfd. Bei vollkommener Biegsamkeit des Seils dürfte P nur $= 500$ Pfund seyn, so, dafs also der Widerstand, welcher von der Steifheit des Seils herrührt, nach dieser Annahme 100 Pfund beträgt.

Für ein gebrauchtes Seil und eine dünne Schnur, oder ein dünnes (wenn auch breites) Band, wäre dieser Widerstand nach den angegebenen Formeln beziehungsweise (wegen $x = 1{\cdot}41$ und $= 1$) $70\frac{1}{2}$ und 50 Pfund.

Anmerkung Für die gewöhnlich vorkommenden Fälle, in welchen das Seil schon gebraucht ist, kann man, wenn d die Dicke des Seiles und D der Durchmesser der Rolle, beides in Wiener Zollen ausgedrückt bezeichnet, genau genug $\frac{P}{Q} = 1 + {\cdot}684 \frac{d^2}{D}$, also $F = P - Q = {\cdot}684 \frac{d^2}{D} Q$ setzen, woraus auch, wenn man das Verhältnifs $\frac{P}{Q} = k$ setzt, $\frac{D}{d} = \frac{{\cdot}684\, d}{k - 1}$ folgt, so dafs man aus dieser Relation den Durchmesser D der Rolle bestimmen kann wenn d und k gegeben sind. Müfste z. B. für irgend einen Fall das Seil zwei Zoll dick seyn, und wollte man für die Steifheit des Seils nur 4 Procent von der Last Q zugeben; so würde wegen $d = 2$ und $P = 1{\cdot}04\, Q$ sofort $\frac{D}{d} = 34{\cdot}2$, also $D = 68{\cdot}4$ Zoll. Gestattet man dagegen 8 Procent, so darf die Rolle nur halb so grofs seyn u. s. w.

§. 247. Steifheit des Seiles beim Rad an der Welle. Um aufser der Achsenreibung auch noch diesen Widerstand in Rechnung zu bringen, mufs man in der Gleich. (1 des §. 238 statt r setzen $r + \frac{1}{2} d^2$, wenn man nämlich, um ganz sicher zu gehen, den ungünstigsten Fall (d. i. ein neues Seil) voraussetzt. Dadurch wird mit Rücksicht auf alle Nebenhindernisse, die nöthige Kraft:

$$P = \frac{Q(\ \ + \frac{1}{2} d) + (Q + G) f r'}{R - f r'}.$$

(Ein Beispiel hiezu siehe in den Zusätzen.)

§. 248. Steifheit des Seiles beim Flaschenzuge. Um diesen Widerstand beim Flaschenzug in Rechnung zu bringen, mufs man in §. 239, wenn man die dortigen Bezeichnungen auch hier beibehält, dagegen die Dicke des Seiles $= \delta$ setzt, nicht blofs $t_2 = m t_1$, sondern (wenn man $k = \frac{1}{2}$ setzt)

$$t_2 = m t_1 + k \delta^2 \frac{t_1}{\frac{1}{2} D} = t_1 \left(m + \frac{\delta}{D} \right),$$ d. i. $m + \frac{\delta^2}{D}$ statt m setzen.

Da nun dasselbe durchaus geschieht, so verwandelt sich die Gleichung (2 des §. 239, mit Rücksicht auf den hier bezeichneten Widerstand, und wenn man Kürze halber

$$m + \frac{\delta^2}{D} = 1 + 2f\frac{d}{D} + \frac{\delta^2}{D} = M$$

setzt, in die folgende:

$$P = \frac{M^n (M-1)}{M^n - 1} Q.$$

So wäre für das im genannten Paragraphe gewählte Beispiel, wo $D = 10$, $\delta = 1\frac{3}{4}$, $n = 6$ und $f = \cdot 15$ angenommen wurde, für ein 1 Zoll dickes Seil, also für $\delta = 1$ sofort $M = 1\cdot152$ und $M^n = 2\cdot337$, folglich $P = \cdot 2657\ Q$ oder nahe $P = \frac{4}{15} Q = \frac{1}{3\cdot75} Q$, so dafs durch die Steifheit des Seiles allein eine Kraft von $\left(\frac{1}{3\cdot75} - \frac{1}{5} \right) Q = \frac{1}{15} Q$ oder $6\frac{2}{3}$ Procent der Last, welche mithin doppelt so grofs als jene ist, welche für die Zapfenreibung nöthig war, erschöpft wird; mit dieser zusammen beträgt der Mehraufwand an Kraft (da sonst $P = \frac{1}{6} Q$ wäre) nahe $\frac{1}{30} + \frac{1}{15}$, d. i. $\frac{1}{10} Q$ oder 10 Procent der Last.

Anmerkung. Da man unter den hier gemachten Vorausetzungen für 10 Rollen nahe $P = \frac{1}{5} Q$, für 16 Rollen $P = \frac{1}{6} Q$ und selbst für unendlich viele Rollen nur $P = (M-1)\ Q$ oder nahe $\frac{1}{7} Q$ findet; so sieht man, wie wenig durch die Vermehrung der Rollen (wegen den wachsenden Hindernissen) zu gewinnen ist.

§. 249. Steifheit der Ketten. Wickelt sich eine Kette von passender Construction um einen Cylinder C (Fig. 185) vom Halbmesser R, so bringt die Reibung in den Bolzen, deren Halbmesser wir mit r bezeichnen wollen, eine ähnliche Wirkung, wie die Unbiegsamkeit der Seile hervor.

Ist Q die Spannung der Kette, und f der Reibungscoefficient für die Bolzen, so ist fQ die Reibung, und da bei einer Umdrehung des Cylinders oder der Rolle C um einen beliebigen Winkel $aCb = i$ das Kettenglied um seinen Bolzen o denselben Winkel bod beschreibt, so ist, wenn p die Kraft bezeichnet, welche die Steifheit der Kette überwindet, bei einer kleinen Umdrehung der Rolle, nach dem Satze der virtuellen Geschwindigkeiten (§. 119), da Ri und ri die gleichzeitigen Wege der Kraft und Last sind: $p \,.\, Ri = fQ \,.\, ri$, und daraus

$p = \frac{r}{R} f Q$; da man aber denselben Widerstand auch auf der andern Seite, um die Glieder wieder aufzubiegen, annehmen kann, so läſst sich der gesammte Widerstand durch $F = \frac{2r}{R} f Q$ ausdrücken.

Zehntes Kapitel.

Von der Festigkeit der Materialien.

§. **250. Erklärung.** Unter der Festigkeit eines Körpers versteht man diejenige Kraft, mit welcher er dem Zerreiſsen, Zerbrechen, Zerdrücken oder Verdrehen, also überhaupt der Trennung seiner Theilchen widersteht, und zwar heiſst diese in den genannten Fällen beziehungsweise seine absolute, relative, rückwirkende und Drehungs- oder Torsionsfestigkeit.

Es ist für die Anwendung von groſser Wichtigkeit, die Festigkeit der Maschinenbestandtheile oder der Materialien, woraus sie hergestellt werden, bestimmen zu können, um ihnen, ohne einen unnützen Aufwand an Materiale herbeizuführen, die nöthige Stärke zu geben.

In der Regel erleiden die Körper vor der Trennung ihrer Theilchen eine mehr oder weniger merkbare Formänderung, nämlich eine Drehung, Biegung u. s. w. Wären die Körper vollkommen elastisch, so würde jede solche Formänderung, nach Beseitigung der äuſsern Einwirkung sogleich wieder verschwinden; allein dieses findet bei allen uns bekannten Körpern nur bis zu einer gewissen Grenze (der Elasticitätsgrenze) Statt. Das Maſs der gröſsten Kraft, welche ein Körper auszuhalten vermag, ohne daſs dadurch noch eine bleibende Ausdehnung, Biegung u. s. w. hervorgebracht wird, bezeichnet seine Elasticitätsgrenze; diejenige Kraft hingegen, welche um den kleinsten Theil vermehrt, eine Trennung der Theile bewirkt, also gleichsam mit der Festigkeit des Körpers im Gleichgewichte steht, gibt das Maſs für die Festigkeit desselben an.

Absolute Festigkeit.

§. **251. Maſs dieser Festigkeit.** Nach den zahlreich angestellten Versuchen, steht unter übrigens gleichen Umständen und der Voraussetzung, daſs die zerreiſsenden Kräfte nach der Längenrichtung, also z. B. bei Holzarten mit den Fasern parallel wirken, die absolute Festigkeit mit dem Querschnitt des Körpers im geraden Verhältnifs. Sind nämlich a und a' die Querschnitte zweier Prismen aus derselben Materie, und p, p' ihre absoluten Festigkeiten, so ist

$$p : p' = a : a', \text{ also } p = \frac{p'}{a'} a = m a \ldots (1,$$

wenn man nämlich den aus Versuchen zu bestimmenden, und als constant anzunehmenden Quotienten $\frac{p'}{a'} = m$ setzt; es wird also die absolute Festigkeit irgend eines Körpers gefunden, wenn man dessen kleinsten Querschnitt mit dem seiner Materie entsprechenden Coefficienten m, welchen man für das Mafs der absoluten Festigkeit, oder auch der Cohäsion nimmt, multiplicirt.

Da es sich jedoch in der Anwendung weniger um die Kraft, bei welcher ein Körper wirklich abgerissen wird, als um die Bestimmung jener Last handelt, welche er noch mit Sicherheit tragen kann; so nimmt man für die gröfste Belastung im Durchschnitte bei Metallen die Hälfte, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$, bei Hölzern und Seilen aber höchstens den dritten Theil von der entsprechenden absoluten Festigkeit, man setzt also, wenn Q diese Belastung ist, $Q = \frac{1}{2} m a$ bis $\frac{1}{4} m a$.

§. **252. Modul der Elasticität.** Um sich jedoch nicht auf das Grerathewohl zu verlassen, so soll die Belastung Q noch innerhalb der Elasticitätsgrenze des betreffenden Körpers liegen, d. h. es soll durch diese Last noch keine bleibende Ausdehnung entstehen. Liegen aber die Belastungen innerhalb dieser Grenze, so verhalten sich die dadurch bewirkten Ausdehnungen gerade wie die Lasten, wie die Längen der Prismen, und verkehrt wie ihre Querschnitte, so, dafs wenn l, L die Längen, a, A die Querschnitte, p, P die (innerhalb der genannten Grenze liegenden) Belastungen, und d, D die dadurch bewirkten Ausdehnungen in zwei aus derselben Materie bestehenden Prismen sind, sofort $d : D = \frac{lp}{a} : \frac{LP}{A}$ Statt findet.

Bezeichnet man die Ausdehnung D, welche das Gewicht von $P = 1$ Pfund in einem Prisma von $A = 1$ Quadratzoll Querschnitt, und der Länge von $L = 1$ Fufs hervorbringt, mit $\frac{1}{M}$ (wo M immer eine grofse Zahl seyn wird), so ist auch nach der vorigen Proportion $d : \frac{1}{M} = \frac{lp}{a} : 1$, und daraus $d = \frac{lp}{Ma}$, oder wenn man $\frac{p}{a}$, d. i. das

Gewicht oder die Belastung, welche auf einen Quadratzoll kommt, $= q$ setzt, auch: $d = \frac{lq}{M} \ldots (1.$

Könnte die Ausdehnung innerhalb der Elasticitätsgrenze $d = l$ werden, so müfste dafür $q = M$ seyn; diese Gröfse M aber, welche die in Pfunden ausgedrückte Belastung bezeichnet, für welche ein Prisma bei dem Querschnitte von 1 Quadratzoll um seine eigene Länge (dieses als möglich gedacht) ausgedehnt wird, heifst Modul der Elasticität; ist dieser für die einzelnen Materien bekannt, so ist man im Stande, nach der vorigen Formel (1 die durch irgend eine, jedenfalls aber noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende, auf den Querschnitt von 1 Quadratzoll kommende Belastung, in einem Körper von der Länge l entstehende Ausdehnung d zu berechnen, dabei erhält man d in demselben Mafse (in Fufs, Zolle u. s. w.), in welchen man l ausgedrückt hat.

§. 253. Werthe für die absolute Festigkeit *m und den* **Modul der Elasticität** *M mehrerer in der Anwendung am häufigsten vorkommenden Materialien.* Wird der Querschnitt a des Prisma in Quadratzollen, die Länge l und Ausdehnung d desselben gleichzeitig in Fufsen oder Zollen, und P und Q in Pfunden, Alles in Wiener Mafs und Gewicht ausgedrückt; so ist nach den beiden vorhergehenden Paragraphen die absolute Festigkeit

$$Q = ma \ldots (1,$$

und, wenn P die noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Belastung des Prisma, folglich $\frac{P}{a} = p$ jene auf den Quadratzoll ist, die dabei bewirkte Längen-Ausdehnung

$$d = \frac{lp}{M} \ldots (2,$$

wobei die Werthe von m und M für die betreffenden Körper aus der nachstehenden Tabelle, in welcher die angegebenen Zahlen aus ganz natürlichen Gründen oft zwischen sehr weiten Grenzen variiren müssen, zu nehmen sind.

Benennung der Körper.	Absolute Festigkeit m.	Modul der Elasticität M.
Hölzer.		
Buchen (Roth-)	10000 — 16000	1240000 — 1360000
Eichen	9000 — 18000	1300000 — 1480000
Eschen	14000 — 17000	1240000 — 1400000
Fichten	8600 — 12000	1600000 — 2000000
Kiefer	12000 — 17000	1500000 — 1700000
Lärchen	7000 — 9000	930000 — 1280000
Tannen (Weifs-)	10000 — 13000	1250000 — 1850000
Ulmen	12000 — 13500	1150000 — 2310000
Weifsbuchen (Hornb.) . .	17000 — 17600	— —
Metalle.		
Eisen (geschmiedet) . . .	40000 — 60000	22000000 — 25000000
dto. Blech (gewalzt) . .	45000 — 50000	22000000
dto. Draht	80000 — 83000	20000000 — 30000000
dto. Clavierdraht . . .	110000 — 160000	18600000 — 24800000
dto. (Gufs-)	15000 — 20000	11400000 — 16000000
Kupfer (gehämmert) . . .	25000 — 34000	— —
dto. (gewalzt)	26000 — 32000	— —
dto. (Draht)	34000 — 65000	— —
Stahl	96000 — 124000	25000000 — 26000000
Andere Substanzen.		
Marmor	1580	2195000
Stein (Portland)	750	1335000
Seile (Hanf-) trocken . .	6000 — 7500	
dto. dto. nafs . . .	4600 — 5500	
Ziegel (Mauer-)	245	— —

Anmerkung. In der Anwendung nimmt man für die Last, welche die Körper mit Sicherheit tragen sollen, von diesen Zahlen bei Holz gewöhnlich $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{4}$, ja sogar, wenn es sich um die gröfste Sicherheit und längere Dauer handelt, oft nur $\frac{1}{10}$, und bei Metallen $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{6}$. Der ausgeglühte Draht besitzt nur $\frac{3}{5}$ von der Stärke oder Festigkeit des nicht geglühten. Seile sollen durch die Drehung ihrer Litzen nicht mehr als um $\frac{1}{5}$ verkürzt werden, weil sie sonst an Festigkeit verlieren.

Setzt man das Gewicht, mit welchem das Schmiedeisen bleibend belastet werden darf = 10000 Pfund, so ist die gröfste Ausdehnung, die es dabei und auf diese Weise erlangen dürfte, nach der obigen Formel (2, wenn man $p = 10000$ und $M = 23500000$ setzt: $d = \cdot 0004\, l$. Nach Duleau darf diese Ausdehnung noch ohne Nachtheil $\cdot 00066$ oder $\frac{1}{1500}\, l$ betragen, wonach also die bleibende Belastung $p = 15660$ Pfund seyn dürfte.

Für das Gufseisen kann nach Tredgold die gröfste Ausdehnung $\frac{1}{1200}$ der Länge betragen, diefs gibt also, wenn man $M = 13700000$ setzt, für die gröfste bleibende Belastung auf den Quadratzoll $p = 12000$ Pfund.

Nimmt man für Eichenholz als gröfste Belastung 1000 Pfund auf den Quadratzoll, wenn es nämlich jedem Wetter ausgesetzt ist, und lange dauern soll, so erhält man, $M = 1390000$ gesetzt, für die gröfste Ausdehnung, die es annehmen darf $d = \cdot 0007$, oder nahe $\frac{1}{1400} l$.

§. 254. **Beispiele.** 1. Wie stark mufs eine schmiedeiserne Tragstange, deren Querschnitt quadratförmig ist, seyn, wenn sie eine Last von 50 Centnern mit Sicherheit tragen soll?

Soll die Stange a Zolle im Gevierte halten, und nimmt man nach der obigen Bemerkung die Tragfähigkeit des Schmiedeisens zu 15000 Pfund an, so ist $15000 a^2 = 5000$, also

$$a^2 = \tfrac{1}{3} \text{ und } a = \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \cdot 58 \text{ Zoll.}$$

2. Welche Dicke soll man dem Eisenbleche eines cylinderischen Dampfkessels von 5 Fufs Durchmesser geben, wenn in demselben der Dampf eine absolute Spannung von 4 Atmosphären erreicht?

Für den Durchmesser D des Kessels in Zollen, und den Druck des Dampfes auf jeden Quadratzoll $= q$ gesetzt, und in Pfunden ausgedrückt, findet man (§. 276), wenn p das Tragvermögen des Materiales ist, die Dicke des Kesselbleches in Zollen $d = \frac{Dq}{2p} + f$. Setzt man nun für gewalztes Eisenblech $p = 20000$, nimmt aber davon aus mehreren Ursachen (weil der Kessel nicht aus einem Stück besteht, die Cohäsion des im Feuer liegenden Theils um die Hälfte vermindert wird, die Erhitzung und Ausdehnung nicht ganz gleichmäfsig ist, dann wegen der Abweichung von der genauen Cylinderform, so wie endlich der möglichen Stöfse oder Erschütterungen wegen), davon nur den sechsten Theil, rechnet ferner den Druck einer Atmosphäre zu $12\frac{3}{4}$ Wiener Pfund auf den Wiener Quadratzoll, so wird für eine absolute Dampfspannung von n Atmosphären im Kessel, welcher eine Atmosphäre entgegen wirkt, die genannte Blechdicke in Zollen:

$$d = \frac{(n-1)D}{555} + \cdot 114,$$

wobei $\cdot 114$ die nöthige Stärke des Kessels für $n = 1$ ist. Für das gegebene Beispiel ist also, wegen $D = 60$ und $n = 4$, sofort

$$d = \tfrac{180}{555} + \cdot 114 = \cdot 438 \text{ Zoll} = 5\tfrac{1}{5} \text{ Linie.}$$

Relative Festigkeit.

§. 255. Theorie derselben. Wird ein prismatischer Körper, z. B. ein hölzerner Balken aB' (Fig. 186) in horizontaler Richtung mit dem einen Ende AB' unveränderlich befestigt, z. B. in eine verticale Wand MN eingemauert, und derselbe am andern Ende O so lange belastet, bis der Balken abbricht, was immer an der Wurzel oder dem befestigten Ende AB' geschieht; so heifst das auf diese Weise wirkende kleinste Gewicht P, bei welchem der Bruch erfolgt, die relative, öfter auch die respective Festigkeit des Balkens. Bei der vor dem Bruche eintretenden Biegung behält eine Schichte Cc', die sogenannte neutrale, ihre ursprüngliche Länge, während die über derselben liegenden, in demselben Verhältnifs, als sie der obersten Bb' näher liegen, immer mehr ausgedehnt, die unter dieser neutralen Schichte liegenden dagegen in demselben Verhältnifs gegen die unterste Aa' zu, zusammen gedrückt oder verkürzt werden.

Es sey nun hier insbesondere der Querschnitt des Balkens ein Rechteck von der Breite $AA' = b$ und Höhe, welche hier vertical angenommen wird, $AB = h$, so wie die Länge $Cc = l$. Da der Bruch in der Ebene AB' um die neutrale Achse CC', welche man in der halben Höhe liegend annehmen kann, weil die Fasern sowohl oberhalb gegen die Ausdehnung als unterhalb gegen die Zusammendrückung denselben Widerstand leisten, Statt findet; so sey im Augenblicke des Bruches $Be = d$ (Fig. 186, a) die Gröfse der Ausdehnung der obersten Fasern, und p ihre absolute Festigkeit, folglich widersteht in der verticalen unendlich dünnen Schichte An die oberste Faser von der unendlich kleinen Höhe $er = s$ dem Zerreifsen mit der Kraft ps, und irgend eine andere mn von derselben Höhe mit jener $p's$, wobei jedoch, da der Widerstand der Ausdehnung der Fasern proportional, also $p' : p = mn : d$, sofort $p' = p\,\frac{mn}{d}$ ist. Die Summe der Widerstände von Seite aller ausgedehnten Fasern von C bis B ist demnach $= \frac{p}{d}(s.mn + s.m'n' + \ldots) = \frac{p}{d} . \frac{1}{2} CB . Be$, weil der eingeklammerte Theil die Fläche des Dreieckes BCe bildet. Da man sich diesen gesammten Widerstand $R = \frac{p}{d} . \frac{1}{2} . \frac{1}{2} h . d = \frac{1}{4} ph$ im Schwerpuncte des Dreieckes, also in der Entfernung von $\frac{2}{3} CB$ vom Drehungspuncte C denken kann, so ist das statische Moment von R auf diesen Punct C bezogen $= \frac{1}{4} ph \times \frac{2}{3} . \frac{1}{2} h = \frac{1}{12} ph^2$, und wenn man, da dasselbe in allen verticalen Schichten, welche zusammen die Breite b des Balkens ausmachen, Statt findet, diese Momente summirt, so hat man das gesammte Moment von Seite der ausgedehnten Fasern auf die Achse CC' bezogen $= \frac{1}{12} p b h^2$.

Da man nun, wie bereits bemerkt, die Widerstände von Seite der zusammen gedrückten Fasern jenen der ausgedehnten, folglich auch ihr Moment dem vorigen gleich zu setzen hat (das Repulsionsmoment ist nämlich, wenigstens theoretisch genommen, dem Cohäsionsmoment gleich), so wird das Moment der gesammten Widerstände

$$= 2 \cdot \frac{1}{12} p b h^2 = \frac{1}{6} p b h^2,$$

und da dieses dem Momente der Kraft P, welche diesen Bruch bewirkt, gleich seyn mufs, so hat man $Pl = \frac{1}{6} p b h^2$, und daraus die relative Festigkeit dieses Balkens, wenn man wieder wie oben die absolute Festigkeit durch m bezeichnet, also $p = m$ setzt:

$$P = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{l} \quad \ldots (1,$$

die relativen Festigkeiten zweier parallelepipedischer Balken von einerlei Materie verhalten sich also wie die Breiten, die Quadraten ihrer Höhen, und verkehrt wie ihre Längen.

Wäre die Last P über die ganze Länge des Balkens gleichförmig vertheilt, so könnte man diese im Schwerpuncte, also in der halben Länge vereinigt annehmen, wodurch sie am freien Ende O oder in der Entfernung l von der Brechungsachse CC' nur mit der Hälfte oder mit $\frac{1}{2}P$ wirksam, also

$$\frac{1}{2} P = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{l} \quad \text{oder} \quad P = \frac{2}{6} m \frac{b h^2}{l} \quad \ldots (2 \text{ wird};$$

ein Balken kann also eine doppelt so grofse Last tragen, wenn diese anstatt an dem freien Ende angebracht, über die ganze Länge gleich vertheilt wird.

Will man daher im erstern Falle auch auf das eigene Gewicht G des Balkens Rücksicht nehmen, so mufs man in der Formel (1 statt P setzen $P + \frac{1}{2}G$,

$$\text{wodurch } P = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{l} - \frac{1}{2} G \quad \ldots (1'$$

wird; im letztern Falle kann G sogleich unter P mitbegriffen werden, obschon man in den wenigsten Fällen von diesem unbedeutenden Gewichte G Notiz zu nehmen hat.

Wird der Balken einmal die breite Seite h, und das andere Mal die schmälere b vertical gerichtet befestigt, so verhält sich seine Festigkeit in diesen beiden Lagen wie $h : b$.

§. 256. Ist der Querschnitt des Balkens ein Kreis vom Halbmesser r, so ist, wenn die übrigen Bezeichnungen dieselben bleiben, die relative Festigkeit des an einem Ende horizontal befestigten, und am andern belasteten Cylinders:

$$P = \tfrac{1}{4} m \frac{r^3 \pi}{l} \; . \; . \; . \; (3.$$

Ist der Cylinder hohl, dabei der äufsere Halbmesser $= R$ und der innere $= r$, so ist

$$P = \tfrac{1}{4} m \frac{(R^4 - r^4)\pi}{R\, l} \; . \; . \; . \; (4.$$

Ist die Last gleichförmig über die ganze Länge vertheilt, so geht auch hier, wie beim rechteckigen Querschnitt, der Coefficient $\frac{1}{4}$ in das Doppelte, d. i. $\frac{1}{2}$ über. Soll das Gewicht des Cylinders berücksichtigt werden; so gilt das im vorigen Paragraphe hierüber Bemerkte auch hier wieder, d. h. man mufs $P + \frac{1}{2} G$ statt P setzen.

§. 257. Wird der Balken von der Länge $AB = d$ (Fig. 187) anstatt in B eingemauert, um eine beliebige Länge $BA' = d'$ verlängert, an dem Ende A' mit P' belastet, welche Last aus der Gleichgewichtsbedingung $P'd' = Pd$ bestimmt wird, und der Balken in B unterstützt, oder eine aufwärts wirkende Kraft $Q = P + P'$ angebracht; so bleibt noch Alles, auch, wenn man den Balken, wie in Fig. 187, a, umkehrt, im Gleichgewichte, und jede Hälfte AB und $A'B$ befindet sich genau in der Lage wie in §. 255, so, dafs also, wenn der Querschnitt ein Rechteck von den bezeichneten Dimensionen ist, nach der Formel (1 des genannten Paragraphes $P = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{d}$ und $P' = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{d'}$, folglich $Q = P + P' = \frac{1}{6} m b h^2 \left(\frac{d + d'}{d\, d'}\right)$ ist. Ist die ganze Länge des Balkens, oder die Entfernung der beiden Stützen $d + d' = l$, so ist die relative Festigkeit des an beiden Enden frei, horizontal aufliegenden, und im Puncte B belasteten Balkens vom genannten Querschnitt:

$$Q = \tfrac{1}{6} m b h^2 \, . \, \frac{l}{d\, d'} \; . \; . \; . \; (5,$$

wobei $d' = l - d$ ist. Da nun Q die kleinste Last ist, welche den Balken an diesem Puncte B bricht, der Bruch $\frac{l}{d\, d'}$ aber für $d = d' = \frac{1}{2} l$ am kleinsten wird, so erhält auch diese Last Q für den Halbirungspunct O der Länge AA' den kleinsten Werth, d. h. der Balken ist in diesem Puncte O am schwächsten, und die Last, welche ihn hier zu brechen

vermag, ist $Q = \frac{1}{6} m b h^2 \frac{l}{\frac{1}{4} l^2}$ oder $Q = \frac{4}{6} m \frac{b h^2}{l}$ . . . (6.
also (§. 255, Gl. 1) dabei vier Mal so stark, als wenn er an dem einen Ende eingemauert und an dem andern belastet wäre.

Haben die beiden Stücke AB und $A'B$ des Balkens die Gewichte k und k', und ist das ganze Gewicht $k + k' = G$, so wirkt von dem Gewichte k, welches man sich im Schwerpuncte, also in der halben Länge von AB wirksam denken kann, $\frac{1}{2} k$ auf die Stütze A und $\frac{1}{2} k$ auf B; eben so wirkt von k' die Hälfte auf A' und $\frac{1}{2} k'$ auf B, folglich kommt auf den Belastungspunct B noch $\frac{1}{2} k + \frac{1}{2} k' = \frac{1}{2} G$, so, daſs also Q in den vorigen Formeln (5 und (6 noch um diese Gröſse $\frac{1}{2} G$ vermehrt werden müſste.

Soll der Balken durch das eigene Gewicht G, oder eine über die ganze Länge gleich vertheilte Last Q gebrochen werden, so müſste man in den vorigen Formeln $\frac{1}{2} G$ oder $\frac{1}{2} Q$ statt Q setzen; thut man dieses in der Formel (6, so erhält man für die brechende Last oder die relative Festigkeit des Balkens:

$$Q = \frac{8}{6} m \frac{b h^2}{l} \quad . . . (7,$$

d. h. der Balken ist in diesem Falle doppelt so stark, als wenn er bloſs in der Mitte belastet wird, und acht Mal so stark, als wenn er an einem Ende befestigt, und am andern belastet wird.

Anmerkung, 1. Alle diese Beziehungen zwischen den an beiden Enden frei aufliegenden, gegen den an einem Ende befestigten Balken gelten natürlich auch für die übrigen Querschnitte der Balken; ist dieser z. B. ein Kreis, so hat man in allen diesen Formeln (§. 256) $\frac{1}{4} m r^3 \pi$ anstatt $\frac{1}{6} m b h^2$ zu setzen u. s. w.

Derselbe in (7 ausgedrückte Werth für Q gilt auch für den Fall, in welchem der Balken an beiden Enden eingemauert und in der Mitte belastet wird, wodurch ein dreifacher Bruch entstehen muſs.

Liegt der Balken nicht horizontal, sondern schief, und ist l' die Horizontalprojection seiner Länge l; so gelten dieselben Formeln, wenn man in diesen l' statt l schreibt.

Anmerkung 2. Soll aus einem runden Baume der stärkste vierkantige Balken gehauen werden, so ist es keinesweges jener vom gröſsten, d. i. quadratischen, sondern von jenem Querschnitte $b h$, für welchen $b h^2$, wenn man b und h als veränderlich ansieht, in den Formeln (1, (5, (6, (7 den gröſsten Werth erhält, und wofür man $b : h = 1 : \sqrt{2} = 1 : 1{\cdot}414$ findet; vorausgesetzt jedoch, daſs man den Balken dann hochkantig stellt, d. i. h zur verticalen Höhe, und b zur horizontalen Breite nimmt.

Man erhält diesen gröfsten Querschnitt ganz einfach durch Construction, indem man den Durchmesser AB (Fig. 188) des runden Baumes in drei gleiche Theile theilt, darauf in den Theilungspuncten a und b bis zum Umfange des Kreises die Perpendikel aC, bD errichtet, und aus den Puncten C und D das Rechteck $ACBD$ construirt, in welchem dann $AC = BD = b$ die Breite, und $AD = BC = h$ die Höhe des Balkens bildet. Bei diesem Querschnitt und der hochkantigen Lage ist der Balken gegen jenen, dessen Querschnitt ein in den Kreis AB eingeschriebenes Quadrat bildet, im Verhältnifs von 2·83 : 3·1 stärker.

§. 258. Besitzen ein massiver und hohler Cylinder von gleicher Länge dieselbe Masse, und bestehen sie aus derselben Materie, ist ferner die Wanddicke des letztern $R - r = \frac{1}{n} R$, und sind P und P' ihre relativen Festigkeiten, so findet man (durch Vergleichung der correspondirenden Formeln in §. 256 oder 257)

$$P : P = n\sqrt{(2n - 1)} : 2n^2 - 2n + 1 \ldots (p.$$

So ist z. B., wenn die Dicke des hohlen Cylinders $\frac{2}{5} R$, also $n = \frac{5}{2}$ ist, $P : P' = 5 : \frac{17}{2} = 10 : 17$. Ist die Wanddicke nur $\frac{1}{5} R$, also $n = 5$, so ist $P : P' = 15 : 41 = 10 : 27$. Für die Dicke $= \frac{1}{10} R$ ist $P : P' = 10 : 42$ u. s. w., so, dafs also die relative Festigkeit des aus demselben Materiale bestehenden hohlen Cylinders verhältnifsmäfsig immer gröfser wird, je dünner der Cylinder oder die Röhre ist. Ähnliches gilt auch für andere als kreisförmige Querschnitte.

Aus diesem Grunde vertheilt man oft die gegebene Masse (z. B. Gufseisen) nach dem sogenannten T, oder doppelt T förmigen Querschnitt, wie in Fig. 189, um die Tragfähigkeit der Körper zu vermehren. Die Rippen, welche man bei gufseisernen Rädern, Balanciers u. s. w. anbringt, haben denselben Zweck.

§. 259. Körper von gleichem Widerstande.

Der in §. 255 betrachtete Balken wird unter sonst gleichen Umständen immer an der Stelle AB', wo er aus der Wand hervorragt, brechen, indem für diesen Querschnitt das Moment der Belastung am gröfsten ist. Es haben daher die übrigen Querschnitte eine unnütze Stärke, und diese können also um so kleiner seyn, je weiter sie von der Brechungsebene AB' entfernt sind. Stellt man sich daher die Aufgabe, diese Querschnitte von AB' gegen ab' so abnehmen zu lassen, dafs alle Querschnitte die nämliche Festigkeit besitzen, der Bruch also eben so gut in dem einen als dem andern erfolgen kann; so heifst ein solcher Balken ein Körper von gleichem Widerstande.

Für den eben erwähnten Fall der horizontalen Befestigung des Balkens an dem einen, und Belastung an dem andern Ende, und in der Voraussetzung, dafs die Breite desselben durchaus dieselbe seyn soll, findet man, dafs entweder die obere oder untere Fläche nach einer Parabel gekrümmt seyn mufs, wenn die untere oder obere eine horizontale Ebene ist; im letztern Falle erhalten nämlich die verticalen Seitenflächen des Balkens die Form *abc* in Fig. 190. Ist dagegen die Last (wie es z. B. für Balkone angenommen wird) über die Länge gleichförmig vertheilt, so ist die untere Fläche, wenn die obere horizontal seyn soll, eine schiefe Ebene, und die verticalen Seitenflächen des Balkens bilden das in Fig. 190, *a* dargestellte Profil *abc*.

Liegt der Balken an beiden Enden frei auf, und wird er in der Mitte *c* (Fig. 190, *b*) belastet, so wird, wenn die obere Fläche horizontal, eben und von gleicher Breite ist, die untere Fläche von zwei in *cd* zusammenstofsenden Parabeln, dagegen wenn die Last über die Länge gleich vertheilt ist, von einer Ellipse *adb* begrenzt, deren Halbachsen *ac* und *cd* sind, u. s. w.

§. 260. Werthe der Brechungscoefficienten. Nennt man in den obigen Formeln, z. B. in $P = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{l}$ für einen rechteckigen, oder in $P = \frac{1}{4} m \frac{r^3 \pi}{l}$ (§§. 255, 256) für einen kreisförmigen Querschnitt, den aus Versuchen zu bestimmenden Factor m den Brechungscoefficienten (man könnte auch eben so gut $\frac{1}{6} m$ in der ersten, und $\frac{1}{4} m$ in der zweiten Formel so nennen), so kann man, directen Versuchen zu Folge, wodurch man der Wahrheit näher kommt, als wenn man, wie es theoretisch richtig wäre (§. 255), für m die absolute Festigkeit aus der Tabelle in §. 253 nimmt, dafür die in der nachstehenden Tabelle zusammengestellten, immer wieder, wie es in der Natur der Sache liegt, zwischen ziemlich weiten Grenzen liegenden Werthe nehmen, welche sich wieder auf das Wiener Mafs und Gewicht beziehen, und wobei insbesondere in den obigen Formeln die Gröfsen b, h, r, l in Zollen ausgedrückt werden müssen.

Benennung der Körper.	Brechungscoefficient m.	Benennung der Körper.	Brechungscoefficient m.
Buchen (Roth-) .	8000 — 20000	Tannen . .	5800 — 12000
Eichen	7000 — 20000	Ulmen . . .	5000 — 10000
Eschen	9500 — 12000	Gufseisen .	20000 — 47000
Fichten	7000 — 11000	Kalksteine .	600 — 1400
Kiefer	6000 — 14000	Sandsteine .	500 — 700
Lärchen	4500 — 9500	Ziegel . . .	150 — 280

Anmerkung. Im grofsen Durchschnitt wäre also für Holz $m = 10000$, und für Gufseisen $m = 30000$, also ungefähr drei Mal so grofs.

Für jene Körper, die in dieser Tabelle nicht vorkommen, kann man die Werthe von m aus der Tabelle der absoluten Festigkeit in §. 253 nehmen, wenn man es nicht vorzieht, mit dem betreffenden Körper, d. i. mit demselben Materiale directe Versuche, die immer sicherer sind, vorzunehmen.

Um hinsichtlich des Tragvermögens ganz sicher zu gehen, so nimmt man für die wirkliche Belastung bei Hölzern nur den zehnten, und bei Metallen den dritten oder vierten Theil dieser Brechungscoefficienten in Rechnung.

§. 261. Beispiele. 1. Ein gufseiserner Tragbalken von 3 Zoll Breite, 6 Zoll Höhe und 12 Fufs Länge liegt horizontal an beiden Enden frei auf; wie grofs darf die in der Mitte aufzuhängende Last Q seyn, damit er diese noch mit Sicherheit tragen kann?

Nach der obigen Formel (6 in §. 257, in welcher für das vorliegende Beispiel $b = 3$, $h = 6$, $l = 144$, und als Mittelwerth aus der vorigen Tabelle $m = 33500$ zu setzen ist, hat man

$$Q' = \frac{2}{3} . 33500 . \frac{3 \times 36}{144} = 16750 \text{ Pfund.}$$

Soll das eigene Gewicht des Balkens abgeschlagen werden, so bleiben, da der laufende Fufs eines gufseisernen Prisma von 1 Quadratzoll Querschnitt 2·9, also von 18 Quadratzoll 52·2 Pfund wiegt, demnach das Gewicht $G = 12 \times 52{\cdot}2 = 626$ Pfund ist, sofort

$$16750 - \tfrac{1}{2} . 626 = 16437 \text{ Pfund.}$$

Da aber bei dieser Belastung der Bruch erfolgen würde, so nimmt man davon nur den vierten Theil, also $Q = 4100$ Pfund.

Würde der Balken nicht hochkantig, sondern auf die breite Seite gelegt, so würde, da sich (wenn man in der Formel (7 oder (1 b mit h verwechselt) in diesen beiden Fällen allgemein $Q : Q' = b\,h^2 : b^2 h = h : b$ verhält, diese Belastung im Verhältnifs von $6 : 3 = 2 : 1$ geringer, also nur halb so grofs seyn dürfen.

2. Es soll mit Rücksicht auf das eigene Gewicht der Durchmesser einer gufseisernen cylinderischen Welle gefunden werden, welche in Zapfenlager liegt, die um 18 Fufs von einander abstehen, und in der halben Länge mit einem 16 Centner schweren Rade belastet ist.

Man hat zuerst, ohne Rücksicht auf das eigene Gewicht, aus der Formel (§. 256, 3, und §. 257 Anmerk. 1) $Q = \frac{4}{4} m \frac{r^3 \pi}{l}$, sofort

$$r^3 = \frac{l\,Q}{m\,\pi} = \frac{12 \times 18 \times 1600}{3{\cdot}14159 \times \frac{1}{4} . 33500} = \frac{345600}{26311},$$

woraus $r = 2{\cdot}35$ Zoll.

Berechnet man nun mit diesem genäherten Werthe das Gewicht der Welle, deren Querschnitt 17·35 Quadratzoll beträgt, so erhält man $G = 906$ Pfund, folglich die eigentliche Belastung

$$Q = 1600 + 453 = 2053 \text{ Pfund},$$

und wenn mit diesem neuen Werthe die Rechnung noch einmal eben so geführt wird, für den gesuchten Halbmesser der Welle $r = 2·77$ Zoll.

Wäre das Rad nicht in der Mitte angebracht, sondern von dem einen Lager um 6, also vom andern um 12 Fuſs entfernt, so würde die Stärke der Welle, wie die Formel (5, §. 257 zeigt, im Verhältniſs von $\frac{1}{9 \times 9} : \frac{1}{6 \times 12} = 8 : 9$ zunehmen, also in der vorigen Gleichung $r^3 = \frac{lQ}{m\pi}$ statt Q, $\frac{8}{9}Q$ zu setzen seyn, wodurch der vorige Werth von r nur mit $\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = ·962$ multiplicirt werden darf, um für diesen letztern Fall den entsprechenden Halbmesser der Welle zu erhalten; es wäre dafür $r = 2·65$ Zoll.

§. 262. Stärke der Wellzapfen. Da jeder Zapfen einer horizontalen Welle als ein an einem Ende befestigter, und über seine Länge gleichförmig belasteter Cylinder angesehen werden kann, so hat man aus der betreffenden Formel (§. 256) $P = \frac{1}{2} m \frac{r^3\pi}{l}$, sofort $r^3 = \frac{2}{\pi}\frac{lP}{m} = ·6366 \frac{lP}{m}$, woraus sich der Halbmesser r bestimmen läſst. Besteht der Zapfen aus Guſseisen, und nimmt man als mittlern Werth und in runder Zahl den Brechungscoefficienten (aus der Tafel in §. 260) m zu 30000 Pfund, davon aber, weil ein solcher Zapfen viel zu leiden, und ein Bruch sehr nachtheilige Folgen hat, nur den zehnten Theil als Tragvermögen, also 3000 Pfund; so wird

$$r^3 = ·0002122\, P\, l \;. \;. \;(1.$$

Buchanan, welcher die guſseisernen Zapfen der Wasserräder-Wellen etwas stärker annimmt, gibt dafür eine einfache Regel, wofür (Alles auf das Wiener Maſs und Gewicht reducirt) der Durchmesser jedes der beiden Zapfen

$$D = 1·11 \sqrt[3]{P} \;. \;. \;(2$$

zu nehmen ist, wenn P das Gewicht des Rades sammt der Welle in Centnern, also der Druck auf jeden Zapfen zu $\frac{1}{2}P$ angenommen wird.

Da sich ferner nach ihm die Tragkraft des Guſs- zu jenem des Schmiedeisens wie 9 : 14, also der Durchmesser eines guſseisernen zu jenem eines schmiedeisernen Zapfens wie $\sqrt[3]{14} : \sqrt[3]{9}$ verhält, so erhält man nach Buchanan den Durchmesser eines schmiedeisernen Zapfens aus der Formel

$$D = \cdot 96 \sqrt[3]{P} \ldots (3.$$

Nach Gerstner ist dieses Verhältnifs der Tragkraft zwischen unserm Gufs- und Schmiedeisen, wie $9 : 17 \cdot 5$, folglich für schmiedeiserne Zapfen

$$D = \cdot 889 \sqrt[3]{P} \ldots (4,$$

wobei, wie bereits bemerkt, P die doppelte Last in Centnern bezeichnet, welche der Zapfen zu tragen hat. Auch wird dabei für gewöhnlich angenommen, dafs die Länge des Zapfens seinem Durchmesser ziemlich gleich sey.

Beispiel. Um die Dicke der gufseiernen 4 Zoll langen Zapfen einer horizontalen Wasserradwelle zu finden, wenn jeder Zapfen einen Druck von 25 Centnern zu erleiden hat, so folgt aus der vorigen Formel (1, in welcher $P = 2500$ und $l = 4$ ist: $r^3 = 2 \cdot 122$, also $r = \sqrt[3]{(2 \cdot 122)} = 1 \cdot 285$ oder $D = 2 \cdot 57$ Zoll.

Nach Buchanan's Regel wäre (Form. 2) $D = 1 \cdot 11 \sqrt[3]{50} = 4$ Zoll. Sollen die Zapfen aus Schmiedeisen hergestellt werden, so erhält man nach der Formel (3 $D = \cdot 96 \sqrt[3]{50} = 3\frac{1}{2}$, dagegen nach jener (4 nur $3 \cdot 3$ Zoll.

Nimmt man für die Tragkraft des Gufseisens anstatt (wie es in der Formel 1 geschehen) 3000 nur 2000 (den Brechungscoefficient m also nur mit seinem kleinsten Werthe der Tabelle in Rechnung), so fällt der erste Werth von r oder D im Verhältnifs von $\sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{3} = 1 : 1 \cdot 145$ gröfser aus, oder es wird $D = 2 \cdot 57 \times 1 \cdot 145 = 2 \cdot 94$ oder 3 Zoll.

§. 263. Stärke der Zähne und Kämme. Für hölzerne Zähne oder Kämme, welche bei Stirnrädern auf den äufsern Umfang des Radkranzes, bei Kron- und Kammrädern auf der Kranzebene eingesetzt werden, hat man, je nachdem der Kammstiel vierkantig oder rund ist, die Formel (§§. 255, 256) $P = \frac{1}{6} m \frac{b h^2}{l}$ oder $P = \frac{1}{4} m \frac{r^3 \pi}{l} = \cdot 785 m \frac{r^3}{l}$ anzuwenden, und dabei unter b die Breite nach der Richtung der Achse, unter h die Dicke des Zahns, im Theilrifs gemessen, und unter l den Abstand dieses Theilkreises von der Wurzel des Zahnes (wo dieser am Radkranze aufsitzt) zu verstehen, und endlich für m nur den zehnten Theil des Brechungscoefficienten (aus §. 260) zu nehmen.

Nach Morin ist, wenn b die Breite der Zähne (bei Stirnrädern in der Richtung der Radachse), d die Dicke (im Theilkreis gemessen), l die Länge oder Höhe derselben (radialer Vorsprung über den Radkranz) alles in Wiener Zollen bezeichnet, für eine Geschwindigkeit des Theilkreises, welche unter 5 Fufs ist, $b = 4\,d$, für eine gröfsere Geschwindigkeit $b = 5\,d$, und wenn die Zähne dem beständigen Nafswerden ausgesetzt sind, $b = 6\,d$, wobei noch als äufserste Grenze für die Höhe $l = 1{\cdot}5\,d$ gesetzt wird. Um aber diesen Factor oder die Dicke d der Zähne zu bestimmen, hat man

für gufseiserne Zähne $d = {\cdot}03 \sqrt{P}$,

„ kupferne u. broncene $d = {\cdot}036 \sqrt{P}$,

für Zähne aus sehr hartem Holze (wie Weifsbuchen)

$$d = {\cdot}04 \sqrt{P}.$$

Tredgold nimmt $d = {\cdot}029 \sqrt{P}$ für die Dicke der gufseisernen Zähne, und ihre Breite b so, dafs auf je 100 Pfund Druck (auf das Wiener Mafs und Gewicht bezogen) $\frac{3}{10}$ Zoll kommen, für den Druck P also $b = {\cdot}003\,P$ wird. Nach dieser Regel ist die folgende Tabelle berechnet.

Druck auf die Zähne in Pfunden P	Dicke d.	Breite b.	Druck auf die Zähne in Pfunden P.	Dicke d.	Breite b.	Druck auf die Zähne in Pfunden P.	Dicke d.	Breite b.
	in Zollen.			in Zollen.			in Zollen.	
100	0·29	0·3	2100	1·33	6·3	4100	1·86	12·3
200	0·41	0·6	2200	1·36	6·6	4200	1·88	12·6
300	0·50	0·9	2300	1·39	6·9	4300	1·91	12·9
400	0·58	1·2	2400	1·42	7·2	4400	1·93	13·2
500	0·56	1·5	2500	1·45	7·5	4500	1·95	13·5
600	0·71	1·8	2600	1·48	7·8	4600	1·97	13·8
700	0·77	2·1	2700	1·51	8·1	4700	1·90	14·1
800	0·82	2·4	2800	1·54	8·4	4800	2·02	14·4
900	0·87	2·7	2900	1·57	8·7	4900	2·04	14·7
1000	0·92	3·0	3000	1·59	9·0	5000	2·06	15·0
1100	0·96	3·3	3100	1·62	9·3	5100	2·08	15·3
1200	1·01	3·6	3200	1·64	9·6	5200	2·10	15·6
1300	1·05	3·9	3300	1·67	9·9	5300	2·12	15·9
1400	1·09	4·2	3400	1·70	10·2	5400	2·14	16·2
1500	1·13	4·5	3500	1·72	10·5	5500	2·16	16·5
1600	1·16	4·8	3600	1·75	10·8	5600	2·18	16·8
1700	1·20	5·1	3700	1·77	11·1	5700	2·20	17·1
1800	1·23	5·4	3800	1·79	11·4	5800	2·21	17·4
1900	1·27	5·7	3900	1·82	11·7	5900	2·23	17·7
2000	1·30	6·0	4000	1·84	12·0	6000	2·25	18·0

Anmerkung. Buchanan gibt die Dimensionen der Radzähne nach dem in Pferdekräften ausgedrückten Widerstande, welchen sie bei verschiedenen Geschwindigkeiten zu erleiden haben, in einer eigenen Tabelle an, welche man u. A. auch in Gerstner's Handbuch der Mechanik, im dritten Bande auf Seite 80 findet.

Beispiel. Bei einem in einer Spinnfabrik seit mehr als 10 Jahren im Gange befindlichen Stirnrade, welches eine Kraft von 25 Pferden fortzupflanzen hat, und wobei der Theilkreis eine Geschwindigkeit von nahe 4 Fuſs besitzt, sind die guſseisernen Zähne 1·4 Zoll dick und 9·8 Zoll breit. Um nun zu sehen, wie dieses Factum mit den obigen Regeln übereinstimmt, hat man zuerst zur Bestimmung des Druckes P zwischen den Zähnen, das statische Moment $4\,P = 430 \times 25$ (die Pferdekraft §. 178 zu 430 $^{\text{F. Pf.}}$ gerechnet), und daraus $P = 2688$ Pfund; es ist also nach Morin $d = 1{\cdot}35$ und $b = 6\,d = 9{\cdot}3$ Zoll (weil die Zähne dem Naſswerden ausgesetzt sind); nach Tredgold (obige Tabelle) $d = 1{\cdot}5$ und $b = 8{\cdot}1$ Zoll.

Über die Stärke der übrigen Bestandtheile der Kamm- und Stirnräder findet man sowohl in Morin's Aide-Mémoire (übersetzt von Holtzmann), als auch im dritten Bande von Gerstner's Mechanik, mehrere Regeln angegeben.

Über die absolute und relative Festigkeit der Körper überhaupt sind von uns zwei ausführliche Abhandlungen in den Jahrb. des k. k. polyt. Institutes im 19ten und 20sten Bande abgedruckt.

§. 264. Biegung elastischer Körper. Stellt AB (Fig. 191) die neutrale Schichte oder Achse eines an dem einen Ende eingemauerten und am andern mit dem Gewichte P belasteten Balkens von rechteckigem Querschnitte, wie in §. 255, vor, wobei jedoch diese Belastung noch innerhalb der vollkommenen Elasticitätsgrenze liegen soll, so, daſs die Biegung BC nach Wegnahme dieses Gewichtes P wieder gänzlich verschwindet; so findet man, wenn b die horizontale Breite, h die Höhe, l die Länge, und $BC = d$ die durch die Belastung P erzeugte Biegung (der Pfeil) des Balkens, so wie endlich M der Modul der Elasticität (§. 252) der Materie ist, woraus derselbe besteht, durch höhere Rechnung:

$$P = \tfrac{1}{4}\,d\,\frac{M\,b\,h^3}{l^3} \ldots (1, \text{ also daraus } d = \frac{4\,P}{M\,b\,h^3}\,l^3 \ldots (2, \text{ und}$$

$$M = \frac{4\,P}{d\,b\,h^3}\,l^3 \ldots (3.$$

Soll dabei das eigene Gewicht G des Balkens mit berücksichtiget werden, so wirkt dieses so, als ob im Puncte A ein Gewicht von $\tfrac{3}{8}\,G$ aufgehängt wäre; man muſs also in diesen drei Formeln $P + \tfrac{3}{8}\,G$ statt P setzen.

§. 265. Liegt derselbe Balken vom *rechteckigen* Querschnitte horizontal an *beiden* Enden frei auf (Fig. 192), und wirkt die Last Q in der Mitte oder halben Länge C, so findet man für die Biegung oder den Pfeil aC: $d = \frac{Q\,l^3}{4\,M\,b\,h^3} \ldots (4$, und daraus auch:

$$Q = \frac{4\,M\,d\,b\,h^3}{l^3} \ldots (5 \text{ und } M = \frac{Q\,l^3}{4\,d\,b\,h^3} \ldots (6.$$

Für einen *Cylinder*, dessen Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r ist, erhält man die analogen Gleichungen:

$$d = \frac{Q\,l^3}{12\,\pi\,M\,r^4} \ldots (4', \quad Q = \frac{12\,\pi\,M\,d\,r^4}{l^3} \ldots (5', \quad M = \frac{Q\,l^3}{12\,\pi\,d\,r^4} \ldots (6';$$

es verhalten sich also bei Balken aus einerlei Materie und von rechteckigem Querschnitte die Biegungen, wie die Belastungen, wie die dritten Potenzen der Längen, und verkehrt wie die Breiten und dritten Potenzen der Höhen; dagegen bei Cylindern wieder wie die Belastungen und dritten Potenzen der Längen, aber verkehrt wie die vierten Potenzen ihrer Halbmesser.

Ist die Last Q nicht in der Mitte angebracht, sondern über die *ganze Länge* l *gleichförmig* vertheilt, so mufs man in diesen 6 Formeln $\frac{5}{8}Q$ statt Q setzen, weil diese vertheilte Last Q auf das Biegen genau so, wie ein in der halben Länge angebrachtes Gewicht von $\frac{5}{8}Q$ wirkt, oder eine im Verhältnifs von 8 : 5 gröfsere, aber gleich vertheilte Last dieselbe Biegung, als die erstere in der Mitte angebrachte kleinere Last hervorbringt.

Soll daher auch das eigene Gewicht G des Balkens oder Cylinders mit berücksichtigt werden, so mufs man in diesen Formeln $Q + \frac{5}{8}G$ anstatt Q setzen.

Anmerkung. Beim Gebrauche dieser, so wie der Formeln des vorhergehenden Paragraphes, mufs man l, b, h, d, r in Wiener *Zollen* und Q in Wiener *Pfunden* nehmen und verstehen.

§. 266. Bestimmung des Moduls der Elasticität. Die vorigen Formeln (6 und (6′ können am bequemsten zur Bestimmung des Elasticitätsmoduls M der verschiedenen Körper dienen; man legt nämlich den betreffenden Körper in Form einer Schiene oder Latte von rechteckigem Querschnitte, oder eines Cylinders von bekannten Dimensionen auf zwei um die Länge l von einander entfernten Stützen frei auf, und beobachtet die entweder durch das eigene Gewicht

G allein, oder mit Hinzufügung eines in der Mitte aufgehängten Gewichtes Q (wobei jedoch die ganze Belastung noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegen muſs) in der Mitte entstehende Biegung d, wobei alles in Zollen und Pfunden ausgedrückt werden muſs.

Da nach einem groſsen Durchschnitte aus der Tabelle in §. 253 für Holz $M = 1400000$, für Guſseisen $M = 13700000$, und für Schmiedeisen $M = 2350000$ in runden Zahlen hervorgeht, diese Gröſsen sich also nahe wie 1 : 9·8 : 16·8 verhalten; so bestimmen diese Verhältnisse (wie die Formeln (5 und (5′ zeigen) zugleich auch die Gröſse der Belastung, welche drei Balken von denselben Dimensionen, aber beziehungsweise aus Holz, Guſs- und Schmiedeisen bis zu einer gleichen Biegung (vorausgesetzt, daſs diese noch innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt) ertragen können.

§. 267. Nimmt man mit Gerstner, durch seine Versuche dazu geführt, an, daſs die gröſste Biegung, welche noch ohne Nachtheil Statt finden kann und darf, bei Holz $\frac{1}{288}$, und bei Guſs- und Schmiedeisen $\frac{1}{480}$ der Länge oder Entfernung der beiden Stützen beträgt; setzt man nämlich in den Form. (5 und (5′ (§. 265) beziehungsweise $d = \frac{l}{288}$ und $d = \frac{l}{480}$ und berechnet sogleich den Zahlencoefficient $4Md$ in (5 und $12\pi Md$ in (5′, und zwar mit den mittlern Werthen von M (aus §. 253), und nur in runden Zahlen; so kann man die Formeln für die gröſste, nach dieser Annahme noch gestattete Belastung Q, welche man in der Mitte der auf beiden Enden horizontal frei aufliegen Balken oder Schäfte von rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitte anbringen darf, für den Gebrauch sehr bequem auf folgende Weise einrichten:

	Rechteckiger Querschnitt:	Kreisförmiger Querschnitt:
für Eichenholz	$Q = 19000 \frac{bh^3}{l^2}$	$Q = 179000 \frac{r^4}{l^2}$
„ Buchen	$Q = 18000 \frac{bh^3}{l^2}$	$Q = 169600 \frac{r^4}{l^2}$
„ Fichten	$Q = 25000 \frac{bh^3}{l^2}$	$Q = 235600 \frac{r^4}{l^2}$
„ Tannen	$Q = 21500 \frac{bh^3}{l^2}$	$Q = 202600 \frac{r^4}{l^2}$
„ Guſseisen	$Q = 114000 \frac{bh^3}{l^2}$	$Q = 1075000 \frac{r^4}{l^2}$
„ Schmiedeisen	$Q = 196000 \frac{bh^3}{l^2}$.	$Q = 1847000 \frac{r^4}{l^2}$.

Will man für Holz überhaupt nur einen Mittelwerth von M annehmen, so kann man wohl auch

$$Q = 19400 \frac{b h^3}{l^2} \ldots (m \quad \text{oder} \quad Q = 182800 \frac{r^4}{l^2} \ldots (m',$$

d. i. für Q nahe den zehnten Theil von jenem für Schmiedeisen setzen. Bei dieser Annahme würden sich also die Belastungen, welche man dreien Balken von gleichen Dimensionen von Holz, Gufs- und Schmiedeisen auflegen dürfte, nahe wie 1 : 6 : 10 verhalten.

Anmerkung 1. In allen diesen Formeln sind die Dimensionen in Zollen und die Belastungen in Pfunden zu nehmen.

Soll das eigene Gewicht der Balken oder Schäfte mit berücksichtigt werden, so mufs man überall $Q + \frac{5}{8} G$ statt Q schreiben; im Falle aber die Last Q über die Länge gleich vertheilt wird, ist $\frac{5}{8} Q$ statt Q zu setzen.

Anmerkung 2. Soll die Biegung eine andere seyn, und z. B. nur den n ten Theil von der hier angenommenen $\left(\frac{l}{288} \text{ für Holz und } \frac{l}{480} \text{ für Eisen}\right)$ betragen, so fallen die obigen Zahlencoefficienten ($4 M d$ und $12 \pi M d$) auch n Mal kleiner aus, und man darf daher in diesen Formeln nur überall nQ statt Q setzen. Soll z. B. die Biegung des Eisens nur $\frac{1}{960}$ der Länge, also die Hälfte von der diesen Formeln zum Grunde liegenden betragen, so wird man in den vier letztern auf Gufs- und Schmiedeisen sich beziehenden Formeln, die Zahlencoefficienten mit 2 dividiren, oder, was auf dasselbe herauskommt, $2Q$ statt Q setzen.

§. 268. Da im Maschinenwesen viele Bestandtheile, wie z. B. Radachsen, Wellen u. s. w. so stark genommen werden müssen, dafs sie keine fur den Gang der Maschine nachtheilige Biegung annehmen; so wird man sich zur Bestimmung der Querschnitte dieser Bestandtheile nicht an die Formeln für die relative Festigkeit, sondern an die im vorigen Paragraphe (welche sich auch leicht mit Rücksicht auf §. 264 für den Fall, als die Körper nur an einem Ende befestigt sind, modificiren lassen) für die Biegung entwickelten Formeln halten.

Da es sich in der Anwendung gewöhnlich um die einer gegebenen Belastung entsprechenden Querschnitte handelt, so kann man diese aus den Gleichungen des vorigen Paragraphes, wobei man sich für Holz mit dem in (m und (m' angegebenen Durchschnittswerth begnügen kann, bestimmen, und die Werthe nur in runden Zahlen annehmen.

Liegen also die Balken oder Schäfte an beiden Enden horizontal frei auf, und drückt man Q in Pfunden, b, h, r in Zollen, dagegen die Länge in Fufsen aus, so hat man bei einer gestatteten Biegung von $\frac{l}{288}$ für Holz und $\frac{l}{480}$ für Gufs- und Schmiedeisen, sofort

	für rechteckige Querschnitte	für kreisförmige Querschnitte
bei Holz	$b h^3 = \frac{Q l^2}{135}$	$r^4 = \frac{Q l^2}{1270}$
„ Gufseisen	$b h^3 = \frac{Q l^2}{800}$	$r^4 = \frac{Q l^2}{7500}$
„ Schmiedeisen	$b h^3 = \frac{Q l^2}{1360}$.	$r^4 = \frac{Q l^2}{12800}$.*)

Soll aufser der in der Mitte angebrachten Last Q auch das eigene Gewicht G des Balkens oder Schaftes berücksichtigt werden, so mufs man in diesen Formeln $Q + \frac{5}{8} G$, soll aber die Last Q über die ganze Länge gleich vertheilt werden, $\frac{5}{8} Q$ statt Q setzen.

Anmerkung. Soll die Biegung nur den n ten Theil von der hier zum Grunde liegenden betragen, so darf man in der entsprechenden Formel (vergl. vorigen Paragraph Anmerk. 2) nur $n\,Q$ statt Q setzen.

Beispiele.

1. Wie stark wird sich ein 12 Fufs langes, 1 Fufs breites und 1 Zoll dickes tannenes Bret biegen, wenn es flach auf zwei um 12 Fufs von einander entfernte Stützen (Länge l des Bretes) horizontal aufgelegt, und in der Mitte mit 50 Pfund belastet wird?

   Nimmt man das specifische Gewicht dieser Holzgattung (§. 39) zu ·5 an, so ist das Gewicht des Bretes $G = 28$ Pfund, folglich, wenn man in der Formel (4 (§. 265) $Q = 50 + \frac{5}{8} . 28 = 67{\cdot}5$, $l = 12 \times 12 = 144$, $b = 12$, $h = 1$, und (aus §. 253 als Mittelwerth) $M = 1500000$ setzt, sofort die gesuchte Biegung oder der Pfeil $d = 2{\cdot}8$ Zoll.

   Dieselbe Biegung würde auch durch eine über die ganze Länge gleich vertheilte Last von $\frac{8}{5} . 50 = 80$ Pfund erfolgen.

2. Es soll für den im §. 261, Beispiel 1, angenommenen gufseisernen Tragbalken die Last gefunden werden, welche er mit Rücksicht auf die Biegung mit Sicherheit tragen kann.

   Da für diesen Balken $b = 3$, $h = 6$ und $l = 144$ ist, so hat man aus der betreffenden Formel (§. 267) $Q = 114000 \frac{b h^3}{l^2}$, sofort $Q = 3562{\cdot}5$ Pfund, als die gesammte Belastung. Bringt man das eigene Gewicht des Balkens $G = 626$ Pfund in Abschlag, so bleiben noch $3562{\cdot}5 - \frac{5}{8} . 626 = 3171$ Pfund für die gesuchte in der Mitte aufzulegende Last, während diese ohne Rücksicht auf Biegung im angezogenen Paragraphe bis nahe 4000 Pfund gefunden wurde.

3. Berechnet man die in §. 261, Beispiel 2, bestimmte Dicke der gufseisernen Welle mit Rücksicht auf Biegung, und nimmt gleich als genäherten Werth das dort berechnete Gewicht der Welle mit 906 Pfund an, so hat man in der obigen Formel $r^4 = \frac{Q l^2}{7500}$, sofort $Q = 1600 + \frac{5}{8} . 906 = 2166$

*) Bei den von Morin angegebenen ähnlichen Formeln scheint Gufs- und Schmiedeisen verwechselt worden zu seyn.

und $l = 18$ zu setzen; dadurch erhält man $r^4 = 94\cdot051$, also $r = 3\cdot114$ Zoll, während wir im genannten Paragraphe blofs nach der relativen Festigkeit gerechnet, nur $r = 2\cdot77$ Zoll fanden. (Der nun entstehende geringe Unterschied im Gewichte der Welle, das etwas gröfser als 906 Pfund ist, hat hier keinen weitern Einflufs.)

Soll die Welle, welche an dieser Stelle ein Stirnrad trägt, das genau eingreifen mufs, in der Mitte nur eine Biegung von $\frac{1}{4}$ Zoll, welche also den $4 \times 18 \times 12 = 864$sten Theil der Länge beträgt, erhalten, so mufs dieser nun, da hier eine Biegung von dem 480sten Theil der Länge zum Grunde liegt $n = \frac{864}{480} = 1\cdot8$ Mal kleiner werden, folglich mufs man (vorige Anmerk.) in der vorigen Formel $1\cdot8\,Q$ statt Q setzen, wodurch der vorhin für r gefundene Werth noch mit $\sqrt[4]{1\cdot8} = 1\cdot158$ zu multipliciren kommt, wodurch man $r = 3\cdot6$ Zoll erhält.

Nach der Annahme von Tredgold, welcher für gufseiserne Schäfte nur eine Biegung von $\frac{1}{1200}$ der Länge zulassen will, müfste man, wegen $n = \frac{1200}{480} = 2\cdot5$, den obigen Werth von r mit $\sqrt[4]{2\cdot5} = 1\cdot257$ multipliciren, wodurch man für den Halbmesser des Schaftes $3\cdot9$, also für dessen Durchmesser $7\cdot8$ Zoll erhielte.

Rückwirkende Festigkeit.

§. 269. Wird bei einem Körper (wie z. B. bei Bausteinen, Pfeilern u. s. w.) die rückwirkende Festigkeit in Anspruch genommen, und geht man dabei, wie es die Sicherheit erfordert, wieder nicht über die Elasticitätsgrenze hinaus, so, dafs also die durch die aufgelegte Last entstehende Zusammendrückung, nach Wegnahme derselben wieder gänzlich verschwindet; so sind diese Verkürzungen (so wie bei der absoluten Festigkeit die Verlängerungen oder Ausdehnungen) wieder den aufgelegten Gewichten oder Lasten proportional. Die Versuche hierüber beschränken sich jedoch mehr auf die Bestimmung jener Last, bei welcher die Körper zerquetscht oder zersplittert werden, so, dafs man dann davon für die Tragkraft einen gewissen Bruchtheil zu nehmen hat. Nach diesen Versuchen ist bei Körpern von ähnlicher Form und demselben Materiale die rückwirkende Festigkeit den Querschnittsflächen proportional, auf welche die Kraft oder Belastung senkrecht wirkt, und sie ist dabei um so gröfser, je mehr sich die Fläche der Kreisform und die Dicke der Höhe nähert.

Die nachstehende Tabelle gibt die Werthe der rückwirkenden Festigkeit für einige der am meisten vorkommenden Körper, auf das Wiener Mafs und Gewicht bezogen.

Benennung der Körper.	Rückwirkende Festigkeit in Pfunden auf 1 Quadratzoll.	Benennung der Körper.	Rückwirkende Festigkeit in Pfunden auf 1 Quadratzoll.
Basalt	20000 — 25000	Sandstein . .	1200 — 11000
Granit	5000 — 9500	Ziegelstein . .	490 — 2100
Kalkstein . .	1200 — 4950	Eichenholz .	3350 — 5700
Marmor . . .	3700 — 9900	Tannenholz .	5700 — 6700
Mörtel	372* — 750	Gufseisen . .	62000 — 124000

§. 270. Bei einer Säule oder einem Pfeiler von beträchtlicher Höhe tritt bei fortgesetzter Belastung eine Biegung ein, wodurch endlich der Bruch (also kein eigentliches Zerdrücken) erfolgt; diefs geschieht z. B. beim Eisen schon, wenn das Prisma beiläufig drei Mal so hoch als dick ist. Ist der Querschnitt ein Rechteck, so tritt in der Regel die Biegung in der Art ein, dafs von den beiden breiten Seitenflächen des Prisma, die eine concav und die andere convex ausgebogen wird, wie es in Fig. 193 dargestellt ist.

Ist b die breite und h die dicke oder schmale Seite des rechteckigen Querschnitts eines prismatischen Körpers von der Länge l, und wird dieser mit dem Gewichte P belastet, so findet man nach der Theorie der elastischen Körper (wenn P innerhalb der Elasticitätsgrenze liegt):
$$P = \pi^2 M \frac{b\,h^3}{12\,l^2} \ldots (1,$$
wo π die bekannte Zahl 3·14, und M den Modul der Elasticität des betreffenden Körpers bezeichnet; es verhalten sich also die rückwirkenden Festigkeiten (eigentlich die Tragvermögen) zweier vierkantiger Balken aus einerlei Materiale, wie die Breiten, Cubi der Dicken, und verkehrt wie die Quadrate der Längen.

Ist der Querschnitt ein Kreis vom Halbmesser r, so ist $P = \pi^3 M \frac{r^4}{4\,l^2}$, so, dafs sich bei runden Säulen von derselben Materie die Festigkeiten wie die vierten Potenzen ihrer Halb- oder Durchmesser, und umgekehrt wie die Quadrate ihrer Höhen verhalten.

Für einen hohlen Cylinder, dessen äufserer Halbmesser $= R$ und innerer $= r$ ist, wird $P = \pi^3 M \left(\frac{R^4 - r^4}{4\,l^2}\right)$.

§. 271. Diese im vorigen Paragraphe aufgestellten Formeln geben in jenen Fällen, in welchen die Prismen oder Säulen nicht wenigstens 20 Mal so hoch als dick sind, folglich in den meisten vorkommenden Fällen, zu grofse Resultate, und in diesem Falle kommt man der Wahrheit näher, wenn man ihre Stärke nicht nach diesen aus der Biegung abgeleiteten Formeln, sondern nach jenen Zahlen bestimmt, welche durch Versuche für das Zerdrücken oder Zerquetschen der Körper gefunden sind. Man kann dabei im grofsen Durchschnitte für die Kraft oder Belastung, durch welche eine Säule von der halben oder gleichen Dicke ihrer Höhe zerdrückt wird, auf jeden Quadratzoll der Querschnittfläche

für Eichen und Tannenholz	zu	3700 Pfund
„ Schmiedeisen	„	49560 „
„ Gufseisen	„	124000 „

annehmen. Bei hölzernen Säulen oder Stützen mufs man die vorige Zahl 3700 auf $\frac{5}{6}$ reduciren, d. i. mit $\frac{5}{6}$ multipliciren, wenn die Höhe beiläufig der 12fachen, dagegen $\frac{1}{2}$ Mal nehmen, wenn die Höhe nahe der 24fachen Dicke gleich ist.

Bei Schmiedeisen wird die vorige Zahl 49560 in den genannten beiden Fällen beziehungweise mit $\frac{5}{8}$ und $\frac{1}{2}$ multiplicirt, so wie endlich bei Gufseisen die entsprechende Zahl 124000 mit den Zahlen $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{15}$ multiplicirt werden mufs, wenn die Höhe beziehungsweise beiläufig der 4, 8 und 36fachen Dicke gleich kommt.

Da aber dadurch immer nur jene Zahlen bestimmt werden, bei welchen der Bruch erfolgt, so nimmt man davon für die sichere Belastung bei Holz und Steinen nur den zehnten, und bei Eisen den vierten bis sechsten Theil.

Beispiel. Eine vierkantige hölzerne Säule von 15 Fufs Höhe hat eine Last von 200 Centnern zu tragen, welchen Querschnitt mufs man derselben geben, wenn derselbe quadratförmig seyn soll?

Rechnet man nach der Formel (1 in §. 270, und setzt als Mittelwerth $M = 1500000$, nimmt $b = h$, und von der entstehenden Festigkeit nur den zehnten Theil; so erhält man

$$P = 10 \times 150000 \frac{b^4}{12(12 \times 15)^2} = 3{\cdot}858\, b^4,$$

und da $P = 20000$ seyn soll, so ist $b^4 = \dfrac{20000}{3{\cdot}858} = 5184$, also

$$b = 8\tfrac{1}{2} \text{ Zoll.}$$

Bestimmt man sich dagegen nach der obigen (im gegenwärtigen Paragraphe) gegebenen Regel, so kann man, da die Höhe nach der bereits geführten Rechnung beiläufig der 18fachen Dicke gleichkommt, was zwischen der 12- und 24fachen in der Mitte liegt, auch von den entsprechenden Factoren $\frac{5}{6}$ und $\frac{3}{6}$ das Mittel, nämlich $\frac{4}{6}$ oder $\frac{2}{3}$ nehmen, womit man die dem Holz entsprechende Zahl 3700, oder, wenn man gleich davon den zehnten Theil nimmt, jene 370 multiplicirt, was sofort 247 als Belastung auf 1 Quadratzoll gibt; da nun die gegebene Last 20000 Pfund beträgt, so mufs der Querschnitt $b^2 = \frac{20000}{247} = 81$, also $b = 9$ Zoll seyn, was sehr gut mit dem vorigen Resultate übereinstimmt.

Torsions-Festigkeit.

§. 272. Wird ein prismatischer Körper oder ein cylinderischer Schaft AE (Fig. 193) horizontal oder vertical an dem einen Ende DE unveränderlich befestigt, z. B. eingemauert, und an dem andern durch eine Kraft P, welche in einer auf der Achse senkrechten Ebene AB an einem Hebel CF wirkt, um seine Achse CO umzudrehen versucht, so wird dadurch der Halbmesser CB um einen gewissen Winkel $BCB' = i$ verdreht, und die auf der Oberfläche gezogene Gerade EB die Lage EB' annehmen. Findet diese Torsion oder Verdrehung nur innerhalb der Elasticitätsgrenze Statt, so wird, sobald die Kraft P zu wirken aufhört, auch die Verdrehung sammt dem Winkel i verschwinden, und es werden CB' und EB' wieder ihre ursprünglichen Lagen CB und EB annehmen.

Ist l die Länge des Cylinders, r dessen Halbmesser und R jener des Rades an dessen Umfange, oder die Länge des Hebels, an dessen Endpunct die Kraft P wirkt; so findet man durch höhere Rechnung für das Torsionsmoment des massiven Cylinders:

$$PR = \tfrac{1}{2} w \pi \frac{i}{l} r^4 \quad \ldots (1,$$

wo w ein durch Versuche zu bestimmender Zahlencoefficient (Torsionscoefficient) ist.

Für einen hohlen Cylinder, dessen äufserer Halbmesser r und innerer r' ist, hat man

$$PR = \tfrac{1}{2} w \pi \frac{i}{l} (r^4 - r'^4) \quad \ldots (2.$$

Für eine Welle von quadratförmigem Querschnitt und der Seite a:

$$PR = \tfrac{1}{6} w \frac{i}{l} a^4 \quad \ldots (3,$$

und bei einem rechteckigen Querschnitte von den Dimensionen a und b:

$$PR = \tfrac{1}{3} w \frac{i}{l} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad \ldots (4.$$

Was nun die Torsionscoefficienten betrifft, so sind diese für einige der wichtigsten Körper in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt; dabei ist wieder der Wiener Zoll und das Wiener Pfund zur Einheit genommen, so dafs man in den vorigen Formeln a, b, r, R und l in Zollen, P in Pfunden, und den Drehungswinkel i in Graden ausdrücken und verstehen mufs.

Benennung der Körper.	Torsionscoefficient w.	Benennung der Körper.	Torsionscoefficient w.
Buchen . . .	1900	Tannen . . .	1000 — 1800
Eichen . . .	1000 — 1800	Weifsbuchen	2400
Eschen . . .	1800	Gufseisen . .	86000 — 88000
Fichten . . .	900 — 1360	Schmiedeisen	124000 — 178000
Kiefer	1250	Stahl	148000 — 181000
Lärchen . . .	1700		

§. **273.** Für die Halbmesser der cylinderischen Wellen erhält man aus der obigen Gleichung (1: $r = \sqrt[4]{\left(\frac{2PRl}{\pi w i}\right)}$, oder, wenn man den noch als unschädlich zuläfsigen Drehungswinkel i für hölzerne und eiserne Wellen nach Gerstner zu ·117 Grad annimmt,

$$r = \sqrt[4]{\left(\frac{5{\cdot}45\,PRl}{w}\right)} \ldots (1,$$

und für quadratische Querschnitte, für die Seite:

$$a = \sqrt[4]{\left(\frac{51{\cdot}92\,PRl}{w}\right)} \ldots (2,$$

wobei w aus der vorigen Tabelle, P, R und l aber in Zollen zu nehmen und zu verstehen ist.

Bei Röhren oder hohlen Cylindern ist auch die Torsions-Festigkeit, bei gleichen Massen nämlich (auf ähnliche Weise wie bei der relativen Festigkeit, §. 258) wieder gröfser als bei massiven Cylindern. Ist z. B. d der lichte Durchmesser eines hohlen Cylinders, und besitzt er dieselbe Masse wie ein massiver Cylinder von dem nämlichen Durchmesser d, welcher aus derselben Materie besteht; so ist die Torsions-Festigkeit des erstern schon drei Mal so grofs, als jene des massiven Cylinders (wie man leicht aus den beiden Gleichungen 1 und 2 in §. 271 findet.)

§. **274.** Buchanan gibt für die Stärke gufseiserner Wellen und Schäfte, bei welchen der Torsionswiderstand mehr als jener gegen die

Biegung in Anspruch genommen wird, folgende Regel: Bezeichnet N die Anzahl der Pferdekräfte (jede zu 430 F.-Pf. angenommen, §. 178), welche die Welle fortzupflanzen hat, und n die Anzahl ihrer Umdrehungen per Minute; so ist der für die gufseiserne massive Welle nöthige Durchmesser in Wiener Zollen ausgedrückt:

$$d = 5{\cdot}4 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \ldots (1.$$

Für schmiedeiserne Wellen ist:

$$d = 5{\cdot}4 \times {\cdot}963 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 5{\cdot}2 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \ldots (2.$$

Für solche aus Eichenholz:

$$d = 5{\cdot}4 \times 2{\cdot}238 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 12{\cdot}1 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \ldots (3.$$

Für solche aus Tannenholz:

$$d = 5{\cdot}4 \times 2{\cdot}06 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 11{\cdot}1 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \ldots (4.$$

Die Durchmesser von schmiedeisernen, eichenen und tannenen Wellen müssen nämlich nach dieser Regel beziehungsweise ·963, 2·238 und 2·06 Mal so stark, als eine gufseiserne Welle unter gleichen Umständen seyn.

Anmerkung. Wir führen diese Regel von Buchanan, nach welcher eigene Tabellen für die Wellenstärke berechnet, und in viele Werke aufgenommen wurden, mehr geschichtlich an, als dafs wir einen grofsen Werth darauf legten; im Gegentheile halten wir diese Formeln, in welchen die Länge der Welle, die nach Buchanan (übereinstimmend mit Prof. Robison) auf die Torsions-Festigkeit keinen Einflufs haben soll, unberücksichtigt geblieben ist, nur für ganz kurze Wellen für zuläfsig, indem sie sonst immer, wie die nachstehenden Beispiele zeigen, zu kleine Resultate geben, und zwar um so mehr zu klein, je länger die Wellen sind.

Beispiele.

1. Um die Stärke einer Wasserradwelle aus Tannenholz, welche in 15 Fufs Entfernung vom Wasserrad einen Daumenkranz trägt, mittelst welchen ein Hammer, der auf die Daumen oder Hebköpfe mit 100 Pfund drückt, und wobei der Abstand der Daumen von der Achse der Welle 12 Zoll betragen soll, in Beziehung auf die Torsions-Festigkeit zu finden, hat man nach der Formel (1 in §. 273, wenn man $P = 100$, $R = 12$, $l = 15 \times 12 = 180$, und als mittlern Werth aus der Tabelle (§. 272) $w = 1400$ setzt: $r^4 = \frac{5{\cdot}45 \times 100 \times 12 \times 180}{1400} = 840{\cdot}86$, also $r = \sqrt[4]{(840{\cdot}86)} = 5{\cdot}385$, also der Durchmesser $d = 10{\cdot}8$ Zoll.

2. Soll dieselbe Welle cylinderisch aus Gufseisen hergestellt werden, so kann man in der genannten Formel (1 $w = 87000$ setzen, wodurch man nahe $r = 2$, also den Durchmesser $d = 4$ Zoll findet.

Macht die Welle, um die Regel von Buchanan anwenden zu können, per Minute n Umdrehungen, so ist, wenn man den Widerstand von 100 Pfund als fortwährend auf der Kreisperipherie von 1 Fufs Halbmesser wirkend ansieht, der Weg der Last per Secunde $= \frac{2 \times 3{\cdot}14\, n}{60}$, also die Arbeit des Widerstandes in Pferdekraft $N = \frac{2 \times 3{\cdot}14 \times 100\, n}{60 \times 430}$, daher $\frac{N}{n} = {\cdot}0244$ und $\sqrt[3]{\frac{N}{n}} = \sqrt[3]{{\cdot}0244} = {\cdot}29$, und endlich nach der obigen Formel (1 sofort $d = 5{\cdot}4 \times {\cdot}29 = 1{\cdot}6$ Zoll, wornach aber die Welle offenbar zu schwach, wenigstens in Beziehung auf die Biegung und relative Festigkeit ausfiele, so, dafs man ihren Durchmesser nicht nach dem Torsionswiderstande, sondern nach jenem gegen die Biegung bestimmen müfste, wofür man nach Buchanan nahe 6 Zoll erhalten würde.

3. Soll eine schmiedeiserne runde Welle, welche in einer Minute 30 Umdrehungen macht, auf eine Länge von 12 Fufs, einen auf den Umfang eines 12 Fufs hohen Ruderrades wirkenden Widerstand von 1140 Pfund (durch den Krummzapfen, welcher vom Rade um 12 Fufs absteht) überwinden; so findet man nach der genannten Formel (1 in §. 273, wenn man $P = 1140$, $R = 72$, $l = 144$, und als Mittelwerth aus der Tabelle $w = 150000$ setzt: $r^4 = 429{\cdot}44$, und daraus $r = 4{\cdot}55$ oder $d = 9$ Zoll.

Da nach diesen Angaben die Arbeit des Widerstandes 50 Pferdekräfte beträgt, so ist nach der Regel von Buchanan (Formel 2, des gegenwärtigen Paragraphes)

$$\frac{N}{n} = \frac{50}{30},\quad \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = \sqrt[3]{1{\cdot}667}, \text{ folglich } d = 5{\cdot}2 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 6{\cdot}2 \text{ Zoll},$$

demnach wieder bedeutend geringer als nach der erstern Rechnungsart.

Wäre die Welle statt 12 Fufs nur 2 Fufs lang, so würde diefs auf die letztere Rechnungsart keinen, wohl aber auf die erstere einen Einflufs haben, und der obige Werth von 9 Zoll im Verhältnifs von $\sqrt[4]{6} : 1$ (da die Länge der Welle jetzt nur den sechsten Theil beträgt) kleiner, also die Dicke der Welle nahe $= 6$ Zoll werden, in welchem Falle auch in der That eher eine Übereinstimmung mit der Buchanan'schen Regel Statt fände. (Vergl. die vorige Anmerkung.)

Schlufsbemerkung. Soll eine Welle nicht blofs mit ihrer Torsions-, sondern auch mit ihrer relativen Festigkeit Widerstand leisten, und zugleich nur eine innerhalb einer gegebenen Grenze liegende Biegung annehmen, so wird man die Stärke der Welle, d. i. ihren Durchmesser nach allen drei Beziehungen bestimmen oder berechnen und davon die gröfste der drei erhaltenen Dimensionen beibehalten, indem diese dann auch den beiden übrigen Bedingungen um so mehr entsprechen wird.

Röhrenstärke.

§. 275. Werden die Röhren zu Wasserleitungen, oder wie manchmal die eisernen zur Entwicklung von Dämpfen benützt, so haben sie einen von ihrer Achse aus, nach radialen Richtungen, also senkrecht gegen die innere Wand- oder Umfläche Statt findenden Druck auszuhalten, welchem sie nur bei einer gehörigen Wand oder Röhrendicke, die hier bestimmt werden soll, widerstehen können.

Ist der lichte oder innere Durchmesser einer cylinderischen Röhre $AB = 2r$ (Fig. 194), und wird jeder Punct der innern Mantelfläche von der Achse, oder wenn man bei der gegenwärtigen Entwicklung bloſs einen einzelnen Querschnitt senkrecht auf die Achse betrachtet, jeder Punct der Kreisperipherie $ANBN'$ vom Mittelpuncte C aus radial oder normal mit einer Kraft gedrückt, welche auf die Flächeneinheit bezogen, den Werth p hat; so kann man sich die genannte Kreisperipherie in unendlich kleine Bögen oder Theile von der Gröſse $am = s$ zerlegt denken, wodurch, wenn wir Kürze halber den Bogen s selbst für die Fläche nehmen (diese ist eigentlich ls, wenn l die Länge des Cylinders nach seiner Achse ist; man kann aber vorläufig diesen constanten Factor l auslassen und nur zuletzt erst in Rechnung bringen), der Bogen s den Druck ps normal auf am oder in der Richtung Ca erleidet. Zerlegt man aber diese Kraft $ad = ps$ in zwei auf einander senkrechte ac und ab, wovon die erstere mit irgend einem Durchmesser AB parallel, folglich die zweite darauf senkrecht ist, so erhält man, weil die beiden Dreiecke amn und abd (deren Seiten auf einander senkrecht stehen) ähnlich sind, also $ab : ad = mn : am$ Statt findet, für die letztere $ab = ps \cdot \frac{mn}{s} = p \cdot fg$, wenn nämlich mf und ag auf AB senkrecht gezogen werden.

Soll nun die Röhre (weil diese, im Falle sie berstet, immer nach irgend einem Durchmesser reiſsen wird) in der Richtung des Durchmessers AB in zwei Hälften abgerissen werden, so gehen die mit AB parallelen Kräfte, von welchen einer jeden, wie ac an einem ähnlich liegenden Puncte a' (wofür W. ACa' = W. BCa) eine eben so groſse Kraft $a'c'$ entgegenwirkt, diese sich also gegenseitig aufheben, für diese Wirkung verloren, und es bleibt dafür nur die Summe der auf AB senkrechten Kräfte wie ab, deren in der andern Röhrenhälfte oder hier im zweiten Halbkreis $AN'B$ eine eben so grofse Summe entgegenwirkt, und dadurch eben das Abreifsen (wie bei einem Prisma oder Seile, welches der Länge nach von zwei gleichen Kräften nach entgegengesetzten Richtungen gezogen wird) der einen Röhrenhälfte von der andern bewirkt wird. Diese Summe ist aber, wenn wir sie S nennen,

$$S = p.fg + p.gh + \ldots = p(fg + gh + \ldots),$$

und zwar durch den ganzen Halbkreis BNA genommen, wodurch die Summe der in der Klammer stehenden Projectionen der Bogenelemente in die Projection des ganzen Halbkreises auf AB, nämlich in diesen Durchmesser $AB = 2r$ selbst übergeht, so, dafs man hat: $S = 2rp$, folglich auch $Sl = p.2rl$, wo l, wie bereits bemerkt, die Länge der Röhre bezeichnet; der Druck also, welcher senkrecht auf AB zum Losreifsen der beiden Röhrenhälften ANB und $AN'B$ wirkt, ist gerade so grofs, als der Druck auf die diametrale Ebene AB, d. i. auf die Projection der Cylinderfläche auf diese Ebene wäre.

Eben so findet man ganz analog den Druck auf die innere Kugelfläche, um diese in zwei Halbkugeln nach einem gröfsten Kreise zu trennen, gleich dem Druck auf eine gröfste Kreisebene $r^2\pi$, folglich wenn wieder p der radiale Druck auf die Flächeneinheit ist, diesen auf Trennung wirkenden Druck $= pr^2\pi$.

§. 276. Ist nun e die Dicke der Röhrenwand, so wird beim Zerreifsen derselben die Fläche $2le$ los- oder abgerissen; ist demnach m die absolute Festigkeit (§. 251) des Stoffes oder der Materie, woraus die Röhre besteht, so ist für das Gleichgewicht der zerreifsenden Kraft mit dieser Festigkeit $2lem = 2prl$, und daraus $e = \frac{pr}{m}$, wobei man jedoch, da man das Zerreifsen der Röhre in der Anwendung vermeiden will, von der Zahl m nur einen gewissen, z. B. den vierten oder fünften Theil, nehmen darf, oder überhaupt das Tragvermögen des Materiales zu setzen hat.

Da indefs, selbst wenn der Druck $p = o$ ist (wofür $e = o$ würde) die Röhre zu ihrer eigenen Stabilität schon eine gewisse Stärke besitzen mufs, so fügt man zu jener e noch eine gewisse (die additionelle) Dicke f hinzu, wodurch man endlich für die gesuchte Röhrendicke

$$e = \frac{pr}{m} + f \ldots (1 \quad \text{erhält.}$$

Eben so würde für eine hohle Kugel die Wanddicke

$$e = \frac{pr}{2m} + f \text{ seyn.}$$

§. 277. Bringt man statt des Halbmessers den lichten Durchmesser $d = 2r$ der Röhren in Rechnung, und drückt, wie es für die Anwendung am bequemsten ist, den auf die Flächeneinheit (wofür wir den Wiener Quadratzoll nehmen) der Röhrenwand Statt findenden Druck in Atmosphären $= n$ aus (wobei wir den Druck einer Atmosphäre zu $12\frac{3}{4}$ Pfund, oder nahe dem Drucke einer 32 Fuſs hohen Wassersäule annehmen); so kann man nach den von Geniey über die Röhrendicken der Wasserleitungsröhren gemachten Versuchen und Beobachtungen, für die Wanddicke e, wobei e und d in Zollen zu verstehen und zu nehmen sind, folgende Werthe annehmen:

Für bleierne Röhren . . $e = \cdot 005\,nd + \cdot 17$
„ guſseiserne „ . . $e = \cdot 0007\,nd + \cdot 38$
„ Eisenblech „ . . $e = \cdot 0005\,nd + \cdot 114$
„ hölzerne „ . . $e = \cdot 833\,nd + 1\cdot 02$.

Für gegossene hohle Kugeln, Halbkugeln oder Segmente ist die Wanddicke (S. die vorige Anmerk.) mit der Hälfte von jener, welche einem Cylinder von demselben lichten Durchmesser entspricht, hinreichend. Bestehen diese aber (wie manchmal bei Dampfkesseln) aus zusammen genieteten Blechen, so nimmt man $\frac{2}{3}$ von dieser Cylinderstärke.

Anmerkung. In der Voraussetzung, daſs alle guſseisernen Leitungsröhren auf einen Druck von 10 Atmosphären probirt werden, kann man in der betreffenden Formel $n = 10$ setzen. Aubisson nimmt für solche Röhren $e = \cdot 01\,d + \cdot 38$.

Beispiel. Eine horizontale Wasserleitung, aus guſseisernen Röhren bestehend, hat den Druck einer 100 Fuſs hohen Wassersäule auszuhalten; welche Wanddicke muſs man den Röhren geben, wenn sie 6 Zoll im lichten Durchmesser halten?

Hier ist $n = \frac{100}{32} = 3\cdot 125$ und $d = 6$, folglich nach der obigen Formel für Guſseisen die gesuchte Wanddicke $e = \cdot 013 + \cdot 38 = \cdot 393$ Zoll oder $4\cdot 7$ Linien, wofür man die Zahl 5 nehmen wird.

Eilftes Kapitel.

Von den allgemeinen Eigenschaften der in Bewegung befindlichen Maschinen.

§. **278. Erklärungen.** Jede Maschine besteht mehr oder weniger aus Bestandtheilen, welche die von der Betriebskraft ausgehende Bewegung empfangen und einander mittheilen oder übertragen. Dabei kann bei einer einfach arbeitenden Maschine der erste oder derjenige Theil, welcher die bewegende Kraft gleichsam aufnimmt, der aufnehmende und der letzte, welcher die beabsichtigte Arbeit verrichtet, der arbeitende Theil genannt werden, während die übrigen, an der Bewegung Theil nehmenden Zwischenbestandtheile, die Communication bilden. So ist z. B. bei einer durch das Wasser betriebenen Schrotmühle (wo das Getreide nur geschroten wird) das Wasserrad der aufnehmende oder empfangende, der obere Mühlstein oder Läufer dagegen der arbeitende Theil der Mühle, während die Zwischenräder die Communication ausmachen. Bei vielen Maschinen folgt eine ganze Reihe von Arbeiten auf einander, wie z. B. bei Mahlmühlen das geschrotene oder von den Steinen kommende Mahlgut noch, um es in Mehl zu verwandeln (oder eigentlich daraus abzusondern), gebeutelt und gesäubert werden; bei einer Papiermaschine die dargebotene Papiermasse von den Knoten befreit, auf dem Sieb oder Metalltuch in ein lockeres, zwischen den Naſswalzen in ein festeres, zwischen den Trockenwalzen in ein noch festeres Flieſs, durch die geheizten Trockencylinder in getrocknetes, durch die Glättwalzen in geglättetes, und endlich durch den Schneideapparat in kaufrechtes Papier verwandelt werden muſs u. s. w. Es lassen sich indeſs die für ganz einfach wirkende Maschinen, wo nur eine einzige Arbeit verrichtet wird, geltenden Regeln und Bemerkungen auch leicht auf solche zusammengesetzt wirkende Maschinen übertragen oder ausdehnen.

Der aufnehmende Bestandtheil heiſst gewöhnlich der Motor (§. 176), obschon er dieſs streng genommen nur im zweiten Grade oder secundär ist, indem diese Benennung bloſs den thierischen Kräften, der Schwere, Wärme u. s. w. zukommt; so wird bei der Mahlmühle unter dem Motor das Wasserrad verstanden, obgleich es hier das Gewicht des Wassers, also zuletzt doch nur die Schwerkraft ist, welche die Bewegung erzeugt; allein dergleichen Rigorositäten sind hier weder nothwendig noch nützlich, indem, wenn einmal die Begriffe festgestellt sind, passende Abkürzungen nur förderlich seyn können.

§. **279. Arbeitsverlust der bewegenden Kraft.** Nicht genug, dafs schon der sogenannte Motor einer Maschine die bewegende Kraft nicht vollständig, sondern je nach seiner Beschaffenheit nur mehr oder weniger aufzunehmen im Stande ist, so kann er auch selbst diesen aufgenommenen Theil nicht ungeschmälert bis auf den letzten oder arbeitenden Bestandtheil fortpflanzen, indem ein Theil davon zur Überwindung der vorkommenden Hindernisse als Reibung, Steifheit der Seile (wo letztere vorkommen), des Widerstandes des Mittels, in welchem sich die Theile bewegen, der Trägheit der Massen, wenn sie plötzliche Geschwindigkeitsänderungen erleiden, so wie auch zur Formänderung, welche sie durch Stöfse erfahren u. s. w. verwendet werden mufs, welcher Theil sonach dem Nutzeffect entgeht; ist nämlich W die Wirkung oder Arbeit des Motors und E die Nutzleistung oder der Nutzeffect, so wie w die nöthige Arbeit zur Überwindung der vorkommenden Hindernisse, so ist

$$W = E + w \;\ldots\; (1.$$

Da nun selbst bei der einfachsten Maschine Nebenhindernisse vorhanden sind, also w niemals Null seyn kann, so ist immer $E < W$, d. h. bei jeder Maschine ist der Nutzeffect oder die beabsichtigte Arbeit immer kleiner als der Aufwand oder die Arbeit der bewegenden Kraft.

Dieser zum Nachtheil des Nutzeffectes bestehende Unterschied wird um so gröfser, je complicirter die Maschine ist, so, dafs es Fälle gibt, in welchen durch unverständige Combinationen und Vervielfältigungen der Maschinentheile, namentlich von Rädern, welche auch noch dazu schlecht und regellos ausgeführt werden, E nur den 10ten oder 20sten Theil von W beträgt; von der alten zu Marly bei Paris bestandenen Wasserhebmaschine, welche damals für ein halbes Wunder galt, wird sogar behauptet, dafs ihr Nutzeffect nur $\frac{1}{50}$ oder 2 Procent von der Leistung der bewegenden Kraft betragen habe! Maschinen, deren Nutzeffect E 50 bis 60 Procent beträgt, gelten schon für vortreffliche Constructionen.

Man darf also jedenfalls überzeugt seyn, dafs durchaus keine Combination von Rädern, Hebeln u. s. w. in einer Maschine möglich ist, wodurch, wie so oft geglaubt wird, die Arbeit der bewegenden, auf den aufnehmenden Theil wirkenden Kraft sogar kleiner seyn könnte, als die Arbeit, welche man von der Maschine erwartet, sondern, dafs dabei eben so gewifs das Gegentheil Statt findet, als z. B. ein Steinklotz nicht von selbst auf ein Baugerüste hinaufsteigt.

§. 280. Zweck der Maschinen. Aus diesen Betrachtungen geht also hervor, dafs der eigentliche Zweck einer Maschine unmöglich in der Vergröfserung der Arbeit des Motors oder der bewegenden Kraft, sondern nur darin bestehen kann, diese Arbeit mit Bezahlung von Agio in eine andere industrielle Leistung umzuwandeln. Um diese Umwandlung besser zu übersehen, sey P die bewegende Kraft des Motors, S der in einer Secunde zurückgelegte Weg des Angriffpunctes dieser Kraft, und zwar nach ihrer Richtung gemessen, so wie p und s dieselben Gröfsen für die beabsichtigte industrielle Leistung oder Arbeit; so bieten uns die Maschinen die Mittel dar, um die Arbeit PS (§. 174) in jene ps zu verwandeln, wobei man sich jedoch, da, wie bereits hinreichend bemerkt, immer $ps < PS$ ist, den Verlust $PS - ps$ an Nutzeffect gefallen lassen mufs. Ganz vorzüglich aber dienen die Maschinen dazu, in dem constanten Producte ps die beiden Factoren nach Belieben und Bedürfnifs der zu verrichtenden Arbeit zu verändern, wobei aber immer (wie schon in §. 174 bemerkt) der eine Factor genau in demselben Verhältnifs abnehmen mufs, als der andere zunimmt. Innerhalb gewisser Grenzen ist diefs auch für die Factoren P und S der Arbeit PS des Motors der Fall, und man sollte diese immer so wählen, dafs damit das Product PS am gröfsten wird. Ist z. B. der Motor ein unterschlächtiges Wasserrad, welches von einem mit der Geschwindigkeit c an die Schaufeln anstofsendem Wasser betrieben oder in Bewegung gesezt wird, so ist der Druck P auf die Schaufeln am gröfsten, wenn das Rad stille steht; dann ist aber die Geschwindigkeit oder der Factor S, folglich auch die Arbeit des Motors oder $PS = o$. In dem Mafs, als die Geschwindigkeit der Radschaufeln zunimmt, nimmt der Druck P ab, und sobald die Schaufeln dieselbe Geschwindigkeit c wie das anstofsende Wasser haben (etwa durch eine anderweitige Kraft herbeigeführt) ist der andere Factor, nämlich P, mithin abermals $PS = o$. Zwischen diesen beiden Grenzen der Geschwindigkeit von $S = o$ und $S = c$ gibt es aber nothwendig einen Werth von $S = S'$, wofür, wenn der zugehörige Werth $P = P'$ ist, das Product $PS = P'S'$ ein Maximum wird, und diese Relation zwischen P und S ist es, welche man durch Rechnung, Beobachtung oder Erfahrung bestimmen mufs, wenn man die vorhandene bewegende Kraft unter gleichen Umständen am vortheilhaftesten auf den Motor übertragen will, obschon man sich auch selbst in diesem günstigsten Falle einen bestimmten Verlust gefallen lassen mufs (so werden z. B. selbst auf ein sehr gut construirtes unterschlächtiges Wasserrad nur beiläufig 30 Procent der theoretischen Wirkung des fliefsenden, und als bewegende Kraft verwendeten Wassers übertragen, oder von diesem Motor zur weitern Mittheilung aufgenommen).

§. **281.** Was die beiden Factoren p und s der Nutzarbeit ps, die also immer nur einen gewissen Theil der Arbeit PS des Motors ausmacht, betrifft, so ist der eine davon gewöhnlich durch die Natur der zu verrichtenden Arbeit bestimmt. Soll z. B. mittelst einer Aufzugmaschine eine Last von 500 Pfund auf eine gewisse Höhe, und zwar durch die Kraft eines Menschen gehoben werden, von dessen Arbeit (§. 180) $PS = 25 \times 2\frac{1}{2} = 62\frac{1}{2}^{\text{F. Pf.}}$ 30 Procent für die Nebenhindernisse der Maschine abgeschlagen werden sollen, so, dafs nahe $ps = 44^{\text{F. Pf.}}$ bleibt; so mufs die Maschine so eingerichtet werden, dafs $p = 500$ Pfund, also $s = \frac{44}{500} = \frac{11}{125}$ Fufs wird.

Sollen ferner bei einer Räderschneidmaschine für hölzerne Gufsmodelle die Zahnschnitte rein ausfallen, so mufs man dem Schneidzahn eine sehr grofse Rotationsgeschwindigkeit geben, während sich bei einer Bohrmaschine für grofse gufseiserne Cylinder (für Dampfmaschinen z. B.) die Bohrspindel mit dem Bohrkopf äufserst langsam, sowohl um ihre Achse, als auch nach ihrer Länge bewegen mufs. Hat der Läufer einer Mahlmühle eine zu kleine Geschwindigkeit, so wird das Getreide nicht bis an den Umfang der Steine in der gehörigen Zeit hinausgetrieben, ist diese zu grofs, so erhält man durch Erhitzung des Mahlgutes ein schlechtes Mehl u. s. w.; in allen diesen Fällen ist also der Factor s wenigstens innerhalb gewisser Grenzen gegeben.

Anmerkung. Nach allem bisher Gesagten mufs man sich also begnügen, bei der Construction einer Maschine dahin zu wirken, dafs das Product ps jenem PS so nahe als möglich gebracht werde, und es als etwas ganz Thörichtes und Absurdes ansehen, ps gleich oder gar noch gröfser als PS machen zu wollen. Hat man aber durch eine verständige Construction und exacte Ausführung der Maschine die Nutzleistung ps der Arbeit PS des Motors so nahe als möglich gebracht, so darf man, wenn man nicht in den groben Irrthum derjenigen verfallen will, welche sich von der künstlichen Zusammensetzung einer Maschine oft wunderbare Kraftentwicklungen versprechen, nicht vergessen, dafs sich wohl von den beiden Factoren p und s einer auf Kosten des andern, keineswegs aber das ganze Product ps selbst vergröfsern läfst.

Der Vortheil einer Maschine besteht also, wir wiederholen es, nicht in der Vergröfserung des Productes PS oder der Arbeit des Motors, was ganz unmöglich ist, sondern darin, dafs man die bewegende Kraft je nach den besondern industriellen Bedürfnissen modificiren, und für einen bestimmten Zweck brauchbar und anwendbar machen kann; so wäre in den vorhin gewählten Beispielen ein Mensch ohne Maschine nicht im Stande, die Last von 500 Pfund auch selbst nur mit der kleinsten Geschwindigkeit aufzuheben, oder das Schneidrad, auch wenn es keinen Widerstand zu überwinden hätte, mit der nöthigen Geschwindigkeit umzudrehen; niemals wird aber durch die Maschine, wenn auch im erstern Beispiele p und im leztern s noch so grofs ist, das Product oder die Nutzleistung ps seiner Arbeit PS gleich kommen, oder diese gar noch übertreffen.

Durch Hilfe von Maschinen wird ferner auch die Aufmerksamkeit und Intelligenz der Menschen oft durch blofse mechanische oder Naturkräfte, welche weit weniger kostspielig sind, ersetzt, und dadurch dieselbe Arbeit nicht nur wohlfeiler, sondern in vielen Fällen auch weit schöner und regelmäfsiger, als durch Menschenhände geliefert.

§. 282. Das Perpetuum Mobile! So wenig in der obigen Gleichung (1, §. 279, der Nutzeffect E der Arbeit des Motors W gleich seyn kann, weil w nicht verschwindet, eben so wenig kann es eine Maschine geben, welche, einmal in Bewegung gesetzt, immer, d. h. wenigstens so lange fortgeht, als ihre Bestandtheile dauern, weil bei jeder, selbst der allereinfachsten Maschine, auch wenn sie sich im luftleeren Raume bewegen könnte, immer wenigstens an einem Puncte eine Reibung oder ein sonstiger Widerstand vorhanden ist, durch welchen die der Maschine mitgetheilte lebendige Kraft (§. 185) nach und nach vermindert, und endlich auf Null, folglich auch die Maschine zum Stillstande gebracht wird. Selbst wenn man eine solche immerfort gehende Maschine, über deren Erfindung sich schon Tausende um den Verstand oder an den Bettelstab gebracht haben, nur als ein Curiosum ansehen, und von ihr gar keine Leistung, also auch gar keinen Nutzen verlangen wollte, wodurch in der genannten Gleichung (1 $E = o$, also $W = w$ würde; so könnte auch in diesem Falle dieser Bedingungsgleichung für eine immerwährende Bewegung nicht entsprochen werden, indem die Wirkung W der bewegenden Kraft, da sie keinen Ersatz erhält, durch die genannten Hindernisse allmälig abnimmt, während die Wirkung w dieser Hindernisse constant bleibt.

Das einfachste Mobile perpetuum wäre ohne Zweifel das im luftleeren Raume schwingende Pendel, bei welchem die Reibung, oder (wenn man es an einer Stahlfeder schwingen läfst) der Widerstand im Aufhängpuncte durch alle zu Gebote stehenden Mittel so weit als möglich herabgebracht worden. Allein da dieser Widerstand, so lange wir nicht in eine neue Welt versetzt werden und in den Besitz ganz anderer, z. B. vollkommen harter, glatter, elastischer Körper u. s. w. gelangen, niemals ganz weggebracht, oder absolut Null werden kann, so wird auch das Pendel schon beim ersten Schwunge nicht vollkommen genau auf jene Höhe steigen, von welcher es herabgegangen ist, bei dem zweiten Schwunge wird es aus demselben Grunde gegen den ersten, beim dritten gegen den zweiten u. s. w. zurückbleiben, so, dafs wenn dieses Zurückbleiben auch noch so wenig, z. B. jedesmal nur den 100000sten Theil der anfänglichen Fallhöhe (des Sinusversus oder Pfeils des Schwingungsbogens) beträgt, diese Höhe nach 100000 Schwingungen schon gänzlich verschwunden seyn, und das Pendel stillstehen wird.

Fiele eine vollkommen elastische Kugel von irgend einer Höhe h frei auf eine harte Ebene herab, so würde die Arbeit der Schwere durch diese Höhe h auf die Zusammendrückung der Kugel im Berührungs- oder Stofspuncte verwendet; da aber die Kugel ihre ursprüngliche Form genau mit derselben Kraft wieder herstellen würde, so müfste die Kugel auch vollkommen genau wieder auf dieselbe Höhe h, ohne den geringsten Verlust an lebendiger Kraft erlitten zu haben (§. 204), zurückspringen, und da sich dieser Vorgang des Herabfallens und Zurückspringens ohne Ende wiederholen könnte, so hätte man ebenfalls ein Perpetuum Mobile. Allein da wir durchaus keinen vollkommen elastischen Körper kennen, so springt die Kugel auch niemals bis auf den Punct zurück, von welchem sie herabgefallen, und da diese Fallhöhen immerfort, und zwar sehr schnell kleiner werden, so hört auch diese Bewegung sehr bald auf.

Wenn aber schon in diesen allereinfachsten Fällen, wie im ersten Beispiele beim Pendel, keine immerwährende Bewegung möglich ist, wie soll sie erst dann, durch Vervielfältigung der beweglichen Bestandtheile einer Maschine, wie z. B. von Hebeln, Rädern, Gewichten u. s. w., wodurch man nur neue Widerstände und Hindernisse hinzufügt, möglich werden? Diejenigen, welche dieses in ihrem mechanischen Unverstande bewirken zu können glauben, könnten eben so gut einen zu schwer beladenen Wagen, welchen die Pferde nicht weiter bringen, dadurch in Gang und Bewegung zu bringen suchen, dafs sie zu dieser Last noch eine neue hinzufügen.

Einen Preis auf die Erfindung des Perpetuum Mobile ausschreiben, wie es einem traditionellen Aberglauben zu Folge eine gelehrte Academie gethan haben soll, hiefse im glimpflichsten Sinne genommen, einen Preis auf die Erfindung oder Entdeckung neuer Körper oder Urstoffe von der oben erwähnten Eigenschaft aussetzen; ob sich aber hierzu eine gelehrte Academie herbeilassen wird, ist wohl nicht schwer zu beurtheilen.

§. 283. Beharrungsstand. In dem Augenblicke, in welchem eine Maschine von der Ruhe aus in Bewegung gesetzt wird, ist die Kraft des Motors immer gröfser, und der Widerstand der Maschine kleiner, als wenn diese bereits mit ihrer normalen Geschwindigkeit arbeitet. Aus diesem Grunde mufs die Bewegung allmälig beschleunigt werden, gerade so, als ob eine constante oder beschleunigende

Kraft auf die Maschine einwirkte; allein diese Beschleunigung erreicht sehr bald ihr Maximum, worauf dann das dynamische Gleichgewicht der Maschine eintritt. Wäre diefs nicht der Fall, so würden gewisse Theile derselben, z. B. jene, worauf die bewegende Kraft wirkt, bald eine so grofse Geschwindigkeit annehmen, dafs, wie bei dem oben (§. 280) beispielsweise erwähnten Wasserrade bemerkt wurde, die bewegende Kraft auf den Motor (zweiter Art) keine Wirkung mehr ausüben könnte, und da andererseits die Widerstände mit der Geschwindigkeit eher zu- als abnehmen, so setzet sich die bewegende Kraft, welche mit der Geschwindigkeit des Angriffspunctes des Motors allmälig abnimmt, mit den Widerständen, welche dabei successive zunehmen, bei einer gewissen Geschwindigkeit in's dynamische Gleichgewicht, so, dafs wenn man der Kraft und Last gleich im Anfange der Bewegung diese Werthe, welche sie von dem Augenblicke an, in welchem das dynamische Gleichgewicht eintritt, besitzen, hätte geben können, sofort auch das statische Gleichgewicht zwischen diesen beiden Kräften würde Statt gefunden haben.

Es verhält sich mit diesem Anlassen oder in Bewegungsetzen einer Maschine so, wie mit einem frei fallenden Körper in einem stark widerstehenden Mittel, z. B. im Wasser; denn obschon die Bewegung anfangs beschleunigt ist, so erreicht, da der Widerstand mit der Geschwindigkeit sehr schnell (nämlich im quadratischen Verhältnisse) zunimmt, der fallende Körper bald eine solche Geschwindigkeit, bei welcher dieser Widerstand der Schwerkraft gleich ist, und sonach die Beschleunigung, welche sie in dem Körper erzeugen will, jeden Augenblick aufhebt, so, dafs also von da an der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortgeht oder fällt.

Man mufs also, um den Gang einer Maschine zu beobachten, so lange warten, bis diese ihre normale Geschwindigkeit erlangt, nämlich bis sie in den Beharrungsstand gekommen ist.

§. 284. Einflufs einer oscillirenden oder periodischen Bewegung auf den Nutzeffect.

Bei manchen Maschinen nehmen gewisse Bestandtheile, wie z. B. bei den gewöhnlichen Dampfmaschinen die Bläuelstange, bei einer Bretschneidmühle das Sägegatter u. s. w. eine vertical auf und ab gehende Bewegung an. Beim Hinaufgehen wird von der bewegenden Kraft oder dem Motor die hierzu nöthige Arbeit, nämlich (§. 175) das Product aus dem Gewichte dieses betreffenden Bestandtheiles in den Weg desselben absorbirt, dagegen wird beim Niedergehen desselben diese Arbeit (§. 184) genau und vollständig wieder zurückerstattet; es ist also bei einer solchen regelmäfsigen periodischen Bewegung, wenn man die Wirkung immer am Ende einer Periode betrachtet (mit Ausnahme der herbeigeführten Reibung) gerade so, als ob der oscillirende oder auf und ab gehende Bestandtheil kein Gewicht hätte.

Dasselbe gilt auch (§. 187) hinsichtlich der bloſs trägen Massen solcher Bestandtheile, wenn man dabei nur Sorge trägt, daſs der Übergang der positiven (z. B. aufwärts gehenden) in die negative (abwärts gehende) Bewegung (die immer durch Null geht) nur allmälig und nicht plötzlich geschieht, wie dieſs auch in der That (§. 189) beim Krummzapfen oder der Kurbel der Fall ist.

§. 285. Nachtheil der Stöſse bei Maschinen. Findet dagegen der Übergang von einer Bewegung in die entgegengesetzte oder die Geschwindigkeitsänderung plötzlich Statt, so ist diese mit Stöſsen verbunden, welche, da die Körper nicht vollkommen elastisch sind, immer (§§. 201 und 205) einen Verlust an lebendiger Kraft, folglich auch an Nutzeffect herbeiführen.

So würde z. B. auf diese Weise bei einem langen Gestänge, mittelst welchem eine Bewegung auf einen entfernten Punct fortgepflanzt werden soll, ein groſser Theil des Nutzeffectes verloren gehen, wenn die einzelnen Verbindungsstücke in ihren durch Bolzen verbundenen Gelenken oder Gliedern zu viel Spielraum hätten. Bei einer schlecht ausgeführten Verzahnung der Räder, wobei die Zähne einen zu groſsen Spielraum haben, wird bei jeder Änderung in der Gröſse des Widerstandes, wodurch das geführte Rad plötzlich für eine kurze Zeit zum führenden wird, und dann wieder umgekehrt, jedesmal ein Stoſs zwischen den Zähnen entstehen, der ebenfalls für den Nutzeffect nachtheilig ist. Auf gleiche Weise geht bei dem Betriebe eines Stampf- oder Hammerwerkes durch den plötzlichen oder stoſsweisen Angriff des ruhenden Stämpfers oder Hammers (§. 221, Anmerkung 2) ein Theil der Arbeit des Motors für den Nutzeffect verloren u. s. w. Aus diesem Grunde, und auch noch aus Rücksicht für die Dauerhaftigkeit der Maschine selbst, muſs man alle Stöſse bei der Mittheilung oder Fortpflanzung der Bewegung auf das Sorgfältigste zu vermeiden trachten. Diese Sorgfalt sollte sich selbst auf jene Maschinen erstrecken, welche gewöhnlich, wie Hammer-, Stampf- und Walkwerke durch den Stoſs wirken; aus diesem Grunde substituirt man dort, wo der industrielle Zweck eben so gut erreicht wird, dafür lieber Walz- und Quetschwerke und Kurbelwalken, weil dabei kein solcher Verlust an Nutzeffect durch den Stoſs, der dabei vermieden wird, eintritt.

§. 286. Vorzüge der gleichförmigen Bewegung bei Maschinen. Abgesehen davon, daſs bei einer gleichförmigen Bewegung, in welchem Falle die bewegende Kraft und die Widerstände oder die Last fortwährend denselben Werth beibehalten, alle einzelnen Theile mit constanter Kraft auf einander wirken, also dabei keine Geschwindigkeitsänderungen oder Stöſse eintreten, zugleich auch jede Berechnung hinsichtlich der Stärke und Festigkeit der einzelnen Bestandtheile der Maschine dadurch erleichtert wird; so besteht der Hauptvortheil der Gleichförmigkeit in der Bewegung eigentlich darin, daſs sowohl der Angriffspunct der bewegenden Kraft, welche für das Maximum ihrer Leistung (§. 280) eine bestimmte Geschwindigkeit annehmen muſs, als auch der letzte oder arbeitende Theil der Maschine, für welchen es ebenfalls eine gewisse vortheilhafteste Geschwindigkeit gibt (§. 281), diese beste oder zweckmäſsigste Geschwindigkeit unverändert beibehalten können.

Diese genannten Vorzüge fallen für die veränderliche oder periodische Bewegung, selbst wenn diese nach dem Gesetze der Stetigkeit Statt findet, gröſstentheils weg; so haben wir schon bei der Theorie der einfachen Kurbel gesehen, daſs die bewegende Kraft an gewissen Stellen, den sogenannten todten Puncten, gar keine Bewegung erzeugen kann, und deſshalb eine Schwungmasse oder eine mehrfache Kurbel zu Hilfe genommen werden muſs. Gewisse Theile können dabei kleine Stöſse oder wenigstens abwechselnd eine Ausdehnung und Compression erleiden, wozu bei unvollkommen elastischen Körpern immer ein eigener Kraftaufwand nöthig ist. Auch arbeitet eine Maschine, bei welcher die Geschwindigkeit zu- und abnimmt, nicht beständig unter den günstigsten Verhältnissen (die nur für eine b e s t i m m t e Geschwindigkeit vorhanden seyn können), und da man endlich die Stärke und Dimensionen der einzelnen beweglichen Bestandtheile nach der gröſsten Kraftäuſserung, die jedenfalls gröſser als die mittlere ist, welche bei einer gleichförmigen Bewegung eintreten könnte (vergl. §. 189, Anmerk. 1), berechnet, so bietet die massivere und schwerere Maschine, ohne Rücksicht auf ihre gröſsern Kosten, auch gröſsere Nebenhindernisse dar.

So sehr man sich aber auch aus den angeführten Gründen bemühen muſs, bei Maschinen die veränderliche Bewegung durch die gleichförmige zu ersetzen, und sowohl dem aufnehmenden als arbeitenden Bestandtheil (§. 278) statt einer alternirenden eine rotirende Bewegung zu geben (so ist es z. B. vortheilhaft, eine Dampfmaschine mit hin und hergehenden Kolben in eine Rotirende, das auf und ab gehende Sägegatter bei einer Bretsäge in eine Kreissäge zu verwandeln u. s. w.); so läſst sich dieses gleichwohl nicht überall erreichen, was theils in der Natur des Motors und der zu verrichtenden Arbeit, theils aber in Localverhältnissen und ökonomischen Rücksichten seinen Grund hat.

§. 287. Veränderliche Bewegung bei Maschinen. Streng genommen gibt es nur drei verschiedene Fälle, in welchen bei Maschinen eine veränderliche oder periodische Bewegung Statt findet: erstens wenn die bewegende Kraft, zweitens der Widerstand der Nutzleistung, und drittens wenn beide irregulär wirken, oder innerhalb gewisser Grenzen veränderlich sind.

Soll der Motor eine hin und her gehende, der arbeitende Theil aber eine gleichförmige rotirende Bewegung erhalten, so verwandelt man durch die bekannten Mittel, wie z. B. durch die Kurbel und excentrische Scheibe die erstere unmittelbar in eine kreisförmige Bewegung, wie dieses bei Dampfmaschinen mit hin und her gehenden Kolben geschieht, so, dafs dann die Communication (§. 278) oder die zwischen liegenden Theile nur aus verzahnten Rädern oder aus Scheiben, Trommeln und Riemen bestehen, welche eine rotirende Bewegung erhalten.

Eben so verfährt man auch, wenn der aufnehmende Theil oder der Motor eine gleichförmige, continuirliche, dagegen der arbeitende (wie bei einer gewöhnlichen, durch Wasser betriebenen Sägmühle) eine hin und her oder auf und ab gehende Bewegung annehmen soll.

Sollen dagegen, sowohl der aufnehmende als arbeitende Bestandtheil eine solche oscillirende Bewegung erhalten, so hat man zu überlegen, ob es nicht möglich ist, die erstere unmittelbar auf die letztere, ohne Communication zu übertragen, so dafs die Schwingungen beider Bestandtheile zusammenfallen oder correspondiren, und dadurch ihre Geschwindigkeiten gleichzeitig und allmälig zu- und abnehmen, wodurch die Bewegung beinahe eben so vortheilhaft wird, als wenn diese gleichförmig und continuirlich wäre; eine solche Bewegungsart ist z. B. möglich, wenn durch eine Dampfmaschine eine Pumpe betrieben werden soll. Wäre dagegen ein solches Zusammenfallen der Oscillationen nicht ausführbar, so müfste man jede derselben für sich in eine kreisförmige Bewegung verwandeln. Bei der Wahl der Mittel zur Änderung oder Übertragung der einen Bewegung in die andere mufs man jedenfalls jener den Vorzug geben, bei welcher diese Verwandlung am sanftesten und ohne Stöfse vor sich geht.

§. 288. Regulirung der Bewegung. Aber selbst dort, wo alle Theile einer Maschine eine continuirliche Rotationsbewegung besitzen, kann sowohl die bewegende Kraft, durch die Art, wie sie wirkt (wie z. B. bei der Kurbel), als auch der Widerstand der Nutzarbeit innerhalb gewisser Grenzen veränderlich seyn; sollen aber demohngeachtet gewisse arbeitende Theile der Maschine, deren Leistung in Beziehung auf Schönheit und Vollkommenheit der Arbeit wesentlich davon abhängen kann, eine möglichst gleichförmige Bewegung erhalten, und hat man bereits alle in einem solchen Falle vorgezeichneten Mittel, als erstens die rotirende Bewegung durch Riemen, genau ausgeführte Ketten oder verzahnte Räder fortzupflanzen, zweitens alle Räder und Scheiben genau zu centriren, und drittens die auf die Bewegung Einfluſs habenden Theile hinsichtlich ihrer Gewichte durch Gegengewicht in's Gleichgewicht zu bringen, und wo es angeht, diese Gewichte selbst zur Ausgleichung der Ungleichheiten in der bewegenden Kraft oder in dem Nutzwiderstande zu benützen, angewendet; so bleibt immer noch das Schwungrad, dessen Theorie wir bereits in §. 192 entwickelt haben, das vorzüglichste Mittel zur Regulirung der Bewegung. Bei der Anwendung desselben gibt man demselben, um es nicht übermäſsig groſs und schwer machen zu müssen, eine bedeutende Rotationsgeschwindigkeit, und bringt es so nahe als möglich an die zu regulirende Kraft oder an den auszugleichenden Widerstand. Im Falle sowohl die bewegende Kraft als auch der Nutzwiderstand sehr veränderlich sind, bringt man wohl auch zwei solche Schwungräder, das eine in die Nähe des aufnehmenden, das andere in die des arbeitenden Theiles der Maschine an.

Wie aus den betreffenden §§. 192 — 197 hervorgeht, so dient das Schwungrad gleichsam als Magazin zur Aufnahme eines Theiles der Arbeit der bewegenden Kraft oder des Motors in den günstigen oder jenen Perioden, in welchen die Kraft die Widerstände übersteigt, um ihn in den ungünstigen, d. i. jenen Perioden, in welchen die Widerstände überwiegend sind, wieder abzugeben. Da sonach ein Schwungrad unmöglich, wie doch so Viele, denen die Gesetze der Mechanik unbekannt sind, zu glauben scheinen, eine Kraft abgeben kann, die man nicht zuvor hineingelegt hat, ja im Gegentheile durch die dadurch verursachte gröſsere Reibung von der vorhandenen bewegenden Kraft noch ein Theil absorbirt wird; so muſs man dort, wo die nöthige Gleichförmigkeit im Gange der Maschine durch die ohnehin schon damit in Verbindung stehenden, und in Bewegung befindlichen Massen, wie es z. B. bei Mahlmühlen der Fall, vorhanden ist, so wie auch in Fällen, wo eine Maschine oft und schnell angehalten werden muſs, kein Schwungrad anbringen, und wo ein solches durchaus erforderlich ist, dieses nicht schwerer, als unumgänglich nöthig, ausführen.

§. 289. Wenn nun auch das Schwungrad in jenen Fällen, in welchen die Widerstände in kurzen Perioden veränderlich sind, oder wenn diese beständig, und der Motor zwar an und für sich mit gleicher Kraft arbeitet, dennoch aber durch die eigenthümliche Wirkungsart, wie es z. B. bei der Kurbel (§. 189) der Fall ist, innerhalb gewisser Perioden als eine veränderliche Kraft wirkt, zur Ausgleichung oder Regulirung der Bewegung ganz besonders geeignet ist, so würde dasselbe gleichwohl in jenen Fällen nichts nützen, in welchen der Motor, nachdem seine Wirkung jene des Widerstandes bereits überstiegen hat, noch immer mit derselben Stärke zu wirken fortfährt, weil dann auch das Schwungrad selbst eben so gut, wie die ganze Maschine immer mehr beschleunigt, und so auch im umgekehrten Falle, zuletzt sammt der Maschine stehen bleiben würde.

In Fällen nun, wie der zuerst genannte, wendet man sogenannte Moderatoren, welche die Geschwindigkeit der Bewegung durch den vermehrten Widerstand, welchen sie dann darbieten, mäſsigen, in beiden Fällen aber die Regulatoren an, durch welche unmittelbar die bewegende Kraft selbst, wie z. B. die Dampfzuströmung bei Dampfmaschinen, der Zufluſs des Wassers bei Wasserwerken u. s. w. gemäſsigt oder vermehrt, also überhaupt regulirt wird.

§. 290. Moderatoren. Am häufigsten bedient man sich zur Mäſsigung der Geschwindigkeit, wie z. B. bei Fuhrwerken, wenn sie über einen nicht sehr steilen Abhang hinabfahren, bei Aufzugmaschinen und Kranichen, wenn die Last herabgelassen wird u. s. w., der sogenannten Bremsvorrichtungen, wovon die allereinfachste, aber auch am wenigsten wirksame, und wegen des Druckes gegen die Achsen eben nicht die zweckmäſsigste, wie sie bei Fuhrwerken üblich, aus einem horizontalen Querbalken besteht, welcher mittelst Schrauben oder einer Hebelvorrichtung gegen den Umfang der Hinterräder angepreſst, und dadurch eine Reibung erzeugt wird, wodurch der Wagen in seinem Laufe in etwas gehemmt und aufgehalten werden kann.

Wirksamer, weil ein gröſserer Theil des Rades umfaſst, und zweckmäſsiger, weil das Rad von beiden Seiten geklemmt wird, also kein Druck auf die Achse entsteht, ist die bei Eisenbahnwägen und dem Tender bestehende Bremsvorrichtung. Am allerwirksamsten jedoch ist der in Fig. 195 dargestellte Bremsring BD, welcher aus einem dünnen, nicht völlig geschlossenen eisernen Reif besteht, in welchem hölzerne Backen n, die sich jedoch nicht berühren, sondern immer einen kleinen Zwischenraum lassend, eingelegt, und an dem Reife leicht befestigt werden und so gleichsam ein gegliedertes Band um das Rad an die Welle C bilden, welche gebremst werden soll. Die beiden sich nicht unmittelbar vereinigenden Enden des Reifens sind gelenkartig, mittelst Bolzen a nnd b an den um c drehbaren Hebel AB befestigt, wodurch, wenn dieser Hebel bei A herabgedrückt wird, diese Puncte a und b nach den Richtungen der Pfeile gezogen werden, und dadurch der Bremsring fast ringsherum gegen den Umfang der Welle um so stärker gepreſst wird, je gröſser die auf den Hebel wirkende Kraft ist; daſs aber diese Bremsvorrichtung, welche bei Aufzugmaschinen, Kranichen u. s. w. benützt wird, äuſserst wirksam seyn muſs, geht aus §. 240 über die Reibung eines Seiles über einen Cylinder, womit diese Bremse verglichen werden kann, hinlänglich hervor.

Dort, wo schon ein geringer Widerstand zur Mäſsigung der Geschwindigkeit hinreicht, benützt man als Moderator den bekannten Windflügel (wie bei Spieluhren, Lampen-Pumpwerken, Bratenwendern u. s. w.), welcher sobald die bestimmte oder normale Geschwindigkeit jenes Bestandtheiles der Maschine, an welchen dieser Flügel angebracht ist, überschritten wird, in der Luft einen sehr schnell (im quadratischen Verhältniſs) wachsenden Widerstand findet, und dadurch die Geschwindigkeit moderirt und möglichst gleichförmig macht.

§. 291. Regulatoren. Nimmt die bewegende Kraft, wie z. B. bei Taschenuhren, wo im Anfange die Feder, wenn sie ganz aufgewunden, oder die Uhr aufgezogen ist, am stärksten, und dann allmälig schwächer wirkt, ab, oder der Widerstand, wie z. B. bei Öhlpressen, allmälig zu, oder wie bei Erzförderungsmaschinen, wo das sehr gewichtige Seil, woran der Kübel mit der Hauptlast befestigt ist, beim Aufwinden immer kürzer, und dadurch leichter wird, allmälig ab; so kann man sich zur Regulirung der Kraft oder des Widerstandes eines abgekürzten, auf der Mantelfläche mit spiralförmigen Windungen versehenen Kegels bedienen, auf welchen, wie es bei Uhren mit der Schnecke der Fall ist, die vom Federhaus sich abwickelnde Kette von der kleinern gegen die gröſsere Basis zu, oder bei den erwähnten Förderungsmaschinen das Seil auf den Spiralkorb in derselben Weise (bei Öhlpressen in der entgegengesetzten Richtung) aufgewickelt wird, so daſs dadurch in demselben Verhältniſs als die Kraft schwächer wird oder die Last abnimmt, im erstern Falle die Kraft, im letztern die Last auf immer längere Hebelarme wirkt, und dadurch das statische Moment ungeändert bleibt.

Obschon sich ferner für jede besondere Bewegungs- und Betriebsart fast ein eigener Regulator erfinden läſst, so ist doch der auf der

Theorie des Centrifugalpendels beruhende Regulator der am allermeisten verbreitete und angewendete, weſshalb wir auch nur diesen noch in Kürze untersuchen wollen.

§. **292. Centrifugal-Regulator.** Dieser Regulator beruht auf der im §. 158 entwickelten Theorie des Centrifugalpendels, und besteht in Folgendem:

An einer verticalen cylinderischen Spindel AD (Fig. 196) werden am obern Ende A zwei Stangen AB, AB', an deren untern Enden sich zwei gleich schwere Kugeln Q befinden, um einen horizontalen Bolzen drehbar angebracht, und in B, B', ebenfalls um solche runde Bolzen drehbar, durch die Arme BC, $B'C$ mit einer Hülse N, welche sich auf der verticalen Spindel AD auf- und abschieben läſst, gelenkartig verbunden, so, daſs das Viereck $ABCB'$ ein articulirtes, d. i. in den vier Winkelpuncten bewegliches Parallelogramm bildet.

Wird nun dieser Apparat mit der zu regulirenden Maschine so in Verbindung gebracht, daſs der Spindel AD durch diese Verbindung eine rotirende Bewegung mitgetheilt wird, so nehmen die beiden Kugeln Q an dieser Bewegung um die verticale Achse AD Theil, und entfernen sich von dieser bei der normalen Geschwindigkeit der Maschine bis auf eine gewisse, im voraus bestimmte Distanz. Nimmt dagegen die Geschwindigkeit der Maschine über diese normale zu oder ab, so erhalten auch die Kugeln Q eine gröſsere oder kleinere Geschwindigkeit, sie entfernen sich also im erstern Falle (§. 154) von dieser Achse, und nähern sich ihr im zweiten, und zwar um so mehr, je gröſser die Abweichung von der normalen Geschwindigkeit ist; da aber dadurch die mit den Kugeln auf die angegebene Weise in Verbindung stehende Hülse N beziehungsweise auf der Spindel AD auf und ab geschoben wird, so wird der um O drehbare, in E gabelförmig gebildete, und in die in die Hülse eingedrehte Kehle a eingreifende Hebel ebenfalls so in Bewegung gesetzt, daſs der Endpunct F, welcher z. B. bei Dampfmaschinen mit dem Dampfzuleitungshahn (Drosselventil) in Verbindung steht, im erstern Falle ab- im letztern aufwärts geht, und dadurch die beabsichtigte Regulirung in der Zuströmung des Dampfes oder Wassers bewirkt.

§. **293.** Macht die Spindel AD bei der normalen Geschwindigkeit der Maschine eine bestimmte Anzahl von Umdrehungen, so wird sich auch die Hülse N dabei an einer bestimmten Stelle unbeweglich erhalten; sobald aber die Geschwindigkeit um einen gewissen, über die gestattete Grenze der Gleichförmigkeit des Ganges der Maschine hinausgehenden Theil zu- oder abnimmt, so soll die Centrifugalkraft der Kugeln im Stande seyn, die mit dem Drosselventil der Dampfmaschine oder der Schütze des Wasserrades u. s. w. in Verbindung stehende Leitung, oder die Communication sogleich in Bewegung zu setzen, und die gewünschte Regulirung zu bewirken.

Ist Q das Gewicht, v die Geschwindigkeit des Schwerpunctes und F die Fliehkraft einer jeden der beiden Kugeln für den normalen Gang der Maschine, und haben dabei die Kugeln den in Fig. 197 angedeuteten Stand; so ist nach §. 158 (Relat. α)

$$m)\quad \frac{F}{Q} = \frac{CF}{AC} \text{ und } F = \frac{Q\,v^2}{g\,.\,CF},$$

so wie (Gleich. 1 desselben Paragraphes)

$$AC = \frac{g\,.\,CF^2}{v^2} \quad .\;.\;.\;(n.$$

Ist p der Widerstand, welchen die Hülse N (Fig. 196) bei ihrer aufwärts gehenden Bewegung und der zu bewirkenden Regulirung zu überwinden hat, so kommt dieser als eine von C nach d (Fig. 197) abwärts wirkende Kraft p vor; macht man daher $CD = p$, zerlegt diese Kraft in zwei Kräfte nach den Richtungen CE, CE', und schneidet $B'a' = Ba = CE = CE'$ ab, so bringt dieser Widerstand p auf jeden Arm AO, AO' in B und B' einen Zug $Ba = B'a'$ hervor, welcher neuerdings in Bb und Bc an dem einen, und $B'b'$ und $B'c'$ an dem andern Arm zerlegt, 4 Kräfte gibt, wovon Bb und $B'b'$ von dem Bolzen oder festen Puncte A aufgehoben, die beiden andern Bc und $B'c'$ aber, jede gleich dem Widerstande p werden (indem z. B. die beiden Dreiecke Bac und $CE'D$ einander gleich sind). Reducirt man endlich diese beiden lothrecht wirkenden Kräfte p von den Puncten B und B' auf jene O und O', so hat man nach den statischen Gesetzen auf den Drehungspunct A bezogen, als reducirte Kräfte $p' = \frac{AB}{AF}\,p$, und es ist daher gerade so, als ob jede Kugel durch den Widerstand p um diesen Theil p' schwerer geworden wäre, und dadurch das Gewicht $Q + \frac{AB}{AF}\,p$ hätte. Es verwandelt sich also auch die vorige Relation (m, wenn man auch gleich für F seinen Werth setzt, in

$$\frac{Q\,v^2}{g\,.\,CF\left(Q + \frac{AB}{AF}\,p\right)} = \frac{CF}{AC}.$$

Da aber nicht bei der kleinsten Vergröfserung der normalen oder mittlern Geschwindigkeit v auch schon eine Bewegung in der Hülse N eintritt, sondern diese Zunahme an Geschwindigkeit erst einen gewissen Werth erreicht haben mufs, bevor die Kugeln wirklich aus einander gehen, so mufs man, wenn man als Grenze dieser Zunahme $\frac{1}{10}\,v$ setzt, mithin annimmt, dafs v erst in $\frac{11}{10}\,v$ übergehen mufs, bevor sich der Regulirungsapparat in Bewegung setzt, und den genannten Widerstand p überwindet, in der vorigen Gleichung $\frac{11}{10}\,v$ statt v setzen, wodurch man, wenn auch gleich für AC sein Werth aus Gleich. (n gesetzt wird,

$$\frac{Q\,(\frac{11}{10}\,v)^2}{g\,.\,CF\left(Q + \frac{AB}{AF}\,p\right)} = \frac{CF\,.\,v^2}{g\,.\,CF^2},$$

und daraus durch Reduction $\frac{121}{100}\,Q = Q + \frac{AB}{AF}\,p$, also für das gesuchte Gewicht der Kugeln

$$Q = \frac{100}{21}\,\frac{AB}{AF}\,p = 4{\cdot}76\,\frac{AB}{AF}\,p \;.\;.\;.\; (1$$

erhält.

Da man bei Dampfmaschinen gewöhnlich $\frac{AB}{AF} = \frac{2}{3}$ nimmt, so ist für dieses Verhältnifs das Gewicht jeder der beiden Kugeln $Q = 3{\cdot}17\,p$.

Wäre z B. $p = 5$ Pfund, so würde jede Kugel das Gewicht von 15·9, d. i. von 16 Pfund erhalten müssen.

Die Relation (1 zeigt, dafs, wenn das Gewicht Q eine gewisse Gröfse nicht übersteigen soll, bei der Zunahme des Widerstandes p das Verhältnifs $\frac{AB}{AF}$ abnehmen, also AF gegen AB zunehmen mufs. Aus diesem Grunde ändert man, wenn p schon etwas bedeutend wird, den Apparat dahin ab, dafs man die bewegliche Hülse N, wie in Fig. 198, an das obere Ende der Spindel und den Drehungspunct C nach abwärts legt; damit aber der Arm CO nicht gebogen werde, nimmt man CO nicht leicht über 3 bis 4 CB.

Was ferner die Stellung oder den Punct C (Fig. 197) der Hülse N für die normale Geschwindigkeit v anbelangt, so läfst sich diese leicht nach dem Satze (§. 158), dafs ein einfaches Kreispendel von der Länge AC doppelt so schnell, d. h. in der halben Zeit schwingt, als das Centrifugalpendel einen Umlauf vollendet, auffinden. Was aber endlich den Widerstand p, den man im Voraus durch Versuche bestimmen kann, betrifft; so läfst man beim Reguliren einer Schütze den oben erwähnten Hebel EF nicht unmittelbar auf die Schütze selbst wirken (weil dadurch p viel zu grofs würde), sondern man benützt denselben dann nur zur Ein- und Ausrückung eines Rades, welches in ein zweites, eingreift, und durch dessen Umdrehung die Schütze regulirt wird.

Unter mehreren Anordnungen, welche hierbei möglich sind, ist eine in Fig. 199 angedeutet, deren Wirksamkeit auf Folgendem beruht: Durch die von der zu regulirenden Maschine kommende Communicationswelle N wird dem Pendel, und zugleich auch den auf der Spindel AD befindlichen beiden conischen Rädern a und b die rotirende Bewegung auf folgende Weise mitgetheilt: Die mit der Spindel mit umlaufende Klaue s, welche sich auf der erstern der Länge nach entweder auf einem vierkantigen Theil der Spindel, oder besser auf einem rund gedrehten, und mit einer Feder (Clavette) und Nuth versehenen Theile auf und ab schieben, aber nicht ohne die Spindel umdrehen, und sich mit jedem dieser beiden Räder *a* und *b* durch eine der bekannten Kupplungen verbinden, und wieder losmachen läſst, bringt in der gezeichneten Stellung, in welcher das Pendel seine normale Geschwindigkeit haben soll, keines der beiden genannten Kegelräder, da sie auf der runden Spindel nur lose aufgesteckt sind, in Bewegung. Gehen aber die Kugeln durch eine Beschleunigung der Maschine aus einander, hebt sich also die Hülse *n*, so zieht sie durch den doppelten Winkelhaken *x*, von dessen beiden horizontalen, gabelförmig auslaufenden Armen der eine in die Kehle der Hülse *n*, der andere in jene der Klaue *s* eingreift, und welcher in dem Kloben *t* eine Führung besitzt, die Klaue *s* mit hinauf, diese verbindet sich dadurch mit dem obern Kegelrade *a*, und zwingt es, an ihrer rotirenden Bewegung Theil zu nehmen, wodurch dann auch das Kegelrad *p* sammt der horizontalen Spindel *d* und der darauf angebrachten Schraube ohne Ende *h*, welche auf die Schütze wirkt, nach einer solchen Richtung umgedreht wird, daſs sich die Schützenöffnung verkleinert.

Gehen dagegen im entgegengesetzten Falle die Kugeln zurück, so löst sich die Klaue *s* aus dem Kegelrade *a* aus, welches dadurch stehen bleibt; gehen die Kugeln noch weiter, nämlich unter ihrem Normalstande zusammen, so ergreift die Klaue jetzt das untere Kegelrad *b*, welches sofort die Spindel *D* mit der Schraube ohne Ende *h* in entgegengesetzter Richtung dreht, und dadurch die Schützenöffnung vergröſsert.

Anstatt der beiden Kegelräder *a* und *b* kann man sich auch zweier Riemenscheiben bedienen, welche mit einer dritten, mit der Schütze in Verbindung gebrachten Scheibe durch Riemen ohne Ende, wovon der eine (um die dritte Scheibe nach entgegengesetzten Richtungen drehen zu können) gekreuzt, der andere nicht gekreuzt wird, in Verbindung stehen.

(Eine hieher gehörige Anmerkung siehe in den Zusätzen.)

Umwandlung oder Transformation der Bewegung.

§. 294. Bei allen in Thätigkeit befindlichen zusammengesetzten Maschinen haben einzelne Bestandtheile die empfangene Bewegung auf die nächstfolgenden entweder ohne, oder mit Änderung ihrer Natur fortzupflanzen oder zu übertragen. Je nach der verschiedenen Art, nach welcher dabei eine Bewegung in die andere verwandelt wird, lassen sich diese einzelnen Bestandtheile oder einfachen Maschinen (welche zusammen die zusammengesetzte ausmachen) systematisch ordnen und zusammenstellen; hier soll nur von jenen Umwandlungen in Kürze die Rede seyn, welche am meisten vorkommen, und in dieser Beziehung lassen sich vier Hauptbewegungen: erstens die geradlinige continuirliche, zweitens die kreisförmige continuirliche, drittens die hin und her gehende geradlinige, und viertens die hin und her gehende kreisförmige oder oscillirende unterscheiden. Es gibt zwar zur Verwandlung der einen dieser Bewegungen in die andere oft vielerlei Maschinen, wir werden jedoch nur immer eine oder ein paar der vorzüglichsten davon anführen.

§. 295. Umwandlung *der* **geradlinigen continuirlichen** *Bewegung in eine* **ähnliche.** Die Umwandlung oder Transformation dieser Bewegung wird am einfachsten durch Rollen (wie bei Mangen) bewirkt, welche wir bereits im §. 242 erwähnt haben.

§. 296. Umwandlung *der* **geradlinigen** *continuirlichen in eine continuirliche* **Kreisbewegung**, *und umgekehrt.* Von dieser Transformation der Bewegung bietet uns das Rad an der Welle (§. 99), bei welchem die continuirliche Kreisbewegung der Kurbel (durch Menschenhände umgedreht) in die geradlinige Bewegung der zu hebenden Last verwandelt wird, ein Beispiel dar. Eben so kann umgekehrt das hinabgehende Gewicht als bewegende Kraft dienen, und das Rad oder die Kurbel in drehende Bewegung setzen.

Ein in eine verzahnte Stange oder einen Kammbaum (§. 220) eingreifendes verzahntes Rad bietet ein zweites Beispiel von der Transformation dieser beiden Bewegungen eine in die andere dar; eben so auch die Schraube u. s w.

§. 297. Verwandluug *der* **continuirlichen Kreisbewegung** *in eine* **ähnliche.** Hierzu bedient man sich der Riemen oder Seile ohne Ende, welche über Scheiben oder Trommeln gelegt werden; um dabei das Gleiten zu verhindern, gibt man den Trommeln und Riemen eine gröfsere Berührungsfläche, wozu auch das Kreuzen der Riemen oder Stricke gehört; die letztern kann man sogar (§. 240) einige Male um die Rollen oder Scheiben herumschlagen. Ist die fortzupflanzende Kraft oder der Widerstand zu bedeutend, so wählt man das allgemeine Auskunftsmittel, die verzahnten Räder (§. 207).

§. 298. Umwandlung *der continuirlichen* **Kreisbewegung** *in eine* **hin und her gehende geradlinige.** In diesem Falle bedient man sich vorzugsweise der Kurbel oder des Krummzapfens AC (Fig. 200), in dessen Warze A (§. 188) die Bläuelstange AB, welche in B mit dem zwischen Frictionsrollen a, a' hin und her gehenden Bestandtheil BD gelenkartig verbunden ist, eingehängt wird, so, dafs bei jeder ganzen Umdrehung der Kurbel das Stück BD eine hin und her gehende Bewegung von der Länge des Durchmessers EF des Kurbelkreises vollendet.

Der Hauptvorzug dieser Verbindungs- und Bewegungsart besteht wesentlich in dem Umstande, dafs der Theil BD nur allmälig von der Ruhe oder der Geschwindigkeit Null aus auf die gröfste Geschwindigkeit, und von da an wieder eben so nur allmälig zur Wechslung der Bewegung (wobei die Geschwindigkeit von $+$ in $-$ durch Null gehen mufs) vermindert und auf Null gebracht wird, folglich (§. 284) weder durch das Gewicht noch durch die Masse des Theiles BD (so wie auch der Verbindungsstange AB selbst) ein Verlust an Nutzeffect der Maschine eintritt.

Öfter benützt man, anstatt eine Kurbel anzubringen, ein schon vorhandenes Rad, und befestigt in einer Speiche oder einem Arme desselben, welcher an dieser Stelle etwas verstärkt wird, einen runden Zapfen, welcher als Kurbelwarze zum Einhängen der Bläuelstange dient.

§. 299. Da es bei der im vorigen Paragraphe genannten Bewegungsart auf die Dicke, d. i. die Gröfse des Durchmessers ii' der Kurbelwarze nicht ankömmt, so könnte man diesen auch bedeutend, wie z. B. bis mm' vergröfsern, ohne dafs das Stück BD aufhören würde, auf jede halbe Umdrehung der Kurbel einen geradlinigen Weg von der Göfse des Durchmessers EF des Kurbelkreises zurücklegen.

Wird nun dabei der Durchmesser mm', oder wie in Fig. 201, ab so grofs, dafs der Kreis über den Mittelpunct C des Kurbelkreises hinausgeht, so erhält man die excentrische Scheibe (Excentric); die Bläuelstange besteht in diesem Falle in einem Schubrechen BDB', welcher sich mit seinem (aus zwei Hälften zusammen zu schraubenden) Ringe DD' in einer im Umfange dieser Scheibe eingedrehten Kehle leicht, jedoch ohne zu schlottern, herum drehen läfst. Da die kreisrunde Scheibe DD' excentrisch auf der Achse C befestigt ist, so wird bei jeder ganzen Umdrehung dieser Scheibe der Schubrechen eben so, wie vorhin (in Fig. 200) die Bläuelstange eine auf und ab, oder (wie bei Dampfmaschinen zur Steuerung der Dampfschieber) hin und her gehende Bewegung erhalten, und sowohl für den Hin- als für den Hergang einen Weg $= 2\,AC$ zurücklegen.

Anmerkung. Obschon die Gröfse der hin und her gehenden Bewegung bei der excentrischen Scheibe lediglich von dem Abstande ihres Mittelpunctes A von der Umdrehungsachse C, womit diese fest verbunden ist, und keineswegs von der Gröfse der Scheibe selbst abhängt; so hat diese letztere gleichwohl auf die Gröfse der durch die am Umfange derselben entstehende Reibung absorbirten Arbeit oder des verlorenen Nutzeffectes einen wesentlichen Einflufs. Denn ist P die durch die Schubstange ausgeübte Kraft, also der dadurch zu überwindende Widerstand eben so grofs, der Abstand $AC = r$, folglich der ganze bei einem Hin- und Hergang zurückgelegte geradlinige Weg der Stange oder des Rechens, während einer Umdrehung der Scheibe $= 4r$, so ist sofort die Arbeit dieser Schubstange während dieser Umdrehung $= 4rP$. Der Betrag der am Umfange der Scheibe Statt findenden Reibung ist $= fP$, wenn f den Reibungscoefficienten bezeichnet, und da dieser während einer Umdrehung der Scheibe, deren Halbmesser (bis zur Kehle) $= R$ seyn soll, auf die Länge des Weges $2R\pi$ Statt findet (indem man annimmt, dafs sich die Stange ziemlich nahe mit sich selbst parallel hin und her bewegt), so ist die Arbeit der Reibung während einer Umdrehung $= 2R\pi fP$, so, dafs also der Bruch $\frac{2R\pi fP}{4rP} = 1{\cdot}57 f \frac{R}{r}$ das Verhältnifs zwischen dem Nutzeffect und der gleichzeitig von der Reibung absorbirten Arbeit angibt; ist z. B. $f = \frac{1}{8}$ und $R = 6r$, so wird dieses Verhältnifs wie $1 : 1{\cdot}18$, so, dafs also die Arbeit der Reibung schon gröfser als der Nutzeffect ist, und bei einer Zunahme von R noch weiter zunehmen mufs. Aus diesem Grunde soll man sich der excentrichen Scheibe nur bedienen, wenn der zu überwindende Widerstand P nicht sehr bedeutend ist.

Übrigens können die Excentrica, besonders wenn sie als Wellfüfse oder Hebeköpfe benützt werden, auch von andern Curven als dem Kreise begrenzt seyn, was besonders von der Bedingung abhängt, welche man an die Bewegungsart des Stückes BD (Fig. 200) knüpft; so benützt man in manchen Fällen die Herzlinie, in andern, wie wir bereits bei den Hebköpfen der Stampfwerke (§. 221) gesehen haben, die Kreisevolvente, noch in andern Fällen, wie bei der Bewegung von Blasbälgen, Blechscheren, Nietmaschinen u. s. w. wieder andere eigens hierzu construirte und mit einander combinirte krumme Linien.

§. 300. Umwandlung *der* **continuirlichen** *in die* **oscillirende** *Kreisbewegung.* Auch in diesem Falle verdient unter allen Anordnungen die Kurbel den Vorzug. Um nämlich den um O (Fig. 202) drehbaren oder oscillirenden Wagbaum (Balancier) BD durch die rotirende oder continuirliche Kreisbewegung der Welle oder Achse *C* in Bewegung zu setzen, befestigt man auf dieser Achse *C* eine Kurbel *CA*, und verbindet ihre Warze mit dem Endpuncte *B* des Balanciers gelenkartig durch eine Bläuelstange *AB*; dadurch wird bei jeder ganzen Umdrehung der Welle *C* der Balancier *BD* zwei Schwingungen machen.

Dieselbe Combination der Kurbel, Bläuelstange und des Wagbaumes kommt z. B. auch bei dem mit einem Fufstritte versehenen Schleifsteine, dem Spinnrade, der Drehbank u. s. w. vor, wobei der Tritt (das Pedal) den Balancier ersetzt, und wobei also gerade die umgekehrte Verwandlung, nämlich die oscillirende in die rotirende Bewegung Statt findet.

§. 301. Verwandlung *der kreisförmig* **oscillirenden** *in eine kreisförmig* **continuirliche** *Bewegung.* Aufser der vorigen Combination des Balanciers, der Bläuelstange und der Kurbel, dient in diesem Falle auch noch besonders ein in einem um *O* (Fig. 203) drehbaren Hebel *AB* bei *c* eingehängter Schiebhaken *ra*, welcher in die sägartig gebildeten Zähne eines eisernen, um die Achse *C* drehbaren Rades eingreift, und so bei jeder Ocillation oder Auf- und Abbewegung des Hebels, das Rad um einen Zahn fortschiebt; um zu verhindern, dafs beim Zurückgehen oder Aufheben des Schiebhakens nicht auch das Rad *CA* zurückgehe, bringt man noch einen sogenannten Sperrkegel *N* an.

Da aber bei dieser Anordnung die Bewegung nur ruckweise Statt findet, so bringt man, um diese continuirlicher zu machen, öfter auch zwei solche Schiebhaken, und zwar (Fig. 204) in der Art an, dafs immer der eine wirksam ist, während der andere leer zurückgeht.

Anmerkung. Man sieht von selbst, dafs durch dieses System keine continuirliche, sondern nur eine intermittirende und (wodurch es eben fehlerhaft ist) stofsweise Kreisbewegung erzeugt wird. Die Anwendung desselben kann daher nur dort, wo eine ähnliche Bewegung, wie z. B. bei den Sägemühlen, wo man sich eines solchen Schieb- oder Stofsrades zur Fortführung des mit den zu sägenden Holzblöcken versehenen Wagens bedient, gerechtfertigt werden, wo diese ruckweise Bewegung gerade nothwendig und gleichsam vorgezeichnet, und aufserdem der dadurch zu überwindende Widerstand nicht sehr bedeutend ist.

§. 302. Verwandlung *der* **geradlinigen hin und her gehenden** *Bewegung in eine* **oscillirende Kreisbewegung** *und umgekehrt.* Das beste in diesen beiden Fällen anzuwendende System ist das von Watt angegebene, welcher sich desselben bei seiner Dampfmaschine bediente, um die auf und ab gehende geradlinige Bewegung des Kolbens in eine continuirliche rotirende zu verwandeln, wodurch er eben seine Maschine für alle möglichen industriellen Zwecke anwendbar machte.

Ist DB (Fig. 202) der um O oscillirende Balancier, und sollte dieser seine Bewegung durch die in D eingehängte Kolbenstange DE erhalten, so würde, da der Punct D bei diesen Oscillationen einen Kreisbogen vom Halbmesser OD beschreibt, die Kolbenstange DE von der verticalen Richtung abgelenket, und die bei Dampfmaschinen (bei welchen die Kolbenstange durch eine dicht schliefsende Stopfbüchse gehen mufs) so nothwendige genaue Bewegung in einer geraden Linie unmöglich werden. Watt erfand nun zur Beseitigung dieser Unzukömmlichkeit das sogenannte articulirte Parallelogramm, welches daher auch das Watt'sche heifst, und im Wesentlichen in Folgendem besteht.

§. 303. Watt'sches Parallelogramm. Ist AO (Fig. 205) die halbe Länge des um O schwingenden Balanciers, und sind AO, $A'O$, $A''O$ die höchste, mittlere und tiefste Stellung desselben, wobei die mittlere $A'O$ horizontal genommen wird, so verbindet man damit das articulirte Parallelogramm ac, dessen Seiten in den Winkelpuncten A, a, b, c drehbar oder beweglich sind, ferner verbindet man mit dem Puncte a die Kolbenstange, welche in der verticalen Linie DE auf und ab gehen soll. Damit nun dieser Punct a auch in den beiden andern der genannten Stellungen $A'O$ und $A''O$ des Balanciers in dieser Geraden DE bleiben, und die Lage a' und a'' annehmen kann, so mufs der Punct b, welcher in den beiden eben genannten Stellungen nach b' und b'' kommt, einen Kreisbogen beschreiben, dessen Mittelpunct C gefunden wird, wenn man nach der bekannten Methode durch die drei Puncte b, b', b'' (die man erhält, indem man in den drei genannten Lagen des Balanciers das Parallelogramm ac construirt, und dabei die Puncte a, a', a'' in der Geraden DE annimmt) einen Kreis zieht, wovon der Mittelpunct C sofort in der durch b' mit $A'O$ geführten Parallelen liegt, und mit dem gesuchten zusammenfällt.

Wird also der Punct b des Parallelogramms mit einer um C drehbaren Stange Cb verbunden, so beschreibt der Punct a bei der oscillirenden Bewegung des Balanciers ziemlich genau die gerade Linie DE, und es findet nur in den Zwischenpuncten oder Intervallen aa' und $a'a''$, wie es die Fig. 205, a zeigt, eine kleine Abweichung nach rechts und links Statt, welche jedoch bei einer zweckmäfsigen Construction im

Maximum so gering ist, dafs mn **nicht mehr als** $\frac{1}{10}$ **bis** $\frac{15}{100}$ **Zoll beträgt.**

Um aber diese Abweichung wirklich so klein zu machen, hat man bei dieser angegebenen Construction noch Folgendes zu beobachten: erstens soll die gerade Linie DE, in welcher sich die Kolbenstange bewegen soll, den Abstand $A'B$ (Fig. 205, b) des Punctes A' von der Sehne AA'' halbiren, also $A'c = cB$ seyn; zweitens soll AO wenigstens $1\frac{1}{2}$ Mal so lang als diese Sehne AA'', welche sehr nahe dem Kolbenhub gleich ist, seyn; drittens wählt man die Seite Aa des Parallelogrammes so, dafs der Befestigungspunct a mit der Kolbenstange bei der höchsten Stellung AO des Balanciers in die horizontale $A'O$, nämlich nach r fällt (was in der Zeichnung Fig. 205 absichtlich nicht beobachtet ist), und endlich viertens soll die mittlere Stellung des Balanciers in dieser eben genannten horizontalen Linie liegen, durch diese also der Winkel AOA'' der höchsten und niedrigsten Stellung halbirt werden.

Was die Länge der Seite AC betrifft, so ist diese willkürlich, und hängt davon ab, ob man den Punct C weiter oder näher gegen DE erhalten will, denn die Gegenlenkstange Cb wird um so kürzer, je näher die Seite bc gegen den Mittelpunct O liegt, was oft dort, wo man an Raum sparen mufs, zu berücksichtigen kommt.

Übrigens ist der Punct a des Parallelogramms nicht der einzige Punct, welcher eine gerade Linie beschreibt, sondern es geht dabei auch der Durchschnitt d der Horizontalen $A'O$ mit der Seite Cb (Fig. 206), (welcher bei der höchsten Stellung des Balanciers entsteht) in einer geraden Linie auf und ab, die mit der vorigen DE parallel ist, so, dafs man auch in den Punct d eine Kolbenstange einhängen kann, wenn sich diese ebenfalls in gerader Linie bewegen soll.

Den Drehungspunct C (Fig. 207) für die Lenkstange Cb findet man einfach durch folgende Construction. Sind AO, $A'O$, $A''O$ wieder die drei Stellungen des um O oscillirenden Balanciers, ist DE die Gerade, nach welcher sich die Kolbenstange bewegen soll, und ist Ab die beizubehaltende Seite des Parallelogrammes, die man beliebig wählen kann, und d der Einhängpunct der Kolbenstange; so durchschneide man die Gerade DE aus den Puncten A' und A'' mit dem Halbmesser Ad, wodurch man die Puncte d', d'' erhält, in welchen sich der Punct d in den beiden übrigen Stellungen des Balanciers befindet; zieht man ferner die Geraden $A'd'$ und $A''d''$, und macht die Verlängerungen $d'b' = d''b'' = db$, so erhält man die Puncte b' und b'', in welchen sich in diesen beiden letztgenannten Lagen des Balanciers der Punct b befindet; legt man endlich durch diese drei Puncte b, b', b'' einen Kreisbogen, so fällt dessen Mittelpunct mit dem gesuchten Puncte C zusammen.

Man läfst auch öfter die drei Seiten ab, ae, ec (Fig. 208) des Parallelogrammes weg, und behält davon blofs die eine Seite bc mit einem Gegenlenker Cb bei. Um in diesem Falle den Mittelpunct oder die Achse C dieser Lenkstange zu finden, wird man, wenn AO, $A'O$, $A''O$ (Fig. 208, a)

wieder die drei genannten Stellungen des um O schwingenden Balanciers sind, und die Länge Ab ($= cb$ in Fig. 208), so wie der Einhängpunct d der Kolbenstange gegeben sind, um zuerst die beiden andern (den Stellungen $A'O$, $A''O$ entsprechenden) Positionen b', b'' des Punctes b zu finden, aus A' und A'' mit dem Halbmesser Ad die durch d gehende Verticallinie de in den Puncten d' und d'' (die zwei übrigen Lagen des Punctes d) durchschneiden, die Geraden $A'd'$, $A''d''$ ziehen, und ihre Verlängerungen $d'b' = d''b'' = db$ machen, und dann, nachdem diese Puncte gefunden sind, durch die drei Puncte b, b', b'' einen Kreisbogen ziehen, dessen Mittelpunct C sofort der gesuchte Schwingungspunct für den Gegenlenker Cb ist.

§. 304. In manchen Fällen benützt man eine um eine Achse C drehbare Stütze OC (Fig. 209), auf welcher das Lager für die Achse O des Balanciers AB liegt, hängt, wenn AO die höchste, $A'O$ die mittlere (horizontale) und $A''O$ die niedrigste Stellung des Balanciers und DE wieder die Gerade ist, in welcher die Kolbenstange auf und ab gehen soll, diese letztere in den Punct A ein, und bringt eine Lenkstange cb (die natürlich wieder doppelt seyn mufs, damit der Balancier davon gabelförmig umfafst werde) an, welche sich in den Puncten c und b, wobei $Ab = bc$ ist, drehen kann.

Zur Bestimmung des Drehungpunctes C der Stütze darf man nur auf der horizontalen $A'O$ mit dem Halbmesser AO aus A' den Punct a abschneiden, d. i. $A'a = AO$ machen, und aus den beiden Puncten O und a mit einer beliebigen Entfernung (die übrigens durch andere Umstände bedingt seyn kann) $OC = aC$ Kreisbögen beschreiben, wodurch sich dieser Punct C ergibt; je gröfser man dabei diese Entfernung OC machen kann, desto genauer wird die Kolbenstange, welche jedenfalls mit dieser Geraden die drei Puncte A, A', A'' gemein hat, in der Geraden DE auf und ab gehen. Kann man OC nicht lang genug machen, so mufs man wenigstens AO vergröfsern, um die Winkel $AOA' = A'OA''$ zu verkleinern.

Endlich bringt man bei kleinen Druckpumpen, wie sie z. B. bei hydraulischen Pressen vorkommen, und wobei der Kolbenhub nur gering ist, den um O oscillirenden Druckhebel AO (Fig. 210) mittelst eines gabelförmigen Gelenkes ac, wovon der Drehungspunct a in dem Bügel des Kolbens liegt, und c den Einhängpunct des Hebels bildet, mit der Kolbenstange, welche oben durch eine cylinderische Fortsetzung in einer Hülse geführt wird, in Verbindung, und bewirkt dadurch mit hinlänglicher Genauigkeit die geradlinige Bewegung des Kolbens.