Wird ein Seil zum Fortziehen einer Last, z. B. eines Schiffes mit einem Ende B (Fig. 47) an die Last Q befestigt, und wirkt am andern Ende A eine Zugkraft P; so bildet das Seil eine Kettenlinie ANB. Zieht man in A und B die Tangenten AD, BD und durch ihren Durchschnittspunct D die verticale Linie CD, so ist, wenn G das Gewicht des Seils bezeichnet, da P die Spannung des Seils in A ist:

$$P : G = \sin CDB : \sin ADB.$$

Soll das Seil nach der geraden Linie BA ausgespannt werden, so mufs der Winkel CDB in einen rechten Winkel übergehen oder $= 90$, und jener $ADB = 180$ Grad werden; dafür wird $\sin CDB = 1$ und $\sin ADB = 0$, folglich ist $P : G = 1 : 0$, und daraus $P = \frac{G}{0} = \infty$, d. h. entweder müfste das Seil kein Gewicht haben, oder die Kraft P müfste unendlich grofs seyn; da nun in der Wirklichkeit keines von beiden Statt findet, so läfst sich auch, wenn die Zugkraft horizontal wirkt, das Seil niemals in eine mit dieser Richtung zusammen fallende gerade Linie ausspannen. Eben so wenig ist diefs auch für eine nicht horizontale Gerade möglich, weil dabei immer wieder $\sin ADB = 0$ werden müfste, während $\sin CDB$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt; nur für eine verticale Linie ist dieses anders.

Fünftes Kapitel.

Von dem Gleichgewichte bei Maschinen, Satz der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 71. Erklärungen. Jede Vorrichtung, mittelst welcher eine Kraft auf einen aufserhalb ihrer Richtung liegenden Punct fortgepflanzt oder wirksam gemacht wird, um dort einen gewissen Widerstand zu überwinden oder überhaupt irgend eine Arbeit zu verrichten, welches der Kraft, wenn sie unmittelbar auf diesen Punct wirken müfste, schwer oder gar nicht möglich wäre, pflegt man eine Maschine zu nennen. Dabei ist eine scharfe Gränzlinie zwischen Werkzeugen, Instrumenten und Maschinen weder möglich noch auch nothwendig, und man richtet sich in der Benennung derselben gewöhnlich nach dem Sprachgebrauche.

Der mit einer Maschine zu überwindende Widerstand heifst gewöhnlich die Last; da aber auch diese, z. B. wenn sie in einem zu hebenden Gewichte besteht, als Kraft dienen kann, so sind Kraft und Last bei einer Maschine mehr in ihrer Benennung und ihrer relativen Beziehung als in ihrem Wesen verschieden, daher nennt man die Last auch manchmal die Gegenkraft. Diese mufs für das statische Gleichgewicht der Maschine, welches wir hier zu untersuchen haben, mit der Kraft in einem bestimmten Verhältnifs stehen, und wenn dieses auch, wie wir weiter unten sehen werden, von jenem Verhältnifs in etwas verschieden ist, welches bei der Bewegung der Maschine oder dem sogenannten dynamischen Gleichgewichte eintritt, wo auch die Nebenhindernisse, wie die Reibung u. s. w. in Betracht kommen, so bildet es gleichwohl die Grundlage auch für das Verhältnifs zwischen Kraft und Last beim dynamischen Gleichgewichte.

Je nach dem Zwecke der zu verrichtenden Arbeit gibt es auch unzählig verschiedene Maschinen; bei den meisten derselben kommen einzelne Bestandtheile vor, die selbst wieder als Maschinen angesehen werden können, und eine derartige Maschine heifst eine zusammengesetzte Maschine, im Gegensatze von den einfachen Maschinen, wo keine solchen Bestandtheile vorkommen.

Obschon sich streng genommen alle einfachen Maschinen zuletzt auf den Hebel und die schiefe Ebene zurückführen lassen, so nimmt man doch gewöhnlich sechs einfache Maschinen an, nämlich den Hebel, die Rolle, das Rad an der Welle, die schiefe Ebene, den Keil und die Schraube (wozu noch manchmal eine siebente: die Seilmaschine gerechnet wird), von diesen reducirt sich die zweite und dritte auf den Hebel, und die fünfte und sechste auf die schiefe Ebene.

Im Nachstehenden sollen sowohl diese sechs einfachen, als auch einige der damit in Verbindung stehenden wichtigsten zusammengesetzten Maschinen behandelt werden.

Der Hebel.

§. 72. Mathematischer und physischer Hebel. Unter einem mathematischen Hebel versteht man eine gewichtlose, unbiegsame krumme, gerade oder gebrochene Linie, welche sich um einen ihrer Puncte (Stütz-, Drehungspunct oder Hypomochlion) drehen läfst, und auf welche zwei oder mehrere Kräfte in der Art wirken, dafs sie eine Drehung derselben um diesen festen Punct zu bewirken suchen.

Vertauscht man die mathematische Linie mit einer physischen schweren Linie (welche zugleich recht gut jede Stange, woraus ein wirklicher Hebel besteht, darstellen kann), so erhält man den physischen oder materiellen Hebel. Da die Gesetze für den mathematischen Hebel einfacher zu entwickeln, und sodann sehr leicht mit geringen Hinzufügungen auf den physischen Hebel zu übertragen sind; so wird bei den folgenden Untersuchungen immer der erstere vorausgesetzt.

§. 73. Gleichgewichtsbedingungen für den mathematischen Hebel. Es sey ACB (Fig. 48) ein Hebel, dessen Drehungspunct C ist, und auf welchen in den Puncten A und B die beiden Kräfte P und Q in den angedeuteten Richtungen wirken; so mufs, weil für das Gleichgewicht die Resultirende aus beiden Kräften aufgehoben oder unwirksam gemacht werden mufs, diese nothwendig durch den festen Drehungs- oder Stützpunct C gehen. Damit aber dieses Satt finden kann, müssen der Punct C und die beiden Kräfte (d. h. ihre Richtungen) in einer und derselben Ebene liegen.

Verlängert man daher, wenn die Kräfte nicht parallel sind, ihre Richtungen bis zum Durchschnitt D, so mufs die Resultirende durch die Puncte D und C gehen, wodurch sofort ihre Lage bestimmt ist. Nach §. 19 (Gl. 1) ist aber, wenn man aus dem Puncte C auf die Richtungen der Kräfte P und Q die Perpendikel Ca und Cb fällt, $P : Q = Cb : Ca$, oder wenn man $Ca = p$ und $Cb = q$ setzt, auch

$$P : Q = q : p, \text{ oder } Pp = Qq \quad \ldots (1$$

die Perpendikel p und q heifsen die Hebelsarme der Kräfte P und Q. (Häufig nennt man auch die Theile AC, BC des Hebels selbst so.)

Diese Relation folgt noch einfacher aus §. 30, wenn man C als Mittelpunct der statischen Momente nimmt, und aus diesem Puncte die Perpendikel p und q auf die Richtungen der Kräfte P und Q fällt, indem dann, weil die Kräfte den Hebel um C nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, die statischen Momente derselben (Gl. 2, wo $r = o$ ist) einander gleich seyn müssen.

Anmerkung. Sind die Kräfte parallel, so dafs sich also ihre Richtungen nicht durchschneiden, so bezieht man sich auf die mit jener zweiten im §. 30 ganz analogen Gleichung (2 im §. 33, um die Giltigkeit der obigen Relation (1 auch für diesen Fall zu erweisen.

§. 74. Sollen also zwei Kräfte auf einen Hebel im Gleichgewichte stehen, so müssen ihre Richtungen mit dem Drehungspuncte des Hebels in derselben Ebene liegen, diese sich verkehrt wie ihre Hebelsarme verhalten, oder was dasselbe ist, gleiche statische Momente in Beziehung auf den Drehungspunct besitzen und zugleich den Hebel nach entgegen gesetzten Richtungen zu drehen suchen.

Ist Q der durch die Kraft P zu überwindende Widerstand, so wird Q gewöhnlich die Last genannt, und man findet die hierzu nöthige Kraft aus der Gleichung $P = \frac{Qq}{p}$, wobei eine Kraftersparung nur dann eintritt, wenn $\frac{q}{p} < 1$, also $q < p$ ist.

Der auf den Stütz- oder Drehungspunct C Statt findende Druck wird durch die Gerade CD ausgedrückt, wenn Cn, Cm mit den Richtungen der Kräfte parallel gezogen werden, und Dm und Dn die Kräfte P und Q darstellen.

§. 75. Eintheilung des Hebels in drei Arten. Je nach der Lage des Stütz- oder Drehungspunctes theilt man den Hebel in einen Hebel der ersten Art, wenn der Drehungspunct C, wie in Fig. 49, zwischen dem Angriffspunct der Kraft P, und jenem der Last Q liegt; in den Hebel der zweiten Art, wenn der Angriffspunct der Last, wie in Fig. 50, zwischen dem Drehungspuncte und dem Angriffspuncte der Kraft, und endlich in den Hebel der dritten Art, wenn, wie in Fig. 51, der Angriffspunct der Kraft zwischen jenem der Last und dem Drehungspuncte liegt. Der Hebel der ersten Art wird auch ein zweiarmiger, jener der zweiten und dritten Art dagegen ein einarmiger Hebel genannt. Ein Hebel von der in Fig. 52 oder 53 dargestellten Form heifst ein Winkelhebel.

Aus der Ableitungsart der Relation (1 in §. 73 folgt von selbst, dafs diese Relation in allen hier angeführten Fällen oder Modificationen des Hebels gilt und richtig ist, so, dafs, wenn man in allen diesen Fällen aus dem Drehungspuncte C auf die Richtungen der Kräfte P und Q perpendikuläre Linien zieht, und ihre Längen beziehungsweise durch p und q bezeichnet, allgemein 1) . . . $Pp = Qq$, oder $P : Q = q : p$ Statt findet.

Anmerkung. Beim Hebel der zweiten Art ist in der Regel $Q > P$, also eine Kraftersparung, beim Hebel der dritten Art, $Q < P$, also ein Kraftverlust (dagegen ein Gewinn an Geschwindigkeit bei der wirklichen Bewegung) vorhanden.

Denkt man sich den Hebel in Bewegung, so beschreibt der Angriffspunct der kleinern Kraft in demselben Verhältnifs den gröfsern, und jener der gröfsern Kraft den kleinern Weg; will man also an Kraft ersparen, so mufs man ihr den gröfsern Weg zurücklegen lassen; will man dagegen durch eine vorhandene hinreichend grofse Kraft der geringern Last einen grofsen Weg in derselben Zeit zurücklegen lassen, so mufs man die Kraft nahe an dem Drehungspunct anbringen, wie diefs z. B. sehr weise bei der Bewegung des menschlichen Vorderarms durch die Muskelkraft der Fall ist.

Der Hebel kommt sowohl im gemeinen Leben als in den Künsten und Gewerben unter tausenderlei Formen und Anwendungen vor; um nur einige Fälle aufzuzählen, so gehören der Hebbaum, die Brechstange, der Geisfufs, die Wage, Schere, Zange, der Lochbeutel der Tischler (ein Stemmeisen), der Schwengel bei Pumpen u. s. w. zu dem Hebel der ersten Art; der Schubkarren, zweiräderige Wagen, die Blechschere, das Ruder, der Limonienpresser, der Hebel bei einer Handfeuerspritze oder Druckpumpe u. s. w. zum Hebel zweiter Art, wozu auch noch der Schlüssel und Handgriff am Bohrer gezählt werden können; so wie endlich die Schaufel, Sense, Schafschere, Zuckerzange, Feuerzange, der Tritt am Spinnrade, der Vorderarm des Menschen u. s. w. zum Hebel der dritten Art.

§. 76. Aufgaben u. Beispiele über den Hebel.

1. Wenn bei einem Winkelhebel (Fig. 53), z. B. an einem Glockenzuge, der zu überwindende Widerstand $Q = 10$ Pfund ist, wie grofs mufs die damit im Gleichgewichte stehende Kraft P seyn?

Fällt man aus dem Drehungspuncte C auf die Richtungen der Kräfte P und Q die Perpendikel Ca und Cb, und findet man z. B. durch Abmessung $Ca = 4$ und $Cb = 6$ Zoll (oder einer andern beliebigen Einheit), so ist §. 73, Gl. 1. $P : Q = 6 : 4 = 3 : 2$, oder $2P = 3Q = 3 \,.\, 10 = 30$, also $P = \frac{30}{2} = 15$ Pfund.

Obschon hier die Kraft gröfser als der Widerstand seyn mufs, so kann man vielleicht dennoch diese Einrichtung wählen wollen, um dem Angriffspuncte der Last eine gröfsere Bewegung mitzutheilen; denn wird z. B. der Punct A um 10 Zoll herabgezogen, so bewegt sich der Punct B nahe in seiner Richtung schon um 15 Zoll. (Dabei ist $P \,.\, 10 = Q \,.\, 15$, nämlich das Product aus der Kraft in ihrem Wege ist gleich dem Producte aus der Last in ihrem Wege.)

2. Für den Hebel AB (Fig. 54), an welchem zwei parallele Kräfte P und Q nach einerlei Richtung wirken, den Stütz- oder Drehungspunct zu finden.

Ist die gegebene Entfernung $AB = a$, so ist (§. 73, Anmerk.) $P : Q = BC : AC$, also auch $P : P + Q = BC : AB$, woraus $BC = a \dfrac{P}{P+Q}$ (1 folgt. Eben so findet man $AC = a \dfrac{Q}{P+Q}$ .. (1'.

Wirken die parallelen Kräfte P und Q (Fig. 55) nach entgegengesetzten Richtungen und ist $Q > P$, so liegt der Drehungspunct C in der Verlängerung von AB gegen B hin, und man hat wieder $P : Q = BC : AC$, oder auch $P : Q - P = BC : AB$, woraus $BC = a \dfrac{P}{Q - P}$ folgt.

Wäre dagegen $P > Q$, so müfste der Drehungspunct C' in der Verlängerung von BA gegen A hin liegen, und man hätte $P : Q = BC' : AC'$,

also auch $P : P - Q = BC' : AB$, woraus $BC = a \frac{P}{P - Q}$ wäre.
Für alle diese Fälle erhält man jedoch BC weit einfacher aus der vorigen Formel (1, in welcher man nur Q gegen P negativ oder mit dem Zeichen Minus nehmen darf; denn damit folgt aus (1 $BC = a \frac{P}{P - Q}$. Ist nun $P > Q$, so fällt BC positiv aus, und der Punct C (oder in der Figur C') liegt eben so von rechts gegen links, wie es für die obige Formel (1 der Fall ist. Ist dagegen $P < Q$, so wird $BC = - a \frac{P}{Q - P}$ negativ, zum Zeichen, daſs jetzt der Punct C die entgegengesetzte Lage hat, und von links gegen rechts liegt.

Für den besonderen Fall von $P = Q$ wird $BC = \infty$, d. i. unendlich groſs, zum Zeichen, daſs hier durch gar keinen Stützpunct (übereinstimmend mit §. 21, Anmerk.) ein Gleichgewicht hergestellt werden kann.

3. Auf einem horizontal auf seinen Endpuncten A und B (Fig. 56) aufliegenden Hebel AB ruht eine Last Q, deren Schwerpunct in O ist; welchen Druck erleiden dabei die Stützen in A und B?

Schneidet die aus O gezogene lothrechte Linie, die hier zugleich auf AB perpendikulär ist, AB im Puncte C, und bezeichnet man die gesuchten Pressungen in A und B durch P und P'; so ist (wenn man B als Drehungspunct ansieht) $P : Q = BC : AB$, und daraus $P = Q \frac{BC}{AB}$ . . . (3. Eben so ist (wenn man A als Drehungspunct nimmt) $P' = Q . \frac{AC}{AB}$ . . . (3', beide Drücke zusammen geben, wie es seyn soll $P + P' = Q$.

Liegt der Hebel schief, wie es z. B. der Fall ist, wenn mittelst desselben eine Last über eine Anhöhe hinauf oder herabgetragen wird; so schneidet die durch den Schwerpunct O der Last gezogene lothrechte Linie den Hebel AB (Fig. 57) in einem Puncte C zwischen dem Fuſspuncte c des Perpendikels Oc und dem Puncte A (während vorhin C mit c zusammenfiel), wodurch nun in den vorigen Formeln 3) und 3') BC, also auch P gröſser, und AC, daher auch P' kleiner ausfällt, als wenn der Hebel horizontal liegt, so, daſs also durch diese schiefe Lage der tiefer stehende Träger in Nachtheil kommt.

§. 77. Gleichgewicht am Hebel, wenn auf diesen mehr als zwei Kräfte wirken. Wirken auf den Hebel AB (Fig. 58), dessen Drehungspunct C ist, die drei Kräfte S, S', S'' nach beliebigen Richtungen (übrigens mit C in einerlei Ebene), und fällt man aus dem Drehungspuncte C auf ihre Richtungen die Perpendikel s, s', s''; so kann man sich die Kraft S'', welche den beiden übrigen, die den Hebel nach einerlei Richtung zu drehen suchen, das Gleichgewicht halten mufs, in zwei parallele (an demselben Puncte B wirksame) Kräfte p und q zerlegt denken, so, dafs also $S'' = p + q$ ist, wovon die eine z. B. p, mit S und die andere q mit S' im Gleichgewichte steht.

Nun ist aber nach dem Satze des Hebels für zwei Kräfte (§. 74) $Ss = ps''$ und $S's' = qs''$, also wenn man diese Gleichungen addirt,

$$Ss + S's' = (p+q)\,s'' = S''s''.$$

Durch Wiederholung dieser Schlüsse erhält man für das Gleichgewicht von jeder beliebigen Anzahl von Kräften, welche auf den Hebel wirken, den allgemeinen Satz, dafs die Summe der statischen Momente (diese auf den Drehungspunct des Hebels bezogen) jener Kräfte, welche den Hebel nach einer Richtung drehen wollen, gleich seyn mufs der Summe der statischen Momente der übrigen Kräfte, welche ihn also nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen suchen.

Beispiel. Wirken auf den geradlinigen Hebel AB (Fig. 59) in den Puncten A, D, F, B die Kräfte von 20, 5, 10 und 8 Pfund senkrecht nach den angedeuteten Richtungen, und soll für das Gleichgewicht der Drehungspunct desselben gefunden werden, wenn die Abstände $AD = 4$, $DE = 6$ und $EB = 2$ Fufs betragen; so setze man den Abstand des gesuchten Punctes C von A, d. i. $AC = x$; so wird $CD = x - 4$, $CE = 10 - x$, $BC = 12 - x$, und daher nach dem eben entwickelten Satze

$$20x = 5(x-4) + 10(10-x) + 8(12-x),$$

aus welcher Gleichung $x = 5\frac{1}{3}$ Fufs folgt, so, dafs also der Punct wirklich, wie man vorläufig angenommen hat, zwischen D und E liegt. Hätte man diesen Punct C zwischen E und B angenommen, so wäre $CD = x - 4$, $CE = x - 10$, $CB = 12 - x$, und die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht:

$$20x + 10(x-10) = 5(x-4) + 8(12-x)$$

(weil jetzt die beiden Kräfte von 20 und 10 den Hebel um C nach der einen, jene 5 und 8 aber nach der andern zu drehen suchen), woraus man nichts desto weniger wieder $x = 5\frac{1}{3}$ Fufs, wie vorhin findet; es ist also völlig gleichgiltig, in welchem Puncte der Geraden AB man vorläufig den gesuchten Drehungspunct annimmt.

2. Art. Nimmt man nicht den Drehungspunct C selbst, sondern irgend einen in der Geraden AB oder ihrer Verlängerung liegenden Punct O als Mittelpunct der statischen Momente, und denkt sich den gesuchten Drehungspunct als Angriffspunct der Resultirenden R der gegebenen parallelen Kräfte, also $R = 20 + 10 + 8 - 5 = 33$; so hat man, wenn z. B. $AO = 3$,

also $DO = 7$, $EO = 13$, $BO = 15$ ist, und wenn man $OC = x$ setzt (§. 33):

$$33x = 3.20 + 13.10 + 15.8 - 7.5 = 60 + 130 + 120 - 35 = 275,$$

u. daraus $x = 8\frac{1}{3} = 3 + 5\frac{1}{3}$, wodurch der Punct C genau wieder der vorige ist.

§. 78. Gleichgewicht beim physischen oder materiellen Hebel. Mit Hilfe des Satzes im vorigen Paragraphe ist es nun auch leicht, die für den mathematischen Hebel abgeleiteten Relationen auf den wirklichen oder materiellen zu übertragen; denn sieht man das Gewicht des Hebels als eine in seinem Schwerpuncte (den man nach dem Kapitel III bestimmen wird) nach lothrechter Richtung wirkende Kraft an, und bringt diese mit den übrigen auf den Hebel wirkenden Kräften in Verbindung, so kann man diesen als einen mathematischen Hebel ansehen und behandeln.

Beispiel. Um z. B. den Druck zu bestimmen, welchen der um einen in C angebrachten runden Bolzen drehbare horizontale Hebel AC (Fig. 60) auf das Sicherheitsventil V eines Dampfkessels ausübt, wenn der Druck auf das Ventil vom Puncte B des Hebels ausgeht, und im Puncte A desselben ein Gewicht $= P$ aufgehängt ist; ziehe man die Gerade AC, wo C der Mittelpunct des Kreises ist, welcher dem Querschnitt des Bolzens gleich ist, durchschneide diese in B durch die lothrechte Linie, welche durch den Mittelpunct des Ventils geht (wenn dieser Punct B nicht schon am Hebel selbst gegeben seyn sollte) und bestimme auch noch das Gewicht des Hebels $= G$, und dessen Schwerpunct O. Bezeichnet man den gesuchten Druck auf das Ventil durch Q, so ist dieser eben so grofs, als eine in B angebrachte, nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft Q zur Herstellung des Gleichgewichtes seyn müfste, wofür aber (vor. Paragraph) $Q . CB = P . AC + G . OC$ Statt finden mufs, aus welcher Gleichung sofort der gesuchte Druck Q sehr leicht bestimmt wird.

Wäre z. B. $P = 10$ und $G = 2$ Pfund, $CB = 2$, $CA = 18$ (also der Hebel, wie man sagt $\frac{18}{2} = 9$ Mal übersetzt), und $OC = 8$ Zoll; so wäre nach der vorigen Gleichung $2Q = 18 . 10 + 8 . 2 = 196$, also der Druck auf das Ventil $Q = 98$ Pfund.

Hätte man früher das Gewicht G des Hebels auf den Aufhängpunct A reducirt, so würde dieser mit der Gröfse

$$(x . AC = G . OC)\ x = G\frac{OC}{AC} = \tfrac{4}{9}\ G = \tfrac{8}{9}\ \text{Pfund}$$

auf diesen Punct gewirkt, und das Aufhänggewicht P um eben so viel vergröfsert, also auf $10\frac{8}{9}$ Pfund gebracht haben; dadurch wäre, den Hebel nun als einen mathematischen angesehen, $2Q = 18 \times 10\frac{8}{9} = 180 + 16 = 196$, und daraus wie zuvor $Q = 98$ Pfund gefunden worden.

Anmerkung. In der Anwendung wird man also, anstatt den Hebel abzuwägen, und dessen Schwerpunct zu suchen, einfacher den Druck bestimmen, welchen der leere Hebel, wenn er in C eingehängt und horizontal gehalten wird, im Puncte A auf eine Wage (der im vorigen Beispiele zu $\frac{8}{9}$ Pfund wäre gefunden worden) ausübt, und diesen noch zu dem Aufhängpuncte P hinzu addiren.

§. 79. Zusammengesetzter Hebel. Werden zwei oder mehrere Hebel so mit einander verbunden, dafs die Kraft für den einen, als Last für den andern Hebel erscheint; so heifst eine solche Verbindung, die man gewöhnlich dann anbringt, wo ein einfacher Hebel zu lang seyn müfste — ein zusammengesetzter Hebel; dabei sind die Gesetze für das Gleichgewicht dieselben, wie für den einfachen Hebel, welche man nur wiederholt anwenden darf.

Ist bei dem zusammengesetzten Hebel in Fig. 61 $AC = a$, $BC = b$, $ac = a'$ und $bc = b'$, und wirkt am ersten Hebel im Puncte B die Last Q, und am zweiten in a die Kraft P; so ist, wenn die am ersten Hebel in A für das Gleichgewicht nöthige Kraft P' heifst:

am ersten Hebel $P' : Q = b : a$

„ zweiten „ $P : P' = b' : a'$

und durch Zusammensetzung $P : Q = bb' : aa'$,

also verhält sich bei dieser (auf Kraftersparung abgesehenen) Einrichtung die Kraft zur Last, wie das Product der kürzern, zu dem Producte der längern Hebelsarme, ein Satz, welcher sofort für jede beliebige Anzahl von in dieser Art mit einander verbundenen einfachen Hebeln seine Giltigkeit behält.

Ist z. B. im vorliegenden Falle $a = 10$, $b = 2$, $a' = 8$ und $b' = 1$, so ist $P : Q = 2 : 80 = 1 : 40$; es kann also eine Kraft von 1 Pfund einer Last von 40 Pfund das Gleichgewicht halten. Handelt es sich aber um wirkliche Bewegung, so mufs, wie leicht zu sehen, die Kraft schon einen Weg von z. B. 40 Zoll beschreiben, bis die Last einen Weg von 1 Zoll zurücklegt (analog mit der Bemerk. in §. 75 und 76).

Bei dem in Fig. 61, a dargestellten Wagenheber, welcher beim Schmieren der Radachsen zum Lüften der Räder gebraucht wird, und aus einem zusammengesetzten Hebel AD, DB besteht, wovon der erstere als Hebel der ersten Art seinen Drehungspunct in C, Angriffspunct der Kraft in A und der Last in D, der letztere, als Hebel der zweiten Art, seinen Stützpunct in B, Angriffspunct der Kraft in D und der Last in E hat (auf welchen Punct sich der Achsenstock des Wagens stützt), ist, wenn $\frac{DE}{DB} = \frac{1}{3}$ und $\frac{CD}{AC} = \frac{9}{60}$ ist, sofort $P : Q = 9 : 180 = 1 : 20$.

Es kann also, wenn die zu hebende Last etwa 4 Centner beträgt, ein Mensch mit einer Kraft von $\frac{400}{20} = 20$ Pfund, indem er den Hebel AD in A niederdrückt, diese Last bequem aufheben oder lüften.

Einige besondere Anwendungen des Hebels.

§. **80.** Von den unzähligen Anwendungen, welche der Hebel, wie wir bereits im §. 75 bemerkt haben, im practischen Leben findet, sollen noch einige der vorzüglichsten und wichtigsten in den nächstfolgenden Paragraphen in Kürze behandelt werden.

Die Krämerwage.

§. **81. Erklärung.** Die Krämerwage, mittelst welcher das Gewicht einer Waare durch ein gleich grofses Gegengewicht gefunden wird, besteht im Wesentlichen aus einem gleicharmigen Hebel AB (Fig. 62), dem Wagbalken, an dessen Endpuncten A und B die Schalen, wovon die eine zur Aufnahme der abzuwägenden Waare, und die andere zu jener der Gewichte bestimmt ist, aufgehängt sind, und welcher sonach in der halben Länge, d. i. in C unterstützt ist, oder hier seinen Drehungspunct hat. Senkrecht auf die Verbindungslinie AB wird an der halben Länge die Zunge angebracht, welche sich bei den Schwingungen des Wagbalkens in einer verticalen Ebene bewegt, und den horizontalen Stand des Balkens entweder an einem Gradbogen, oder wenn die Wage anstatt auf einem Stativ N in einer Schere aufgehängt wird, durch das Absehen daran anzeigt.

§. **82. Bedingungen, welche eine solche Wage erfüllen soll.** Man fordert von einer guten Krämerwage, erstens, dafs für gleiche Aufhänggewichte das Gleichgewicht bestehe; zweitens, dafs der Wagbalken dabei eine horizontale Lage annehme; drittens, dafs sich dieser Stand sogleich merklich ändere, wenn in die eine Schale ein kleines Gewicht zugelegt, also dadurch das Gleichgewicht gestört wird; und viertens, dafs die Wage im Stande des Gleichgewichtes ihre ursprüngliche horizontale Lage nach einigen Schwingungen wieder einnehme, wenn man sie daraus gebracht hat.

§. **83.** *Die* **erste** *Bedingung:* **Gleichheit der Gewichte,** fordert eine vollkommen gleiche Länge der beiden Arme des Balkens (die überdiefs auch noch genau symmetrisch seyn müssen);

denn ist W das eine Gewicht, z. B. jenes der Waare in S und P das andere oder Gegengewicht in S', ferner $AC = a$ und $BC = b$, so mufs für das Gleichgewicht $Wa = Pb$ Statt finden; soll nun $W = P$ werden, so mufs auch $a = b$ seyn.

Man prüft eine Wage auf diese Eigenschaft leicht durch Verwechslung der Gewichte W und P, indem man jetzt W in die Schale S', und P in jene S legt; sind die Arme gleich lang, so wird die Wage auch nach dieser Verwechslung einspielen, d. i. das Gleichgewicht anzeigen. Sind diese nicht gleich, so erhält man das wahre Gewicht der Waare W dadurch, dafs man dieselbe in die eine Schale, z. B. S legt, und diese gleichsam nur tarirt, indem man bis zur Herstellung des Gleichgewichts in die andere Schale S' beliebige Massen, wie Schrot u. dgl., legt. Hierauf nimmt man W aus S heraus, und legt dafür so lange bekannte Gewichte hinein, bis das Gleichgewicht abermals hergestellt ist; dieses letztere Gewicht gibt offenbar das genaue Gewicht der Waare an.

§. **84.** *Die* **zweite** *Bedingung:* **Horizontalstellung** *des Wagbalkens* im Stande des Gleichgewichtes, wird erreicht, wenn der Drehungspunct c (Fig. 63) über dem Schwerpuncte o der beiden Gewichte P und W (jenes der Schalen mit inbegriffen), nämlich über der Verbindungslinie AB, oder wenigstens über dem Schwerpuncte des Wagbalkens liegt; denn wird der Wagbalken aus seiner Gleichgewichts-, d. i. horizontalen Lage gebracht, so wirkt im ersten Falle das im Schwerpuncte o wirkende Gewicht $P + W$ mit dem Momente $(P + W)\,cn$ zur Zurückdrehung desselben, und er ruht nur dann, wenn co vertical, also AB horizontal steht. Dasselbe gilt auch, wenn zwar c in o, oder sogar noch unter diesem Puncte, dagegen aber der Schwerpunct des Wagbalkens noch tiefer liegt, und dessen Umdrehungsmoment überwiegend ist. (Wäre dagegen bei dieser Lage, wo nämlich o über c liegt, nicht das Moment des Balkens, sonders jenes von $P + W$ das gröfsere oder überwiegend, so würde der Wagbalken bei der geringsten Verrückung aus seiner jetzt labilen (§. 64) Gleichgewichtslage sogleich umschlagen.)

§. **85.** *Die* **dritte** *Bedingung:* **Empfindlichkeit** *der Wage*, wird erreicht, wenn erstens die Arme lang sind, zweitens das Gewicht des Wagbalkens gering ist (dabei mufs man ihm aber eine solche Form geben, dafs er nicht gebogen wird), drittens die aufgelegten Gewichte klein sind, viertens die Entfernung des Drehungspunctes von der Verbindungslinie AB klein, am besten gleich Null ist (in welchem

Falle der vorhin erwähnte dritte Punct keinen Einfluſs hat, und die Wage am empfindlichsten wird), und wenn fünftens auch die Entfernung des Schwerpunctes des Wagbalkens nur sehr wenig unter diesem Drehungspuncte liegt. (Dieser darf jedoch, wenn der Drehungspunct, wie es wünschenswerth ist, in der Geraden *AB* liegt, nicht auch zugleich in diese Linie hineinfallen, weil sonst das ganze System im Schwerpuncte aufgehängt, und dadurch die Bedingung in §. 84 nicht erfüllt wäre; eben so wenig darf er über dieser Linie liegen, weil der Wagbalken sonst umschlagen würde.)

§. **86.** *Die* **vierte** *Bedingung:* **Beseitigung der Trägheit** *der Wage*, wird durch die möglichste Verminderung der Reibung am Zapfen *c* erreicht. Zu diesem Ende verfertigt man diesen aus Stahl, gibt ihm die Form einer Schneide, härtet diese und läſst sie abermals auf einer gehärteten Stahlplatte oder auch auf einem Edelsteine spielen; eine ähnliche Vorsicht gebraucht man auch bei den Aufhängepuncten der Schalen.

Vertauscht man bei einer sehr genau gearbeiteten, empfindlichen Wage die eine Schale mit einer kürzern, oft auch kleinern Schale, die unten mit einem Häkchen zur Aufnahme eines Platindrahtes oder Pferdehaares versehen ist; so hat man eine sogenannte hydrostatische Wage, welche sich besonders zur Bestimmung der specifischen Gewichte der Körper eignet.

§. **87. Die Schnellwage (römische Wage).** Diese Wage besteht aus einem ungleicharmigen Hebel *AB* (Fig 64) der ersten Art, an dessen kürzern Arm ein Haken oder eine Schale zur Aufnahme der Waare *W*, auf dem längern Arm dagegen ein constantes Gewicht *P*, das Laufgewicht angebracht ist, welches durch bloſses Verschieben mit der Waare in's Gleichgewicht gesetzt wird; da also die Bestimmung des Gewichtes einer Waare nur durch ein geringeres oder weiteres Hinausschieben des Laufgewichtes bewirkt wird, so handelt es sich bei dieser Wage, welche in der Regel nur für gröſsere Lasten oder dort angewendet wird, wo nicht die gröſste Schärfe, sondern mehr ein schnelles Abwägen verlangt wird, vorzüglich um die Eintheilung des längern Armes *CA*.

§. **88. Eintheilung des Wagbalkens.** Ist *O* der Schwerpunct des Wagbalkens, *G* dessen Gewicht, *G'* das Gewicht der Ketten und Wagschale, im Falle eine solche vorhanden (sonst wird der dafür angebrachte Haken zum Wagbalken gerechnet), und *P* das constante Laufgewicht; so ist, wenn dieses letztere auf den Punct m geschoben, mit der leeren Schale (oder sonst mit dem bloſsen Haken) im Gleichgewichte steht, sofort (§. 77)

$$G'.BC = P.Cm + G.CO.$$

Wird jetzt in die Schale die Waare W gelegt, und zur Herstellung des Gleichgewichtes das Gewicht P nach M geschoben, so ist eben so

$$(W + G')\,BC = P.CM + G.CO;$$

wird von dieser Gleichung die vorige abgezogen, so entsteht

$$W.BC = P.mM \ldots (1.$$

Muſs für die Waare W' das Laufgewicht nach M' geschoben werden, so ist eben so $W'.BC = P.mM'$, folglich $W : W' = mM : mM'$, d. i. die vom Anfangs- oder Nullpuncte m an gezählten Entfernungen des Laufgewichtes verhalten sich wie die Gewichte der Waaren.

Soll also z. B. die Theilung von Pfund zu Pfund vorgenommen werden, so theile man den kürzern Arm BC in eben so viele gleiche Theile, als das Laufgewicht P Pfunde enthält; sey diese Zahl $= n$ und $\frac{1}{n} BC = a$, oder $BC = na$, folglich aus der Gleichung (1 $W.na = n.1\,\text{Pf.} \times mM$, oder $mM = a\,\frac{W\text{Pf.}}{1\,\text{Pf.}} = a\,W$. Setzt man also, da von Pfund zu Pfund gewogen werden soll, W der Reihe nach $= 1, 2, 3 \ldots$; so wird aus dieser Gleichung eben so $mM = 1a, 2a, 3a \ldots$, so, daſs man also nur, nachdem man BC in n gleiche Theile getheilt hat, einen solchen Theil auf den längern Arm von m aus so oft, als es angeht, gegen A zu auftragen, und diese Puncte, wenn m der Nullpunct ist, mit $1, 2, 3 \ldots$ Pfunde bezeichnen darf. Ist die leere Schale (oder der Haken) nicht schwer genug, um mit dem Laufgewichte in m (was der nächste Punct an C seyn soll) im Gleichgewichte zu stehen, sondern muſs man dazu noch ein Gewicht von p Pfunden auflegen; so erhält der Punct m die Zahl p, die übrigen Theilungspuncte aber werden mit $p + 1, p + 2 \ldots$ Pfunde bezeichnet. Halbirt man die Intervalle der Theilung, so erhält man halbe Pfunde u. s. w.

Wird für dasselbe Laufgewicht der Arm BC 2, 3… n Mal kürzer, so fallen auch die Theilungen a 2, 3… n Mal kleiner aus, und umgekehrt. Bei kleinern Wagen werden deſshalb zwei gegenüber liegende Seiten des Wagbalkens (und zwar zwei diagonal gegenüber liegende Kanten) eingetheilt, und da man der Wage zwei Aufhängpuncte in der Art gibt, daſs der Arm BC für die eine Seite kürzer, als für die andere (gewöhnlich ist er nur $\frac{1}{4}$ so lang) ist, so sind auch die Intervalle der Theilung in demselben Verhältniſs kleiner, und es können davon mehr Theilstriche aufgetragen, also auch auf dieser Seite schwerere Lasten abgewogen werden, weſshalb man diese für gewöhnlich die schwere, die gegenüber liegende aber die leichte Seite nennt.

Bei den meisten dieser Wagen, bei welchen es sich überhaupt nur um die nächsten Grenzen (die z. B. um 1 oder $\frac{1}{2}$ Pfund aus einander liegen können) handelt, zwischen welche das Gewicht der Waare fällt, legt man den Drehungspunct nicht über, sondern etwas unter den Schwerpunct des Ganzen, wodurch also nur ein labiles Gleichgewicht eintreten kann, und ein Umschlagen des Wagbalkens nach der einen oder andern Seite vorherrschend, und dadurch eben die eine oder andere dieser beiden Grenzen angezeigt wird.

Soll dagegen diese Wage, wie die Krämerwage, im Stande des Gleichgewichtes ruhig einspielen — was aber eine längere Abwägungszeit erfordert — und diese bei einem geringen Hinausschieben des Laufgewichtes schon einen bedeutenden Ausschlag geben: so müssen im Wesentlichen dieselben Bedingungen vorhanden seyn, wie sie vorhin für die Krämerwage angegeben wurden.

§. 89. Die Zeigerwage. Zu den Wagen, welche sich auf den einfachen Hebel gründen, gehört besonders noch die Zeigerwage, bei welcher das Gewicht der Waare unmittelbar an einer kreisförmigen Scala BED (Fig. 65) durch einen Zeiger E des Hebels AC, an dessen anderm Ende A sich eine Schale S oder ein hakenförmiges Gehänge befindet, angegeben wird.

Nimmt man für die Rechnung eine gerade Scala in einer Verticallinie BN an, und sind darauf N der Nullpunct, d. h. die Stelle des Zeigers für die leere Wagschale, dagegen a und a' die den Gewichten der Waaren W und W entsprechenden Theilstriche; so findet man, dafs

$$Na : Na' = W : W' \text{ sey.}$$

Hat man also diese verticale Scala nach gewissen gegebenen Bedingungen bezüglich des Umfanges und der Genauigkeit der zu construirenden Wage bestimmt (wofür die Rechnung einfacher als für die Kreisscala wird), so kann man durch Verbindung dieser Puncte a, a' ... mit dem Drehungspuncte C, welcher zugleich den Mittelpunct des Kreisbogens BED bildet, darauf die entsprechenden Theilstriche abschneiden und gehörig bezeichnen.

Am einfachsten und sichersten wird diese Scala auf dem Kreisbogen auf empirischem Wege zu Stande gebracht, indem man in die Schale nach und nach bekannte Gewichte legt, und dabei den jedesmaligen Stand des Zeigers markirt; beim Gebrauche mufs jedoch die Wage wieder genau so (was durch ein Senkblei angezeigt wird) gestellt werden, wie sie bei der Eintheilung der Scala stand.

Eine häufige und besondere Anwendung finden diese Wagen in den Spinnfabriken, beim Sortiren der Wollen- und Baumwollgarne, wo sie sogleich die Nummer der Feinheit anstatt dem Gewichte angeben, und dann Garn- oder Sortirwagen heifsen.

Auch die Federwagen, welche sich auf die Elasticität einer Stahlfeder gründen, und wovon in Fig. 65 *a* eine nach unserer Angabe dargestellt ist, gehören unter die Zeigerwagen.

§. 90. Die tragbare Brücken- oder Decimalwage. Diese in neuerer Zeit immer mehr zur Anwendung kommende Wage, bei welcher das Gewicht der Waare durch ein kleineres, gewöhnlich nur den zehnten Theil betragendes Gegengewicht (verjüngtes Gewicht) bestimmt wird, beruht auf den Gesetzen des zusammengesetzten Hebels, indem dabei mehrere Hebel, und zwar erstens der um C (Fig. 66) drehbare ungleicharmige Hebel (Schwanenhals) AB, an dessen längern Arm in A die Schale S zur Aufnahme der Gewichte, und an dem kürzern Arme zwei verticale Zugstangen Dd, Ba beweglich eingehängt sind; zweitens der um c drehbare einarmige Hebel (die Gabel) ac, dessen Endpunct a in die Stange Ba eingehängt ist, so wie endlich eine Brücke db zur Aufnahme der Waare W in Verbindung gebracht sind, wobei die Brücke von oben gesehen ein gleichschenkliches Dreieck bildet, dessen Spitze in d in die Zugstange Dd eingehängt ist, deren Basis dagegen mit zwei Schneiden f, f' (Fig. 66, a) auf den Hebel ac, der eigentlich auch nur die Seite eines ähnlichen Dreieckes acc', so wie der Punct c den Endpunct einer der beiden Schneiden c, c' bildet, aufliegt, in der Rechnung aber eben so, wie bd als ein einfacher Hebel angesehen werden kann. Zur Verminderung der Reibung sind alle Stütz- oder Drehungsachsen in Form von Schneiden aus gehärtetem Stahl verfertigt, und liegen auf flachen (nach einer Richtung beweglichen) gehärteten Stahlplatten auf.

Die Theorie dieser für den Handelsstand so wichtigen und bequemen Wage beruht in Folgendem:

Ist O (Fig. 66) der Schwerpunct der Brücke, und G ihr Gewicht, ferner o der Schwerpunct der Waare und W ihr Gewicht, so vertheilt sich das Gewicht G auf die beiden Puncte d und b in der Art, dafs (§. 76, Aufgabe 3, Gl. 3 u. 3′) auf d der Theil $x = G\,\frac{Ob}{bd}$ und auf b jener $x' = G\,\frac{Od}{bd}$ kommt; eben so kommt von der Waare W auf den erstern Punct d der Antheil $y = W\,\frac{ob}{bd}$, und auf den letztern jener $y' = W\,\frac{od}{bd}$.

Da nun auf dem Punct f die Last $x' + y'$ ruht, so wird der Punct a, also auch jener B mit einer Kraft von $(x' + y') \frac{cf}{ac}$, ferner der Punct d, also auch D mit einer Kraft $= x + y$ herabgezogen. Mufs daher zur Herstellung des Gleichgewichtes in die Schale S das Gewicht P gelegt werden, so ist für das Gleichgewicht am Hebel AB, wenn G' das Gewicht der Schale ist, sofort

$$(P + G')\, AC = (x + y)\, CD + (x' + y') \frac{cf}{ac}\, CB.$$

Bestimmt man das Verhältnifs der Hebelsarme der beiden Hebel AB und ac auf eine solche Art, dafs $CD : CB = cf : ca \ldots$ (1 Statt findet, so wird $\frac{cf}{ac} CB = CD$, wodurch die vorige Gleichung vereinfacht wird, und in $(P + G')\, AC = (x + x' + y + y')\, CD$, oder, wenn man für x, x', y, y' die obigen Werthe setzt, in

$$(P + G')\, AC = (G + W)\, CD \text{ übergeht.}$$

Wird bei der Construction der Wage das Gewicht der Hebeln und Brücke so ausgeglichen, dafs diese mit der leeren Wagschale im Gleichgewichte stehen, so wird (in der vorigen Gleichung P und $W = o$ gesetzt) 2)... $G' . AC = G . CD$, und wenn man diese Gleichung von der vorigen abzieht, endlich $P . AC = W . CD \ldots I$, woraus $P : W = CD : AC$ folgt. Soll nun, wie es bei diesen Wagen gewöhnlich ist, $P = \frac{1}{10} W$ seyn, so mufs auch $CD = \frac{1}{10} AC$ seyn. Von den beiden Bedingungsgleichungen 1) und 2), welche die Construction erfüllen mufs, ist die erstere um so wichtiger, weil von ihrer Erfüllung der wesentliche Umstand abhängt, dafs der Punct der Brücke, auf welchen die Waare gelegt wird, bei der Abwägung keinen Einflufs hat, die Waare also wo immer auf die Brücke hin gelegt werden kann.

§. 91. Die Strafsen- oder Mauthwage. So wie die tragbare Brückenwage in der Regel eine im Verhältnifs von $\frac{1}{10}$ verjüngte Wage ist, so werden die zum Abwägen ganzer Wägen mit ihren Ladungen, deren Construction auf einer ähnlichen, nur noch wirksameren Hebelverbindung beruht, gewöhnlich im Verhältnifs von $\frac{1}{100}$ verjüngt, so dafs 1 Pfund Gewicht den Werth von einem Centner hat.

Eine der besten Einrichtungen ist nach Schwilgue's Construction in Fig. 67 dargestellt. In dieser sind zwei gleichschenklige Dreiecke oder Gabelhebel EFF in der Art, wie bei der vorigen Wage nur einer vorkommt, jedoch in gröfsern Dimensionen (Ef hat nahe 6 Fufs und die Breite beträgt $4\frac{3}{4}$ Fufs) vorhanden, welche sich um die Schneiden oder dreiseitigen Prismen a, a, a, a auf beweglichen ebenen Platten drehen, auf den vier Schneiden c die Brücke N tragen, und sich in E mit der verticalen Zugstange oder dem Zaume vereinigen, welcher in den um

O drehbaren horizontalen Communicationshebel *DO* bei *J* eingehängt ist. Der Endpunct *D* dieses Hebels steht mittelst der verticalen Zugstange *BD* mit dem Endpuncte *B* des um *C* drehbaren Wagbalkens („Schwanenhalses“) *AB* in Verbindung, an dessen Endpunct *A* wieder die Wagschale *S* eingehängt ist.

Sobald sich nun die Waare *W* auf der Brücke *N* befindet, nehmen die Endpuncte *E* der Gabelhebel eine Bewegung nach abwärts an, wodurch der Endpunct *D* des Hebels *OD*, also auch die Zugstange *BD* mit dem Puncte *B* des Balkens *AB* nach abwärts, folglich der Punct *A* mit der Schale *S* nach aufwärts gezogen, und sofort durch aufgelegte Gewichte mit der Waare in's Gleichgewicht gebracht werden kann.

Da jedoch die acht Messerschneiden *a* und *c* beim Auffahren eines abzuwägenden Wagens durch die Erschütterung Schaden leiden würden, so ruht die Brücke anfangs, und zwar dadurch, dafs das Lager der Messerschneide *C*, welches in einem Gestelle *L* angebracht ist, das sich in dem Windenstocke *Z* vertical auf- und abschieben läfst, ganz herabgelassen ist, in den vier Ecken auf vier kegelförmigen gufseisernen Stützen *m* auf, und die Wage wird erst dann, durch Aufwinden des Trägers *L* (mittelst zweier Kegelräder, welche eine Schraubenspindel umdrehen) bis auf eine bestimmte Höhe, die sich von selbst markirt, wodurch der Hebel *AB*, der Punct *D*, also auch jener *E*, so wie endlich die vier Schneiden *c* in die Höhe steigen, und letztere die Brücke von unten fassen und heben, gelüftet, und zum Abwägen vorgerichtet. Ist dieses vorüber, so wird die Brücke wieder auf die vier Stützen *m* niedergelassen, und erst dann die Waare von der Brücke weggenommen.

Die Hebelverhältnisse bei dieser Brückenwage anlangend, so ist $\frac{gf}{Ef} = \frac{1}{10}$, $\frac{JO}{DO} = \frac{1}{5}$, und $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$, folglich hat man, wenn die Wage so construirt worden, dafs die leere Brücke *N* mit der leeren Wagschale *S* im Gleichgewichte steht (was dabei immer beobachtet wird), sofort $\frac{P}{W} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{100}$, so, dafs also ein in die Schale *S* gelegtes Gewicht von 1 Pfund mit einer auf der Brücke *N* liegenden Waare von 1 Centner im Gleichgewichte steht.

Hebladen.

§. 92. Die deutsche und französische Heblade. Soll eine Last mittelst des Hebels, unter Ersparung an Kraft (also Verlust an Geschwindigkeit) auf eine etwas bedeutendere Höhe gehoben werden, als es durch eine einmalige Bewegung des Hebels möglich ist, wie z. B. um einen gefällten Baum auf einen Wagen zu bringen; so mufs man, da der Weg der Last am Hebel unter dieser Bedingung nur sehr klein ist, den Stütz- oder Drehungspunct desselben selbst nach und nach höher bringen. Diefs geschieht bei der deutschen Heblade, welche (Fig. 68) aus zwei Pfosten mm besteht, die durch zwischen gelegte Backen n, n um einige Zolle von einander abstehen, um eine Culisse zur Aufnahme des Hebels AB zu bilden, und mit zwei Reihen von Löchern versehen sind, dadurch, dafs man den doppelarmigen Hebel, an dessen Endpuncten A und B die Kraft P und Last Q wirken, aus der Lage AB, in welcher er auf einem durch a gesteckten eisernen Bolzen ruht, in die Lage $A'D$ bringt, den zweiten Bolzen aus b um ein Loch höher, nämlich nach b' steckt, und darauf den Hebel niederdrückend, bis er die Lage $A''E$ annimmt, die Last um die Höhe DE hebt, hierauf auch den Bolzen a in das nächst höhere Loch a' steckt, und in dieser Art so lange fortfährt, bis die Last Q auf die verlangte Höhe, die niemals bedeutend seyn kann, gehoben ist.

Bei der französischen Heblade (Fig. 69), welche aus einer starken eisernen, auf einem soliden Kreuzfufs aufrecht stehenden Stange besteht, die an zwei Seiten mit sägartigen Einschnitten versehen ist, legen sich von den beiden, mit dem Hebel verbundenen eisernen Biegeln a, a', welche diesem als Stützpuncte dienen, durch das Auf- und Abwiegen des Hebels immer einer nach dem andern in diese Zahnlücken, und zwar immer um einen Zahn höher ein, so, dafs dadurch das bei der deutschen Heblade nothwendige Höherstecken des Bolzens erspart wird.

Sowohl die Löcher bei der erstern, als die sägförmigen Zähne bei der letztern Heblade müssen eine, der Länge des Hebels und der Bewegung des menschlichen Arms beim Auf- und Abwiegen des Hebels entsprechende Entfernung von einander haben, die man am sichersten und einfachsten durch eine wirkliche Construction findet.

§. 93. Die schwedische Heblade. Noch wirksamer, dafür aber auch für noch kleinere Bewegungen der Last bestimmt, ist die aus einem zusammengesetzten Hebel bestehende schwedische Heblade, deren Einrichtung leicht aus der Zeichnung in Fig. 70 zu ersehen ist.

Um die Wirksamkeit dieser Hebvorrichtung beim Ausziehen der Baumstöcke mit den Wurzeln zu zeigen, sey AC der auf dem Stock aufliegende, und in B damit mittelst einer Kette oder eines Seiles verbundene Hebel, dessen vorderes Ende A auf den durch die Heblade gehenden, und wie bei der deutschen Heblade abwechselnd auf einen der beiden Bolzen, die nach und nach in die beiden Löcherreihen immer um ein Loch höher gesteckt werden, ruhenden Hebel DE, an welchen in D und E die Kraft wirkt, aufliegt. Wird nun der Hebel AC im Puncte A mit einer Kraft P aufwärts bewegt, so bildet C den Stütz- und B den Angriffspunct der Last oder des Widerstandes Q, und es ist $P = Q \dfrac{BC}{AC}$. Diese Kraft P bildet aber für den zweiten Hebel DE, welcher bei seiner jetzigen Lage auf dem Bolzen b aufliegen, und an welchen in D sowohl, als in E eine Kraft K, erstere auf-, letzere abwärts wirkend angebracht seyn soll, die Last, folglich ist $P \,.\, \frac{1}{2} ab = K \,.\, Db + K \,.\, Eb = K\,(Db + Eb) = K \,.\, DE$, oder für P substituirt: $Q \cdot \frac{1}{2} ab \dfrac{BC}{AC} = K \,.\, DE$, woraus

$$K : Q = \tfrac{1}{2} ab \,.\, BC = DE \,.\, AC \text{ folgt,}$$

welche Proportion auch für die folgenden Lagen des Hebels DE gilt.

Ist z. B. $AC = 10$, $BC = 2$, $DE = 8$ und $\frac{1}{2} ab = \frac{1}{3}$ Fuſs, so ist

$$K : Q = \tfrac{1}{3} \,.\, 2 : 8 \,.\, 10 = \tfrac{2}{3} : 80 = 1 : 120.$$

Wäre also $K = 30$ Pfund, so könnte durch diese Hebvorrichtung ein Widerstand $Q = 3600$ Pf. $= 36$ Centner, und zwar von zwei Menschen leicht überwunden werden. Um jedoch diesen Widerstand auch nur um Einen Zoll zu heben, müssen die beiden Angriffspuncte D, E zusammen schon einen Weg aufwärts von 120 Zoll oder 10 Fuſs zurücklegen.

Die Rolle.

§. 94. Feste und bewegliche Rolle. Unter einer Rolle versteht man eine kreisrunde Scheibe m (Fig. 71), welche an ihrem Umfange zur Aufnahme einer Schnur oder Kette mit einer Hohlkehle, dem sogenannten Schnurlauf, und im Mittelpuncte (eigentlich der Achse) mit einem runden, gewöhnlich eisernen oder stählernen Zapfen versehen ist, welcher ihre Umdrehungsachse bildet. Diese Achse ist entweder an der Scheibe befestigt, und wird in eine Schere oder einen Bügel a in runde Löcher als Zapfenlager eingelegt, oder es ist umgekehrt dieser cylinderische, die Achse bildende Bolzen in den Bügel befestigt, und es dreht sich die Scheibe, welche in ihrem Centrum kreisrund nach der Dicke des Bolzens ausgebohrt ist, um diesen Zapfen oder Bolzen. Der genannte Bügel a erhält die Form eines Hakens, und dieser wird entweder, wie in 1. oberhalb an einem Balken befestigt, oder er dient wie in 2. zur Aufnahme der Last Q, in welchem Falle dann das eine Ende A des Seils oberhalb befestigt, durch das Anziehen des andern Endes, woran die Kraft P wirkt, die Rolle sammt der Last gehoben wird; im erstern Falle wird die Rolle eine feste, im letztern eine bewegliche genannt.

§. 95. Gleichgewichtsbedingung bei der festen Rolle. Wirken an der um C drehbaren Rolle vom Halbmesser $CA = CB = r$ (Fig. 72) nach den Tangenten AP, BQ die Kräfte P und Q, oder die Kraft P und Last Q, so verlängere man ihre Richtungen bis sie sich schneiden; ist D der Durchschnittspunct, so muſs für das Gleichgewicht die Resultirende aus P und Q nothwendig durch den festen Punct C gehen. Zieht man die Halbmesser CA und CB, so kann man das Ganze als einen um C drehbaren Winkelhebel ACB ansehen, an welchen in A und B die Kräfte P und Q nach den gegebenen Richtungen wirken, also ist für's Gleichgewicht (§. 75) $P . AC = Q . BC$, mithin wegen $AC = BC$, sofort auch $P = Q$, d. h. die Kraft gleich der Last.

Um den Druck p auf den Zapfen zu bestimmen, muſs man die Resultirende R aus den beiden Kräften P und Q suchen.

Schneidet man also von D aus die gleichen Stücke Dn und Dm auf den Richtungen der Kräfte ab und construirt das Parallelogramm mn, so ist $Da = R$, wenn $Dn = Dm$ die gleichen Kräfte P und Q darstellen; da aber die Dreiecke Dan und ABC (indem ihre Seiten auf einander senkrecht stehen) ähnlich sind, also $Dn : Da = BC : AB$, d. i. $P : R = r : AB$ ist, so ist auch, wenn man die Sehne $AB = a$ setzt, der gesuchte Druck auf den Zapfen R oder

$$p = \frac{a}{r} P \quad . \; . \; . \; (1.$$

Für $a = 2r$ sind die Kräfte P und Q parallel, und der Druck p am gröſsten, und zwar $p = 2P = P + Q$, wie am gleicharmigen Hebel, auf welchen die Kräfte senkrecht wirken.

§. 96. Gleichgewicht an der beweglichen Rolle. Ist das eine Ende E der Schnur, welche von der Rolle C (Fig. 73) den Bogen BaA umfaſst, befestigt, und wirkt am andern Ende nach der Richtung der Tangente AP die Kraft P, während an dem Zapfen C mittelst des Bügels a (Fig. 71, a) die Last (das Gewicht der Rolle mit inbegriffen) Q lothrecht wirkt; so kann man sich, da die Spannung in E der Kraft P gleich seyn muſs, diese Spannung durch eine eben so groſse, in der Richtung BE wirkende Kraft ersetzt denken, dadurch entstehen aber dieselben Bedingungen, wie bei der festen Rolle, so, daſs also die Resultirende aus diesen beiden Kräften in die

Richtung DC fallen, und der Last Q gleich seyn mufs. Ist nämlich wieder $CA = r$ und $AB = a$, so ist $P : Q = r : a$ . . . (2, also die Kraft zur Last, wie der Halbmesser zu der Sehne des vom Seil umspannten Bogens.

Für $a = r$ (wofür W. $ACB = 60^0$) ist $P = Q$. Für $a > r$ ist auch $Q > P$, und für $a = 2r$ am gröfsten, nämlich $Q = 2P$, so, dafs also, wenn die Schnüre parallel sind, die Kraft P am vortheilhaftesten wirkt.

Dieser letztere Fall, in welchem $P = \frac{1}{2}Q$ ist, erklärt sich auch schon dadurch, dafs von den beiden parallelen Schnüren jede die halbe Last zu tragen hat, weil sie sonst nicht gleich gespannt seyn könnten.

Anmerkung. Was die Anwendung der Rollen betrifft, so benützt man die feste Rolle überall dort, wo man die Richtung der Kraft ohne ihre Gröfse verändern will. Soll z. B. eine Last aus einem Brunnen oder Schacht mittelst Pferden heraufgezogen werden, so verwandelt man durch eine solche Rolle die verticale Richtung des Zugseils in eine horizontale.

Die bewegliche Rolle m (Fig. 74), welche gewöhnlich noch mit einer festen Rolle n verbunden wird, dient, um eine Last Q mit der halben Kraft P zu heben. Tritt aber wirkliche Bewegung ein, so fällt, wie leicht zu sehen, der Weg der Kraft P doppelt so grofs, als jener der Last Q aus, so, dafs auch hier wieder an Geschwindigkeit verloren geht, was an Kraft gewonnen wird.

§. 97. Gleichgewicht an einem Rollensysteme. Man verbindet oft (auf ähnliche Weise, wie beim zusammengesetzten Hebel) mehrere bewegliche Rollen so mit einander, dafs die Kraft für die eine zur Last der andern wird, wie z. B. in Fig. 75 in der Combination 1 von drei beweglichen und einer festen Rolle. Sind die Halbmesser der Rollen m, m' . . . der Reihe nach r, r', r'', und die Sehnen der von den Schnüren umfafsten Bögen eben so a, a', a''; so ist die an der ersten Rolle m nöthige Kraft p für das Gleichgewicht (§. 96), wenn man das Gewicht der Rolle gegen die Last Q als unbedeutend auslassen darf (oder dieses schon unter Q versteht) $p = \frac{r}{a}Q$. Für die zweite Rolle erscheint p als Last, und es ist die nöthige Kraft eben so $p' = \frac{pr'}{a'} = \frac{r}{a} \cdot \frac{r'}{a'} Q$. Eben so ist für die dritte Rolle

$$p'' = p' \frac{r''}{a''} = \frac{r}{a} \cdot \frac{r'}{a'} \cdot \frac{r''}{a''} Q;$$

und da endlich durch die feste Rolle n (§. 95) blofs die Richtung der Kraft verändert wird, also $P = p''$ ist, so hat man $\frac{P}{Q} = \frac{rr'r''}{aa'a''}$, oder in einer andern Form $P : Q = r r' r'' : a a' a'' \ldots$ (1, und da diese Relation für jede beliebige Anzahl von beweglichen Rollen gilt, so verhält sich in einem solchen Systeme im Stande des Gleichgewichtes **die Kraft zur Last, wie das Product aus den Halbmessern der beweglichen Rollen zu dem Producte aus den Sehnen der von den Schnüren umspannten Bögen dieser Rollen.**

Laufen die Schnüre wie in Fig. 75, 2. mit einander **parallel**, so gehen die Sehnen in die Durchmesser über, und es tritt dann die gröſste Kraftersparung ein, indem man aus Gl. (1 hat $P : Q = 1 : 2 . 2 . 2$, oder für n bewegliche Rollen:

$$P : Q = 1 : 2^n, \text{ oder } P = \frac{1}{2^n} Q \ldots (2.$$

Für drei bewegliche Rollen ist also $P = \frac{1}{8} Q$, für vier Rollen $P = \frac{1}{16} Q$ u. s. w.

Sollen in diesem letztern Falle auch die Gewichte der beweglichen Rollen berücksichtigt werden, so sey G das Gewicht einer jeden einzelnen Rolle, folglich für die erste Rolle $p = \frac{1}{2} (Q + G)$, für die zweite Rolle

$$p' = \tfrac{1}{2}(p + G) = \tfrac{1}{4} Q + \tfrac{1}{4} G + \tfrac{1}{2} G = \tfrac{1}{4} Q + \tfrac{3}{4} G,$$

für die dritte Rolle

$$p'' = \tfrac{1}{2}(p' + G) = \tfrac{1}{8} Q + \tfrac{7}{8} G,$$

also für **drei** bewegliche Rollen, wegen $p'' = P$ sofort:

$$P = \frac{1}{2^3} Q + \frac{2^3 - 1}{2^3} G = \frac{1}{2^3} [Q + (2^3 - 1) G],$$

und eben so für n bewegliche Rollen

$$P = \frac{1}{2^n} [Q + (2^n - 1) G] \ldots (3,$$

$$\text{oder auch } P = \frac{Q - G}{2^n} + G \ldots (3'.$$

Ist z. B. $Q = 500$ Pfund und $G = 5$ Pfund, ferner $n = 5$; so ist $P = \frac{500 - 5}{32} + 5 = 20{\cdot}47$, d. i. nahe $20\frac{1}{2}$ Pfund.

Weiter unten werden wir sehen, daſs diese Kraft zur wirklichen Bewegung noch nicht hinreichend wäre, weil auch noch die Reibungen an den Zapfen der sämmtlichen Rollen und der Widerstand überwunden werden muſs, welchen die Schnüre wegen ihrer unvollkommenen Biegsamkeit darbieten. Auch findet man, daſs, wenn S und s die gleichzeitig von P und Q zurückgelegten Wege sind, sofort $S = 2^n s$ oder $S : s = Q' : P$ ist, wenn man die Gesammtlast, d. i. den eingeklammerten Theil in der Gleich. (3 mit Q' bezeichnet.

§. 98. Gleichgewicht am Flaschenzuge. Werden zwei oder mehrere Rollen in einem Gehäuse oder Kloben angebracht, so heifst man eine solche Verbindung (von ihrer Form) eine Flasche. Werden dagegen zwei solche Flaschen durch ein einziges fortlaufendes Seil so mit einander verbunden, dafs das Seil oder die Schnur immer abwechselnd von der Rolle der einen über die Rolle der andern geht, so nennt man eine solche Verbindung einen Flaschenzug; dabei wird die obere Flasche gewöhnlich an einem Balken befestigt, wodurch die in ihr enthaltenen Rollen ein System von festen, die untere Flasche dagegen, an welcher die Last aufgehängt wird, ein System beweglicher Rollen bildet.

Bei allen den in Fig. 76 dargestellten Flaschenzügen wird die ganze Schnur in eine gewisse Anzahl gleich tragender Schnüre getheilt, weil das Gleichgewicht bei dieser Anordnung nur dann bestehen kann, wenn die Spannung der Schnüre durchaus dieselbe ist. In 1 sind also 2, in 2 sind 3 und in 3 sind 6 tragende Schnüre vorhanden, mithin ist in diesen Fällen ganz einfach beziehungsweise, wenn unter Q die gesammte Last, mit Einschlufs des Gewichtes der beweglichen Flasche verstanden wird, $P = \frac{1}{2} Q$, $P = \frac{1}{3} Q$ und $P = \frac{1}{6} Q$. Sind allgemein n tragende Schnüre, also bei dieser Anordnung auch eben so viele Rollen vorhanden, so ist $P = \frac{1}{n} Q$, oder $P : Q = 1 : n$ . . . (1,

d. h. bei einem Flaschenzuge verhält sich die Kraft zur Last, wie die Einheit zur Anzahl der Rollen oder tragenden Schnüre. (Die Schnur, woran die Kraft wirkt, kommt dabei nicht in Betracht, weil sie blofs die Richtung der Kraft ändert.)

Von dieser Flaschenform abweichend gibt es noch eine Menge Verbindungen von festen und beweglichen Rollen, die auf demselben Princip der gleichtragenden Schnüre beruhen, und immerhin noch Flaschenzüge genannt werden. So ist in Fig. 77 eine solche Verbindung dargestellt, bei welcher sich die Rollen in jedem der beiden Kloben nicht unter, sondern neben einander befinden, und sich in jedem derselben um eine gemeinschaftliche Achse drehen. Da dabei sechs tragende Schnüre angezeigt sind, so ist auch $P = \frac{1}{6} Q$. In Fig. 78 drehen sich ebenfalls sowohl die festen, als beweglichen Rollen, welche ungleiche Gröfse haben, und concentrisch auf einander befestigt sind, jedes System um eine gemeinschaftliche Achse; auch hier sind sechs tragende Schnüre angenommen, also ist für dieses Beispiel wieder $P = \frac{1}{6} Q$. In den in Fig. 79 und Fig. 80 dargestellten Combinationen ist, wie man leicht findet, bei der erstern $P = \frac{1}{7} Q$ (wegen $Q = x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x = \frac{7}{4} x$ und $P = \frac{1}{4} x$), und bei der letztern $P = \frac{1}{14} Q$.

Wir können endlich wieder bemerken, dafs, wenn wirkliche Bewegung eintritt, und die Last Q z. B. um 1 Fufs gehoben werden soll, dabei die Kraft P in den Anordnungen von 1, 2, 3, Fig. 76, beziehungsweise einen Weg von 2 Fufs (weil jedes der beiden tragenden Seilstücke um 1, also beide zusammen um 2 Fufs verkürzt werden müssen, was den Weg der Kraft P gibt), 3 Fufs und 6 Fufs zurücklegen, so, dafs durch den Weg ersetzt werden mufs, was an Kraft gewonnen werden soll, oder wieder, wie schon öfter bemerkt, an Geschwindigkeit eben so viel verloren geht, als an Kraft gewonnen wird. Dieselbe Bemerkung gilt, wie leicht zu sehen, auch für die übrigen in den Figuren 77 bis 80 dargestellten Combination, so, dafs wenn allgemein S und s die von P und Q gleichzeitig zurückgelegten Wege sind, sofort $S : s = Q : P$ Statt findet.

Beispiel. Um die Anzahl der Rollen bei einem Flaschenzuge zu finden, mittelst welchem eine Kraft von 50, mit einer Last von 400 Pfund im Gleichgewichte steht, ist $Q = nP$, und daraus $n = \frac{Q}{P} = \frac{400}{50} = 8$ Rollen. Zur Einleitung und Unterhaltung der Bewegung mufs diese Zahl, wie weiter unten gefunden wird, wegen den zu überwindenden Nebenhindernissen noch vergröfsert werden.

Das Rad an der Welle.

§. 99. Erklärung. Unter dem Rade an der Welle versteht man einen horizontal liegenden Cylinder oder eine Welle B (Fig. 81), welche sich um zwei an den Enden, in der Richtung ihrer Achse angebrachten Zapfen s, s, die gewöhnlich aus Eisen bestehen, und in dem sogenannten Zapfenlager e, e ruhen, wie um ihre eigene Achse umdrehen läfst, und zugleich mit einer kreisrunden Scheibe oder einem Rade b concentrisch und darauf senkrecht verbunden ist. Die Kraft wirkt dabei am Umfange des Rades nach der Tangente, während die Last gewöhnlich an einem Seile hängt, welches sich um die Welle aufwickelt.

Diese Maschine erscheint, ohne in ihren Gleichgewichtsbedingungen eine Aenderung zu erleiden, unter verschiedenen Formen in der Anwendung, und zwar als Hornhaspel (Fig. 82), Kreuzhaspel (Fig. 83), Spillenrad (Fig. 84) und Tummelbaum (Fig. 85), wobei die Welle aufrecht oder vertical steht.

§. 100. Gleichgewichtsbedingung für das Rad an der Welle. Vermöge der Steifheit der Welle und ihrer festen Verbindung mit dem Rade ist es gleichgiltig, in welchem Puncte B (Fig. 81, 1) ihrer Länge die Last Q hängt, so, dafs man diese für die Rechnung auch eben so gut in b, nämlich in der Radebene selbst

annehmen kann, wodurch die in 2 dargestellte Wirkungsart zwischen der Kraft P und der Last Q, welche beide nach den Tangenten der in derselben Ebene liegenden concentrischen Kreisen BE und AF wirken. Setzt man den Halbmesser der Welle $BC = r$, und jenen des Rades $AC = R$; so erscheint BCA als ein Winkelhebel, an dessen Armen r und R die Kräfte P und Q senkrecht wirken, so, daſs also für das Gleichgewicht $P : Q = r : R$ . . . (1 Statt findet;
am Rade an der Welle verhält sich also die Kraft zur Last, wie der Halbmesser der Welle zum Halbmesser des Rades.

Um den Druck und dessen Richtung auf die Zapfen der Welle zu finden, ziehe man durch C parallel mit den Richtungen von P und Q die Linien Ca, Cb, und schneide diese in a und b den Kräften P und Q proportional ab (wobei unter Q auch das Gewicht der Welle und des Rades mit begriffen seyn soll), so stellt die Diagonale Cd des daraus construirten Parallelogramms ab sowohl die Gröſse als Richtung dieses Druckes dar, welchen die beiden Zapfen zusammen auszuhalten haben.

Man kann die obige Bedingung für das Gleichgewicht auch noch, ohne den Angriffspunct der Last unmittelbar in die Ebene des Rades zu verstetzen, auf folgende Weise in Fig. 86 ableiten:

Denkt man sich durch die Welle im Aufhängpuncte B der Last, einen senkrechten oder normalen Querschnitt, und darin an dem Berührungspuncte B der Schnur den Halbmesser cB gezogen, welcher also horizontal liegt, und damit in der Radebene parallel, aber nach entgegengesetzter Richtung den Halbmesser Cb geführt, und in b auf Cb senkrecht, also hier in lothrehter Richtung zwei gleiche Kräfte Q', Q'', jede $= Q$ nach entgegengesetzten Richtungen angebracht (wodurch das Gleichgewicht zwischen P und Q nicht gestört wird); so wirken an den Endpuncten der Geraden Bb zwei parallele Kräfte Q und Q' $(= Q)$, deren Resultirende eine durch den Halbirungspunct D (welcher wegen Gleichheit der Dreiecke Bcd und bCD in die Achse der Welle fällt) gehende lothrechte Kraft $= 2\,Q$ ist, aber nichts weiter als einen Druck auf die Zapfen bewirkt, und von diesen aufgehoben wird. Dagegen hat man für die beiden noch übrigen Kräfte P und Q'', welche in der Ebene des Rades in den Entfernungen Cb und CA vom Drehungspuncte C wirken, für das Gleichgewicht $Q''.\,Cb = P.\,CA$, d. i. $Qr = PR$, wie zuvor.

Soll die Last um die Höhe s gehoben werden, so muſs die Kraft einen Weg von $S = \frac{R}{r}s$ zurücklegen, so, daſs mit Rücksicht auf die vorige Gleichung sofort $S : s = Q : P$, also auch hier wieder der mehr erwähnte Satz von dem Verluste an Geschwindigkeit, wenn an Kraft gewonnen wird, bestätigt ist.

§. 101. Winden oder stehende Haspel. Liegt beim Rad an der Welle diese letztere nicht horizontal, sondern hat sie eine verticale Stellung; so heifst eine solche Maschine gewöhnlich eine Winde oder ein stehender Haspel, und dient auch in dieser Form zum Aufziehen von Lasten aus einer Tiefe oder auf eine Höhe. In der in Fig. 85 dargestellten Form, in welcher diese Winde gewöhnlich zum Aufziehen von Werkstücken und Baumaterialien auf Gebäude benützt wird, und wobei die Umdrehung der Welle durch Menschen geschieht, welche an die horizontal durch die Welle geschobenen Stangen oder Hebel a, a angestellt werden, wird diese inbesonders Tummelbaum genannt, und ist, wie man sieht, streng genommen, schon eine Verbindung des Rades an der Welle mit der Rolle.

Ist die zu hebende oder fördernde Last bedeutend grofs, so läfst man die Welle nicht mehr durch Menschen, sondern durch Pferde umdrehen, und nennt dann diese Maschine (Fig. 87) einen Pferde-Göpel, den man auch überhaupt zum Betrieb vieler industrieller Maschinen anwendet, in welchem Falle gewöhnlich ein mit der Welle in Verbindung stehendes gezahntes Rad AB, an welchem jetzt, statt an einem Seile, der Widerstand wirkt, die Bewegung fortgepflanzt wird.

Wie schon bemerkt, bleiben bei allen diesen Maschinen, wohin auch noch die Erd- und Schiffswinde (Fig. 88) gehört, die für das Rad an der Welle abgeleitete Grundgleichung: $Qr = PR$ für das Gleichgewicht in Kraft, wenn man unter r den Abstand des Angriffspunctes der Last Q (also z. B. bei dem Göpel in Fig. 87, den Halbmesser CA des Rades AB, sonst, wenn sich die Last an einem, sich um die Welle aufwickelnden Seile befindet, den Halbmesser der Welle um die halbe Seildicke vermehrt), und unter R den Abstand des Angriffspunctes der Kraft P von der Achse der Welle versteht.

§. 102. Gleichgewicht für ein System von Wellrädern. Wirkt an dem Rade an der Welle M (Fig. 89), wobei wieder r und R die Halbmesser der Welle und des Rades seyn sollen, in A die Kraft P, dagegen an der Welle im Puncte b, anstatt der damit im Gleichgewichte stehenden Last (§. 100) $p\left(=\frac{R}{r}P\right)$ das Rad N einer zweiten Welle durch irgend eine Verbindung, z. B. (wenn es möglich) durch die blofse Reibung, auf eine solche Weise, dafs sich die erste Welle in M nicht umdrehen kann, ohne zugleich auch das Rad N um einen eben so grofsen Bogen mit umzudrehen; so erscheint p für dieses zweite Wellenrad als Kraft, und kann sonach mit der an dieser Welle wirkenden Last Q im Gleichgewichte stehen, wenn $pR' = Qr'$ ist, wobei r' und R' die Halbmesser der Welle und des Rades N bezeichnen. Wird der vorige Werth von p in diese Gleichung gesetzt, so erhält man

$$\frac{RR'}{r} P = Qr', \text{ oder } P : Q = rr' : RR',$$

und da man dieses Gesetz offenbar auf jede beliebige Zahl von solchen Rädern ausdehnen kann, so verhält sich im Stande des Gleichgewichtes die Kraft zur Last, wie das Product aus den Halbmessern der Wellen zu jenen aus den Halbmessern der Räder (eine Relation, welche jener beim zusammengesetzten Hebel ganz analog ist, mithin gilt auch hier von der Bewegung, was dort hierüber bemerkt wurde).

Bringt man die Verbindung, wie sie in Fig. 90 dargestellt ist, durch Schnüre oder Riemen ohne Ende hervor, so erscheint bei einem solchen Systeme die Spannung jeder Schnur für die Welle als Last, und für das darauffolgende Rad als Kraft. Ist also $CA = R$, $Ca = r$, und haben R', r', dann R'', r'' dieselbe Bedeutung in den folgenden Wellrädern, und sind t, t' die Spannungen der beiden Schnüre ohne Ende $A'a$ und $A''a'$, so hat man nach §. 100: $P : t = r : R$, $t : t' = r' : R'$, $t' : Q = r'' : R''$, folglich, wenn man diese Proportionen in derselben Ordnung zusammensetzt, auch: $P : Q = rr'r'' : RR'R'' \ldots (2$, wobei es natürlich gleichgiltig ist, ob die Schnur, wie jene $A''a'$, gerade, oder wie jene $A'a$, gekreuzt über die Umfänge der Räder und Wellen gelegt ist, nur laufen im letztern Falle die Räder nach entgegengesetzter, im erstern nach einerlei Richtung um.

Sind S und s die von P und Q gleichzeitig zurückgelegten Wege, so wie s' und s'' jene der Puncte A' und A'', so ist, wie leicht zu sehen, da, wenn die Schnüre nicht gleiten, bestimmten Schnurlängen auch ganz gleiche Bogenlängen der Kreise, um welche sie gehen, entsprechen, und die Bogenlängen zweier fest mit einander verbundenen concentrischen Kreise, wenn sie sich um irgend einen Winkel drehen, sich wie ihre Halbmesser verhalten, sofort $S : s' = R : r$, $s' : s'' = R' : r'$, $s'' : s = R'' : r''$, folglich, wenn man diese Proportionen in dieser Ordnung zusammensetzt, auch $S : s = RR'R'' : rr'r''$, oder mit Rücksicht auf die vorige Relat. 2): $S : s = Q : P \ldots (3$, woraus wieder $PS = Qs$, oder der überall ausgesprochene Satz folgt.

§. 103. Verzahnte Räder. Da die im vorigen Paragraphe erwähnte Reibung der sich in ihrem Umfange unmittelbar berührenden Räder zur Fortbewegung derselben nicht hinreichend ist, so versieht man die Räder an ihrem Umfange (Fig. 91) mit gleich weit von einander abstehenden Zähnen, welche gehörig (wie im siebenten Kapitel des zweiten Abschnittes erörtert wird) in einander greifend, die Reibung oder die Schnüre im Systeme des vorigen Paragraphes ersetzen, so, dafs die Seilspannungen t, t dabei in Drücke oder Pressungen zwischen diesen Zähnen übergehen.

Die mit solchen Zähnen versehenen Wellen heifsen gewöhnlich Getriebe, und da auch hier die vorige Relation (2 gelten mufs, so kann man sagen, dafs sich bei einem Systeme von verzahnten Rädern im Stande des Gleichgewichtes, die Kraft zur Last wie das Product aus den Halbmesssern der Getriebe zu dem Producte aus den Halbmessern der Räder verhält. Eben so kann auch wieder die Relation (3 des vorigen Paragraphes hieher bezogen werden.

Da man durch ein solches Rädersystem jede beliebige Last Q mit einer gegebenen Kraft P auf sehr mannigfaltige Weise ins Gleichgewicht bringen kann, so darf man sich in einem gegebenen Falle nur zuerst über die Anzahl und Gröfse der Räder und Getriebe entscheiden, und dann die Verhältnifszahl aus Q durch P in passende Factoren zerlegen.

Soll z. B. eine Anordnung getroffen werden, durch welche eine Kraft $P = 20$ mit einer Last $Q = 7200$ Pfund im Gleichgewichte steht; so mufs (§. 102, Relat. 2) $\frac{R}{r} . \frac{R'}{r'} \ldots = \frac{Q}{P} = 360$ seyn. Da nun die Aufgabe unbestimmt ist, so wollen wir zuerst die Anzahl der Räder und Getriebe auf vier festsetzen, folglich die Zahl 360 in vier Factoren in ganzen Zahlen zerlegen; da aber auch diese Aufgabe noch unbestimmt ist und mehrere Auflösungen zuläfst, so wollen wir noch die Bedingung hinzufügen, dafs diese möglichst einander gleich seyn sollen. Dadurch wird $360 = 3.3.5.8$ oder auch $= 3.4.5.6$; wählt man diese letztere Zerlegung, so hat man für die Verhältnifszahlen zwischen den Halbmessern der Räder und den Halbmessern der auf denselben Achsen befindlichen Getriebe, wenn man diese Halbmesser $= 1$ setzt:

$$\frac{R}{r} . \frac{R'}{r'} . \frac{R''}{r''} . \frac{R'''}{r'''} = \frac{3}{1} . \frac{4}{1} . \frac{5}{1} . \frac{6}{1}.$$

Man kann also unter andern Anordnungen vier gezahnte Räder und Getriebe nehmen, wovon das erste Rad 3 Mal so grofs als das auf derselben Achse befindliche Getrieb, die folgenden aber 4, 5 und 6 Mal so grofs sind. Die Halbmesser der Räder und Getriebe rechnet man dabei bis zu dem Puncte, wo sich die Zähne berühren, was gewöhnlich in der halben Länge der Zähne geschieht, und nennt diese die mittleren oder mechanischen Halbmesser.

Auf dieselbe Weise wird man auch verfahren, wenn statt dem Verhältnifs von $P : Q$ jenes der Wege $S : s$ gegeben ist, weil (§. 102, Relat. 3) $S : s = Q : P$ Statt findet.

§. 104. Die gemeine Wagenwinde. Zu den einfachsten Anwendungen der verzahnten Räder gehört die gewöhnliche Wagenwinde, welche in einer gezahnten Stange B (Fig. 92), die sich in einer Culisse des Gehäuses auf- und abschieben läfst, und in welche ein Getrieb oa, das mit einem gezahnten Rade ob auf derselben Achse o sitzt, eingreift, so wie aus einem zweiten Getrieb Cd, welches mit der Kurbel CA in Verbindung steht, d. i. auf derselben Achse C sitzt und in das Zahnrad ob eingreift, besteht. Sind also die Halbmesser $oa = r$, $ob = R$, $Cd = r'$, $CA = R'$ und ist P die im Puncte A an dem Kurbelarm CA wirkende Kraft (senkrecht auf CA), so wie Q die in der Richtung BE der Zahnstange wirkende Last; so ist eben so wie in den vorhergehenden Paragraphen $P : Q = rr' : RR'$, und wenn S und s die gleichzeitig von der Kraft P und Last Q zurückgelegten Wege sind, auch $S : s = Q : P = RR' : rr'$.

Das Getrieb Cd und das Rad ob bilden zusammen ein sogenanntes Vorgelege; bleibt dieses weg und bringt man die Kurbel unmittelbar an der Achse o an, so hat man die Wagenwinde ohne Vorgelege, jedoch von geringer Wirksamkeit, indem dabei $P : Q = r' : R'$ Statt findet.

Ist z. B. bei der erstern Winde $r = r' = 1$, $R = 4$ und $R' = 10$ Zoll; so ist $P : Q = 1 : 40$, so dafs, wenn $P = 25$ Pfund ist, sofort $Q = 1000$ Pfund oder 10 Centner betragen kann. Soll aber diese Last selbst nur um einen Zoll gehoben werden, so mufs der Punct A der Kurbel, wo die Kraft wirkt, schon einen Weg von 40 Zoll in der Kreisperipherie beschreiben.

§. 105. Aufzugmaschinen. Unter den verschiedenen Hebzeugen, Winden und Aufzugmaschinen wird die in Fig. 93 dargestellte, ganz aus Gufs- und Schmiedeisen bestehende Winde sehr häufig, besonders auch in mechanischen Werkstätten benützt. Da ihre Einrichtung, so weit es hier nothwendig, schon aus der blofsen Zeichnung erhellet; so soll hier nur das für den Stand des Gleichgewichtes nöthige Verhältnifs zwischen Kraft und Last bestimmt werden.

Ist R der Halbmesser des auf der Achse der Seilwelle B befestigten Rades a, r jener des in dasselbe eingreifenden Getriebes b, welches sich auf der Kurbelachse befindet, und $cd = R'$ jener der Kurbel A, woran die Kraft P wirkt, während die Last Q mittelst eines Seiles, welches entweder, wenn die Last auf einen höher liegenden Punct aufzuziehen ist, über eine an diesem Orte angebrachte feste Rolle, oder wenn die Last aus der Tiefe zu heben ist, vertical abwärts geht, auf die Welle B, deren Halbmesser $= r'$ seyn soll, wirkt; so ist ganz einfach für das Gleichgewicht $P : Q = rr' : RR'$, und wenn, wie in den vorhergehenden Paragraphen, S und s die gleichzeitig von der Kraft P und Last Q zurückgelegten Wege sind,

$$S : s = Q : P = RR' : rr'.$$

Ist z. B. $R = 12$, $r = 1^1/_2$, $R' = 15$ und $r' = 6$ Zoll, so ist $P : Q = 1 : 20$, so dafs, wenn z. B. für zwei Menschen, welche an dieser Maschine an zwei Kurbeln arbeiten, $P = 50$ Pfund ist, sofort $Q = 1000$ Pfund oder 10 Centner seyn kann (immer mit Uebergehung der Nebenhindernisse), welche Last jedoch wieder 20 Mal langsamer gehoben wird, als die Angriffspuncte A der Kraft an den Kurbeln bewegt werden.

§. 106. Kraniche. Diese äufserst nützlichen Aufzugmaschinen, welche je nach dem verschiedenen Zwecke, dem sie zu entsprechen haben, auch verschieden construirt werden, bestehen jedoch alle der Hauptsache nach, wie der in Fig. 94, gewöhnlich in Giefsereien vorkommende einfache Kranich, aus einer um ihre Achse FE drehbaren aufrecht stehenden Säule M, mit welcher ein horizontal oder schief hinaus laufender Balken N, der Schnabel (woher auch die Benennung) durch Streben T fest und solid verbunden, und an welchem die feste Rolle c angebracht ist, über welche das zur Hebung der Last Q vorhandene Seil oder die Kette $Jdta$ geht, um auf einer horizontalen Seilwelle Ca, an deren Achse zugleich ein gezahntes Rad CB befestigt ist, in welches das mit der Kurbel OA auf derselben Achse O befindliche Getrieb OB eingreift, aufgewunden zu werden. Ist die Last bis auf eine bestimmte Höhe gehoben, so wird diese gewöhnlich durch Umdrehung der Säule M an einem andern, jedoch noch im Bereiche des Schnabels N liegenden Punct niedergelassen.

Ist nun bei diesem hier dargestellten Kranich $AO = R$, $OB = r$, $CB = R'$ und $Ca = r'$; so hat man, da die Spannung des Seiles, indem die Last Q an der beweglichen Rolle $c'd$ hängt (§. 96), $t = \frac{1}{2} Q$ ist (wobei unter Q das Gewicht der beweglichen Rolle mitbegriffen ist), und wenn P die an der Kurbel in A (senkrecht auf OA) wirkende Kraft ist, wegen $P : t = rr' : RR'$ (§§. 102, 103), sofort $P : Q = rr' : 2RR'$. Auch ist für die gleichzeitigen Wege S und s der Kraft P und Last Q, wieder $S : s = Q : P = 2RR' : rr'$.

Wäre z. B. $R = 12$, $R' = 24$, $r = 2$ und $r' = 6$ Zoll; so wäre $P : Q = 2.6 : 2.12.24 = 1 : 48$, dagegen auch $S : s = 48 : 1$.

Bei gröfsern Kranichen, wie sie z. B. zum Aus- und Einladen von Waaren in Schiffe angewendet werden, bringt man doppelte Räder und Getriebe zu beiden Seiten der Seilwelle von verschiedener Gröfse so in Verbindung, dafs man nach Verschiedenheit der Gröfse der Last entweder das gröfsere Getrieb in das kleinere Rad oder das kleinere Getrieb in das grössere Rad (durch eine leichte Aus- und Einrückung) eingreifen lassen, und dadurch die Kraft (jedoch nur auf Kosten der Geschwindigkeit) vergröſsern kann, ohne daſs die Zahl der Arbeiter an den Kurbeln vermehrt werden darf. So wird bei dem in Fig. 95 skizzirten, sehr zweckmäſsig construirten Schiffskranich (welcher in Liverpool auf einem der Quais aufgestellt ist) im letztern Falle die Wirksamkeit der Kraft auf das Doppelte gesteigert.

Ist die Last nicht hoch zu heben, so bringt man oft auch zur Vergrösserung der Kraft, anstatt der angegebenen beweglichen Rolle $c'd$ einen Flaschenzug mit in Verbindung.

Bei manchen Kranichen läſst sich die aufgezogene Last auch noch längs des Schnabels N verschieben, um für die Puncte, wo die Last aufgezogen und wieder niedergelassen wird, einen gröſsern Spielraum zu haben. Ja es gibt sogar, um darin noch weniger beengt zu seyn, wie auf Eisenbahnen, in Maschinenwerkstätten u. s. w. auf Räder stehende transportable Kraniche, welche sich sammt der aufgezogenen Last an einen beliebigen Punct zum Abladen derselben bringen lassen.

Die schiefe Ebene.

§. 107. Erklärung. Eine gegen den Horizont oder eine horizontale Ebene MN (Fig. 96) unter irgend einem Winkel geneigte Ebene MP heiſst eine schiefe Ebene. Fällt man dabei von einem ihrer Puncte B das Perpendikel BC auf die horizontale Ebene, zieht in dieser Ebene MN von C aus auf die Durchschnittslinie MO beider Ebenen eine Senkrechte CA, so wie auch aus diesem sich ergebenden Puncte A auf dieselbe Gerade MO in der Ebene MP die Senkrechte AB (welche sofort durch den ursprünglichen Punct B gehen muſs), so bildet der Winkel $BAC = \alpha$ des rechtwinklichten Dreieckes ACB, in welchem also AC eine horizontale und BC eine verticale Linie ist, den Neigungswinkel der schiefen Ebene. In der Regel wird immer nur dieses rechtwinkliche Dreieck ACB gezeichnet und unter AB die Länge, BC die Höhe und AC die Grundlinie der schiefen Ebene verstanden.

§. 108. Gleichgewichtsbedingung für einen auf einer schiefen Ebene liegenden schweren Körper. Wirken überhaupt auf einen, auf einer schiefen Ebene befindlichen Körper mehrere Kräfte, so kann das Gleichgewicht nur dann bestehen, wenn diese eine Resultirende haben, welche normal auf der schiefen Ebene steht und zugleich (§§. 61—63) durch den Stützpunct oder einen Punct der Berührungsfläche geht.

Liegt also ein Körper, dessen Schwerpunct in O (Fig. 97) und Gewicht $= Q$ seyn soll, auf der schiefen Ebene AB und wirkt in der Ebene ABC, welche verlängert durch den Schwerpunct O gehen soll, durch diesen Punct eine Kraft P in der Richtung OE; so mufs die Resultirende aus dieser Kraft P und der durch O lothrecht von O nach F wirkenden Kraft Q in der auf AB senkrechten Linie OD liegen. Nimmt man daher in dieser Geraden einen Punct d an und construirt das Kräftenparallelogramm, so mufs für das Gleichgewicht 1)..$P : Q = Oa : Ob$, und wenn R die Resultirende aus P und Q ist, 2)..$R : Q = Od : Ob$ seyn, wobei R zugleich den auf die schiefe Ebene Statt findenden Normaldruck bezeichnet.

§. 109. **Besondere Fälle.** 1. Ist die Kraft P parallel mit der schiefen Ebene AB (Fig. 97, *a*), so ist wegen Ähnlichkeit der Dreiecke Obd und ABC sofort $P : Q : R = BC : AB : AC$,

also $P = \frac{BC}{AB} Q$ . . . (1 und $R = \frac{AC}{AB} Q$ . . . (2,

d. h. es verhält sich dabei die Kraft zu dem Gewichte des Körpers, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

2. Ist dagegen die Kraft mit der Grundlinie AC (Fig. 97, *b*) parallel, so ist (wegen Ähnlichkeit der Dreiecke Oad mit ABC) eben so $P : Q : R = BC : AC : AB$,

woraus $P = \frac{BC}{AC} Q$ . . . (3 und $R = \frac{AB}{AC} Q$ . . . (4

folgt, oder es verhält sich für das Gleichgewicht die Kraft zum Gewichte des Körpers, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Grundlinie.

Anmerkung 1. Denkt man sich im ersten der beiden besondern Fälle, nämlich in Fig. 97, *a* den Körper O durch die Kraft P über die schiefe Ebene $AB = S$ hinaufgezogen; so hat P den Weg S und die Last Q den Weg $s = BC$ zurückgelegt, und es ist also $S : s = AB : BC$ oder mit Rücksicht auf die Relation (1 auch $S : s = Q : P$, so dafs auch hier wieder $PS = Qs$ ist, oder der Weg der Kraft in demselben Verhältnifs gröfser seyn mufs als sie selbst kleiner als die Last ist. Ganz dasselbe gilt auch für die übrigen Fälle.

Anmerkung 2. Setzt man in dem allgemeinen Fall (Fig. 97) den Neigungswinkel der schiefen Ebene $BAC = \alpha$, jenen, welchen die Richtung der Kraft P mit der lothrechten Linie OF bildet, $= \alpha'$; so ist im Dreiecke Obd der Winkel $bOd = \alpha$ und Winkel $Obd = \alpha'$, und da sich nach einem Satze der Trigonometrie die Seiten eines Dreieckes wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten, so hat man, statt der Seiten gleich die Kräfte setzend:

$P : Q : R = Sin\,\alpha : Sin\,(\alpha + \alpha') : Sin\,\alpha'$ [weil $Sin\,b\,d\,O = Sin\,(\alpha+\alpha')$ ist]. Für den ersten der beiden besonderen Fälle, wenn nämlich P mit AB parallel ist, wird $\alpha' = 90 - \alpha$, daher $P : Q : R = Sin\,\alpha : 1 : Cos\,\alpha$, also $P = Q\,Sin\,\alpha$ . . . (1 und $R = Q\,Cos\,\alpha$ . . . (2.
Für den zweiten Fall, in welchem P mit AC parallel läuft, wird $\alpha' = 90°$, daher $P : Q : R = Sin\,\alpha : Cos\,\alpha : 1$ und daraus

$$P = Q \frac{Sin\,\alpha}{Cos\,\alpha} = Q\,tang\,\alpha \; . . . (3 \quad \text{und} \quad R = \frac{Q}{Cos\,\alpha} . . . (4.$$

Beispiel 1. Liegt ein Körper im Gewichte von 12 Pfund auf einer schiefen Ebene von 30 Grad Neigung und soll er durch eine mit der schiefen Ebene parallelen Kraft P vom Hinabgleiten verhindert, oder durch diese im Gleichgewicht erhalten werden, so muſs, da sich in einem rechtwinklichten Dreieck ABC, in welchem der Winkel $BAC = 30°$ ist, $AB : BC = 1 : \frac{1}{2}$ verhält (die Seiten in Fig. 97, c sind nämlich, wenn man $AB = 1000$ setzt: $BC = 500$ und $AC = 866$, oder wenn man AB zur Einheit nimmt, $BC = {\cdot}5$ und $AC = {\cdot}866$), sofort, Relation (1, $P = \frac{1}{2} Q = 6$ Pfund seyn. Der Normaldruck wäre, Relation (2,

$$R = \frac{{\cdot}866}{1} \times 12 = 10{\cdot}39 \text{ oder nahe } 10\tfrac{2}{5} \text{ Pfund.}$$

Sollte dagegen die mit der Grundlinie AC parallele Kraft bestimmt werden, so müſste diese (Relat. 3) $= \frac{{\cdot}5}{{\cdot}866} 12 = 6{\cdot}93$ Pf. seyn, während der Normaldruck auf die Ebene jetzt (Relat. 4) $= \frac{1}{{\cdot}866} 12 = 13{\cdot}9$ Pfund betragen würde.

Die trigonometrische Auflösung dieser Aufgabe führt natürlich zu denselben Ergebnissen.

2. Sind zwei Körper von den Gewichten Q und Q' durch eine über eine Rolle N (Fig. 98) gehende Schnur mit einander verbunden und liegen diese auf zwei schiefen Ebenen von einerlei Höhe, jedoch verschiedenen Neigungswinkeln α und α'; so findet man die Bedingung für das Gleichgewicht dieser beiden Körper, wenn die Schnurstücke ON und $O'N$ parallel mit den schiefen Ebenen AC und BC gespannt sind, auf folgende Art.

Für die schiefe Ebene AC muſs die zur Erhaltung des Körpers O nöthige Kraft (§. 109, Gl. 1) $P = \frac{CD}{AC} Q$ und für die zweite Ebene $P' = \frac{CD}{BC} Q'$ seyn, und da ferner die Spannung der Schnur im Stande des Gleichgewichtes nach jeder Seite hin gleich groſs, also $P = P'$ seyn muſs, so folgt $\frac{CD}{AC} Q = \frac{CD}{BC} Q'$ oder $Q . BC = Q' . AC$, d. i. $Q : Q' = AC : BC$, d. h. es müssen sich die Gewichte der beiden Körper, wie die Längen der schiefen Ebenen verhalten, worauf sie liegen.

§. 110. Das Lauf- oder Tretrad. Zu den einfachen Anwendungen der schiefen Ebene kann man unter Anderen das

Laufrad rechnen, welches, wie aus der Darstellung in Fig. 99 ersichtlich ist, aus einer horizontalen Welle CB, woran die Last Q wirkt und einer mit dieser concentrisch verbundenen Trommel MN besteht, in deren inneren oder concaven Theil ein oder mehrere Arbeiter, indem sie von A gegen M vorwärts schreiten und ihre Füſse gegen die parallel mit der Welle oder Achse der Trommel befestigten Leisten u, u'... stemmen, durch ihr Gewicht die Umdrehung dieser Trommel sammt der Welle bewirken. Denkt man sich die zu überwindende Last durch ein Gewicht Q dargestellt, welches an einer Schnur auf der Welle vom Halbmesser $CB = r$ aufgewunden wird, setzt den Halbmesser der Trommel oder des Rades $CA = R$ und berücksichtigt, daſs man die Wirkung des Arbeiters hier so ansehen kann, als ob er beständig über die schiefe Ebene ac (welche das Rad im Puncte A tangirt) hinaufginge und dadurch die Puncte u, u'... des innern Radumfangs nach A herabbewegte; so bringt das in A lothrecht wirkende Gewicht P des Arbeiters nach der Richtung oder parallel mit der schiefen Ebene ca (also nach der Tangente des Kreises CA) eine Kraft p zur Umdrehung des Rades hervor, wofür (§. 109, Gl. 1) $p = \frac{cd}{ac} P$ oder da, wegen Ähnlichkeit der Dreiecke acd und ACD, $\frac{cd}{ac} = \frac{CD}{AC}$ ist, auch $p = \frac{CD}{AC} P$ . . . (1 wird. Ferner ist, wie am Rad an der Welle (§. 100) $p : Q = r : R$ oder $Qr = pR$, oder wenn man für p den Werth aus (1 setzt, und da $AC = R$ ist, auch $Qr = P.CD$; es ist also so, als ob an den um C drehbaren Hebel BD am Puncte B die Last Q und in D die Kraft oder das Gewicht P des Arbeiters wirksam wäre.

Da übrigens die vorige Kraft p zugleich auch die Anstrengung ausdrückt, mit welcher der Arbeiter über die schiefe Ebene ac hinaufgeht, so ist das Verhältniſs dieser Anstrengung zur Last Q genau so, wie bei dem Rad an der Welle ($p : Q = r : R$), also in dieser Hinsicht nichts gewonnen.

Setzt man $p = \frac{1}{5} P$, d. h. nimmt man an, daſs der Mensch mit einer Anstrengung, welche den fünften Theil seines Gewichtes beträgt, für eine längere Arbeitsdauer am meisten leistet, so ist auch (Gleich. 1)

$$\frac{CD}{CA} = \frac{1}{5} \quad \text{oder} \quad CD = \frac{1}{5} R,$$

wodurch der Punct A im Laufrade bestimmt ist, an welchem der Arbeiter am vortheilhaftesten wirkt. In frühern Zeiten wurden diese Laufräder weit häufiger und oft sehr unzweckmäſsig, wie z. B. zum Auf- und Abladen von Waaren mittelst Kranichen, als heut zu Tage angewendet.

§. 111. Die Tretscheibe oder das Tretrad.

Eine ähnliche Anwendung der schiefen Ebene findet an dem öfter in Bräuhäusern, an den sogenannten Ochsenmühlen vorkommenden Tretrade Statt, welches im Wesentlichen aus einer schiefliegenden, mit einer darauf senkrecht stehenden Welle verbundenen kreisrunden Scheibe MN (Fig. 100) besteht, die sammt der Welle um ihre Zapfen oder Achse mn durch das Gewicht von Pferden oder Ochsen, die in A scheinbar gegen M vorschreiten, im Grunde aber durch das beständige Zurückweichen der Scheibe (welche auf ihrer obern Fläche wieder mit Trittleisten versehen ist) immer an derselben Stelle bleiben, umgedreht wird.

Die für das Gleichgewicht geltenden Relationen sind genau dieselben, wie im vorigen Paragraphe. Denkt man sich nämlich den durch Umdrehung des Tretrades zu überwindenden Widerstand wieder auf den Umfang der Welle B, deren Halbmesser $= r$ seyn soll, reducirt und in diesen Abstand gleich Q, setzt das Gewicht der in A wirkenden Thiere $= P$, und den Halbmesser $CA = R$; so ist wieder, wenn die Tretscheibe an dem Puncte A mit dem Horizont den Winkel cad bildet, die auf Umdrehung der Scheibe wirksame Kraft $p = \frac{cd}{ca} P$; ferner ist auch $pR = Qr$, und da p auch hier die Anstrengung der Thiere beim Hinaufsteigen über die schiefe Ebene ac ausdrückt, so steht diese mit der Last Q in demselben Verhältnifs von $r : R$, wie die Kraft zur Last bei dem Rad an der Welle.

Da auch bei den Ochsen und Pferden der fünfte Theil ihres Gewichtes die mittlere Zugkraft oder vortheilhafteste Anstrengung überhaupt gibt; so mufs auch hier der Punct A der Scheibe, auf welchen diese Thiere zu stellen sind, so gewählt werden, dafs im rechtwinklichten Dreiecke acd, wobei cd eine Tangente an die Kreischeibe bildet, $cd = \frac{1}{5} ac$ wird.

Der Keil.

§. 112. Erklärung. Ein senkrechtes Prisma, dessen beide Grundflächen $abc = efg$ (Fig. 101) gleichschenklichte Dreiecke sind, wird Keil genannt; dabei heifsen die Flächen ag und bg die Seiten, jene af der Rücken, die Kante gc die Schneide und $cd = gh$ die Höhe des Keils. Das halbe Prisma, dessen Grundflächen die rechtwinklichen Dreiecke $acd = egh$ sind, wird öfter einfacher, und gegen diesen der vorige doppelter Keil genannt.

Man wendet den Keil gewöhnlich entweder dazu an, um einen Körper (wie z. B. Holz) zu spalten, oder (wie in Steinbrüchen) von einem andern loszutrennen, oder auch um im Gegentheil zwei Körper fest und stark an einander zu pressen; in allen diesen Fällen wirkt die Kraft (die gewöhnlich in Schlägen besteht) senkrecht auf den Rücken, während die Last entweder senkrecht auf die Höhe (also parallel mit dem Rücken) oder senkrecht auf die Seiten des Keils wirkt.

§. 113. Bedingungen für das Gleichgewicht am Keil. Wirkt bei dem einfachen Keil (Fig. 102) der Widerstand Q parallel mit dem Rücken BC, dagegen die Kraft P darauf senkrecht; so tritt für das Gleichgewicht genau dieselbe Bedingung, wie für die schiefe Ebene im zweiten besondern Fall des §. 109 ein; es ist nämlich $P : Q = BC : AC$, und da daraus auch $2P : Q = 2BC : AC$ oder auf den doppelten Keil (Fig. 103) bezogen und $2P = P'$ gesetzt, ebenfalls 1) . . . $P' : Q = BB' : AC$ Statt findet, so verhält sich überhaupt beim Keile in diesem Falle die Kraft zur Last, wie der Rücken zur Höhe des Keils.

Wirkt dagegen der Widerstand auf den Keil ABB' (Fig. 104) senkrecht auf die Seiten derselben, so müssen die drei Kräfte P, Q, Q auf irgend einen Punct a wirkend, unter sich im Gleichgewichte stehen, folglich ist $P : Q = ac : ab = BB' : AB$ . . . (2 (vermöge der Ähnlichkeit der Dreiecke acb und ABB'), d. h. es verhält sich in diesem Falle die Kraft zum Widerstande, wie der Rücken oder Kopf des Keils zu der Seite oder Länge desselben.

Hieraus folgt auch, dafs der Keil um so wirksamer ist, je kleiner BB' gegen AB, d. i. je spitzer er ist. Auch wird diese letztere Hypothese, nämlich dafs der Widerstand auf die Seiten des Keils senkrecht wirke, in allen Fällen, wo derselbe zwischen zwei oder in einen Körper, um ihn zu spalten, eingetrieben wird, angenommen.

Hat die Kraft P in Fig. 103 den Weg AC zurückgelegt, so ist der Widerstand Q um BB' gewichen, so, dafs wenn man die von P und Q gleichzeitig zurückgelegten Wege mit S und s bezeichnet, sofort $S : s = AC : BB'$ oder, mit Rücksicht auf die obige Relation 1), auch $S : s = Q : P$ Statt findet.

Im zweiten Falle oder in Fig. 104 weicht der Widerstand Q um $nC + mC = 2nC$, während die Kraft P den Weg $AC = S$ zurücklegt; es ist aber

$$AC : Cn = AB : BC \quad \text{oder} \quad AC : 2Cn = AB : 2BC,$$

d. i. $S : s = AB : BB'$ und mit Rücksicht auf die hieher gehörige Relation 2) auch $S : s = Q : P$, also in allen Fällen wieder ganz analog mit dem bei den übrigen Maschinen ausgesprochenen Grundsatze $PS = Qs$.

Anmerkung. Der Keil kommt, aufser seiner ausgesprochenen Form und Anwendung, auch bei sehr vielen Werkzeugen, wie bei Messern, Scheeren, Äxten, Stemmeisen, Grabsticheln, Nägeln, Hobeleisen etc., als Hervorragungen bei den Feilen, Sägen u. s. w., und zwar nicht blofs in der prismatischen, sondern auch in der pyramidalen Form vor, wobei der Neigungswinkel je nach dem Zwecke und der verschiedenen Beschaffenheit des zu bearbeitenden Materials ebenfalls verschieden ist.

Die Schraube.

§. 114. Erklärungen. Ist $a\,d'$ (Fig. 105) ein Rechteck, dessen Höhe $a\,d$ gleich der Höhe, und Grundlinie $a\,a$ gleich dem Umfange des geraden Cylinders $A\,E$ (von kreisförmiger Basis) ist; werden ferner die Seiten $a\,d$ und $a'd'$ in den Puncten f, g, h und f', g', h' in eine gleiche Anzahl gleicher Theile getheilt und die Geraden $a\,f'$, $f\,g'$... gezogen, welche als eine Reihe von schiefen Ebenen von einerlei Grundlinien $a\,a'$ und gleichen Höhen $a'b$ angesehen werden können, und legt man endlich dieses Rechteck an den Cylinder so an, daſs $a\,d$ auf die Kante $A\,D$ fällt, und wickelt dasselbe um den Cylinder vollends herum, wodurch auch die zweite parallele Seite $a'd'$ mit $A\,D$, ferner auch die Puncte f', f mit F, g', g mit G u. s. w. zusammenfallen; so bilden diese geraden Linien $a\,f'$, $f\,g'$... eine einzige continuirliche krumme Linie $A\,K\,F\ldots D$ auf der Mantelfläche des Cylinders von durchaus gleicher Steigung, welche Schraubenlinie genannt wird. Dabei heiſst jede Windung, wie $A\,K\,F$ ein Schraubengang, die Entfernungen $af = AF = FG$... bilden die Höhe der Schraubengänge, und wenn man sich die Schraubengänge als Hervorragungen aus der Cylinderfläche denkt, so werden sie Schraubengewinde und der Cylinder selbst die Spindel genannt. Diese Gewinde sind entweder, wie in Fig. 106, *a*, dreieckig (vom Querschnitt $p\,o\,q$) oder, wie in Fig. 106, *b*, viereckig (vom Querschnitt $n\,q$), nämlich scharf oder flach. In beiden Fällen ist $a\,b$ die Höhe eines Schraubenganges, so wie der Abstand $c\,i$ eines Punctes i in der Mitte der Hervorragung bis zur Achse der Spindel der mittlere Halbmesser der Schraube. (Dieser bildet also das Mittel zwischen dem Halbmesser $n\,m$ des Kerns der Spindel, Fig. 106, *b*, und jenem $n'm'$ der die Gewinde berührenden Cylinderfläche.).

Wird ein Prisma $A\,B$ (Fig. 107) cylindrisch ausgebohrt, so, daſs der Kern der Spindel genau durchgeht, und werden dann noch in diese Höhlung Vertiefungen nach der Schraubenlinie und der Form der Gewinde der Spindel eingeschnitten, so, daſs diese hineinpassen; so heiſst dieser Theil die Schraubenmutter und es wird, wenn diese festgehalten und die Spindel um ihre Achse, oder umgekehrt, diese um die feststehende Spindel umgedreht wird, im ersten Falle die Spindel, im letztern die Mutter bei einer jeden vollständigen Umdrehung um die Höhe eines Schraubenganges nach der Achse der Spindel fortrücken, gerade so, als würde ein Körper über die schiefe Ebene $a\,f'$ (Fig. 105) hinaufgezogen.

Anmerkung. Manchmal läſst man zwischen zwei auf einander folgenden Gewinden noch einen oder mehrere Schraubengänge durchlaufen, wodurch man eine Schraube mit mehrfachen, und zwar insbesondere mit zwei-, dreifachem Gewind u. s. w. erhält, je nachdem zwischen den Hauptgängen noch ein, zwei u. s. w. Schraubengänge durchgehen. Da die zwischenliegenden Gewinde auf die ursprüngliche Höhe des Schraubenganges keinen Einfluſs haben, so steigen z. B. bei einer dreifachen Schraube bei einer Umdrehung der Spindel drei Gewinde heraus und diese haben auch in der Basis der Spindel drei Auslaufpuncte, die in der Kreisperipherie gleich weit von einander abstehen.

§. 115. Bedingung des Gleichgewichtes bei der Schraube. Denkt man sich die Schraubenspindel in einer verticalen Stellung mit einem Gewichte (ihr eigenes mitgerechnet) Q belastet und diese, während die Schraubenmutter fest bleibt, durch eine nach der Tangente der Spindel wirkende Kraft P' so umgedreht, daſs dadurch die Spindel mit der Last in die Höhe steigt; so hat man, da diese Wirkungsart eigentlich in dem Hinaufziehen der Last Q über eine fortlaufende schiefe Ebene durch eine mit der Grundlinie parallele Kraft P' besteht, nach §. 109 (zweiten Fall) und mit Beziehung auf Fig. 105 sofort für das Gleichgewicht $P' : Q = a'f' : a a'$ oder da $a a' =$ dem Umfange des Kreises vom Halbmesser r [worunter hier der mittlere (vorige Paragraph) verstanden wird], also $a a' = 2 r \pi$ (wo $\pi = 3 \cdot 1416$) und $a'f' = AF$ die Höhe des Schraubenganges ist, die wir $= h$ setzen wollen, auch: $P : Q = h : 2 r \pi \ldots$ (m,
da man jedoch in der Regel die Kraft nicht unmittelbar an dem Umfang der Spindel, sondern in einer gröſsern Entfernung, z. B. an einem Hebel oder einem auf der Spindel (wie ein Rad an der Welle) befestigten Rade wirken läſst; so sey R diese Entfernung von der Achse der Spindel und P die dort senkrecht auf den Halbmesser R wirkende Kraft, so hat die auf den Umfang der Spindel reducirte Kraft die Gröſse (aus $P : P' = r : R$) $P' = P \frac{R}{r}$, mithin, wenn man diesen Werth statt P' in die vorige Relation (m setzt (wodurch aber streng genommen, wenn die Schraube als einfache Maschine angesehen werden soll, der Schraubenkopf als Cylinder vom Halbmesser R erscheint)

$$P : Q = h : 2 R \pi \ldots (1,$$

d. h. es verhält sich die Kraft zur Last, wie die Höhe eines Schraubenganges zu dem Wege, welchen der Angriffspunct der Kraft während einer ganzen Umdrehung der Schraube macht.

Dieses Verhältnifs bleibt offenbar auch dasselbe, wenn sich anstatt der Spindel die Mutter um die feststehende Spindel dreht. Da die Schraube nur selten zum wirklichen Heben der Last Q verwendet wird, so mufs man in andern Fällen unter Q die Stärke des Druckes oder der Pressung verstehen, welcher durch Umdrehung der Spindel oder Mutter hervorgebracht wird. Ist die Schraube mehrgängig, so hat man unter h die Höhe zu verstehen, um welche die Spindel bei einer ganzen Umdrehung aus der Mutter heraussteigt, also bei einer zweifachen die Höhe von zwei Gewinden u. s. w.

Die obige Relation (1 gibt hier unmittelbar den bisher bei allen Maschinen nachgewiesenen Satz von $S : s = Q : P$ oder $PS = Qs$, nach welchem nämlich die Kraft in ihren Weg multiplicirt, dem Producte aus der Last in den von ihr gleichzeitig zurückgelegten Weg gleich seyn mufs.

Übrigens kann noch bemerkt werden, dafs die vorige Relation (3 ungeändert bleibt, man mag der Schraubenmutter nur ein einziges, oder zur Vertheilung der Last, wie es immer geschieht, mehrere Gewinde geben; enthält diese z. B. ihrer Höhe oder Dicke nach zwej Schraubengänge, so kommt auf jeden derselben die Last $\frac{1}{2}Q$, zu deren Überwindung allerdings nur die halbe Kraft oder $\frac{1}{2}P$ nothwendig ist; da aber dieser Widerstand zwei Mal vorkömmt, so ist dazu auch $\frac{1}{2}P$ zwei Mal nöthig, was wieder die ganze Kraft P gibt, und so auch in den übrigen Fällen.

Die Schraube ist in den Künsten und Gewerben unentbehrlich und dient zu den mannigfaltigsten Zwecken; dabei ist entweder die Mutter fest und die Spindel beweglich, wie bei den Münz-, Buchdrucker-, Öl-, Papier-, Siegel- und vielen anderen Pressen, den Schraubzwingen, Schraubstöcken u. s. w., oder es steht die Spindel fest, während die Mutter beweglich ist, wie bei den Servietten-, Karten-, Buchbinderpressen u. s. w.

Beispiel. Um das Verhältnifs der Kraft zur Last bei einer Schraube zu bestimmen, bei welcher die Höhe eines Schraubenganges einen Zoll und die Entfernung des Angriffspunctes der Kraft von der Achse der Spindel fünf Fufs beträgt, hat man, Alles in Fufsmafs ausgedrückt, nach der obigen Proportion (1 $P : Q = \frac{1}{12} : 10 \times 3{\cdot}1416 = 1 : 376{\cdot}99$; also nahe genug: $P : Q = 1 : 377$, wobei jedoch auf die bedeutende Reibung (die im siebenten Kapitel behandelt wird) keine Rücksicht genommen ist. Bei der wirklichen Bewegung mufs der Angriffspunct der Kraft P schon einen Weg von 377 Zoll oder Fufs zurücklegen, bis die Spindel oder Mutter mit der Last nur um einen Zoll oder einen Fufs längs der Achse fortrückt.

§. 116. Die Schraube ohne Ende. Läfst man eine Schraubenspindel F (Fig. 108), deren Gänge eine Höhe haben, die der Entfernung der nach der Neigung der Gewinde schief eingeschnittenen Zähne eines gezahnten Rades N gleich ist, in dieses Stirnrad so eingreifen, dafs die Achse der Spindel nach der Ebene dieses Rades liegt, so heifst eine solche Verbindung (also schon eine zusammengesetzte

Maschine) **eine Schraube ohne Ende**, manchmal auch ein **Schneckenrad**, und es wird durch eine ganze Umdrehung der Spindel (man mag nun einen oder mehrere Schraubengänge gleichzeitig in das Rad eingreifen lassen), welches gewöhnlich mittelst einer an der Achse der Spindel befestigten Kurbel AED geschieht (wobei die Kraft an dem Griffe ED wirkt), das um seine Achse C drehbare Rad um einen Zahn (= der Höhe eines Schraubenganges) fortgeschoben oder umgedreht, und dadurch irgend ein Widerstand überwunden, den man sich für die allgemeine Rechnung als eine Last Q denken kann, welche auf einer mit der Achse des Rades verbundenen Welle CB aufgewunden wird.

§. 117. Gleichgewichtsbedingung. Ist $CB = r$ der Halbmesser dieser Welle, R der mittlere Halbmesser des Rades N (diesen nämlich bis zur Mitte der Zähne gerechnet), an welchem eine Kraft $= P'$ wirken müfste, um mit der Last Q im Gleichgewichte zu stehen; ist ferner h die Höhe eines Schraubenganges der Spindel (also auch die Theilung der Zähne des Rades), und R' der Halbmesser der Kurbel (Länge des Kurbelknies), woran die Kraft P wirkt; so ist, da P' als Last für die Spindel wirkt (§. 115, Gl. 1) $2R'\pi . P = hP'$, und (§. 100) $P'R = Qr$. Diese Gleichung mit der erstern multiplicirt, gibt, da P hinausfällt:

$$2RR'\pi P = Qhr, \text{ oder } P : Q = rh : 2RR'\pi \quad \ldots (1.$$

Diese Relation involvirt ganz sichtbar wieder jene von $S : s = Q : P$, wo S und s wieder die gleichzeitigen Wege von P und Q bezeichnen. Ist z. B. $h = 1$, $r = 3$, $R = 6$ und $R' = 10$ Zoll, so ist $P : Q = 3 : 377$, oder nahe wie $1 : 126$; die Last wird jedoch, wenn der Punct D der Kurbel, woran die Kraft wirkt, schon einen Weg $= 126$ durchlaufen hat, erst einen Weg $= 1$ zurückgelegt haben.

§. 118. Die englische Winde. Anstatt der gezahnten Stange der gewöhnlichen Wagenwinde (§. 104) besitzt die äufserst wirksame englische Winde eine Schraubenspindel H (Fig. 109), deren kreisrunde Mutter B an ihrem Umfange mit einer Schraube ohne Ende C so in Verbindung steht, dafs durch Umdrehung dieser Spindel C, mittelst der Kurbel CA, sofort auch das Rad oder die Mutter B, welche zur Verminderung der Reibung auf einer kleinern runden Scheibe a aufliegt, umgedreht, und dadurch die Spindel H sammt der darauf wirkenden Last Q gehoben oder überhaupt bewegt wird.

Ist P die am Kurbelarme $AC = R'$ wirkende Kraft, h' die Höhe eines Schraubenganges an der Spindel C der Schraube ohne Ende, R der Halbmesser des als Schraubenmutter für die Hauptspindel H dienenden, an der Peripherie mit schiefen Zähnen versehenen Rades B, und h die Höhe der Schraubengänge der Spindel H; so ist, wenn man die am Umfange des Rades B für das Gleichgewicht nöthige Kraft $= P'$ setzt (welche sofort für die Spindel C die Last bildet) (§. 115):

$$P : P' = h' : 2R'\pi \text{ und } P : Q = h : 2R\pi,$$

oder wenn man diese beiden Proportionen zusammensetzt:

$$P : Q = hh' : 4\pi^2 RR' = hh' : 39{\cdot}48\,RR' \ldots (1.$$

Ist z. B. $h' = \frac{7}{3}$, $h = \frac{3}{2}$, $R = 6$ und $R' = 12$ Zoll, so hat man

$$P : Q = 1 : 2842{\cdot}6,$$

woraus die ungemeine Wirksamkeit dieser Winde erhellet; allein zu Folge des vielfach angeführten Grundsatzes, nach welchem man an Geschwindigkeit verliert, was an Kraft gewonnen wird, muſs der Angriffspunct A der Kraft in diesem Beispiele einen Weg von 2842·6 Zoll durchlaufen, bis die Last nur um 1 Zoll gehoben wird.

Uebrigens erleidet auch dieses Verhältniſs zum Vortheile der Kraft durch die Reibung, welche bei dieser Winde Statt findet, eine bedeutende Modification.

Satz oder Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 119. Bei allen bisher behandelten, sowohl einfachen als zusammengesetzten Maschinen hat sich der Satz herausgestellt, daſs im Falle das Gleichgewicht zwischen Kraft und Last gestört, und eine Bewegung eingeleitet wird, die Producte aus diesen letztern in die Wege ihrer Angriffspuncte einander gleich sind. Stört man das Gleichgewicht nur in so weit, daſs diese Wege unendlich klein werden, und schätzt diese unendlich kleinen Wege, welche man die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspuncte nennt, weil sie die Geschwindigkeiten bezeichnen, welche diese Puncte im ersten Augenblicke annehmen, oder annehmen würden, nach den Richtungen der Kräfte; so gilt dieser vorhin erwähnte Satz allgemein, und für jede Anzahl von Kräften, welche auf ein System von fest mit einander verbundenen Puncten im Gleichgewichte stehen.

Um davon nur einen einfachen Fall zu erläutern, seyen die beiden Kräfte S, S' (Fig. 110) auf den um C drehbaren Winkelhebel ACA' im Gleichgewichte, folglich, wenn CD und CD' auf den Richtungen der Kräfte S, S' senkrecht stehen (§. 75) $S \,.\, CD = S' \,.\, CD' \ldots (m.$

Kommen nun durch eine eingeleitete, unendlich kleine Bewegung dieses Hebels die Angriffspuncte A und A' nach a und a', wobei also die unendlich kleinen Winkel ACa und $A'Ca'$ einander gleich werden, die wir durch i bezeichnen wollen; so sind die unendlich kleinen Bögen Aa und $A'a'$ die virtuellen Geschwindigkeiten der Puncte A und A', und wenn man auf die Richtungen der Kräfte die Perpendikel ab und $a'b'$ fällt, so sind die Projectionen Ab und $A'b'$ die virtuellen Geschwindigkeiten der Wege dieser Kräfte (in vielen Fällen fallen diese Projectionen mit den virtuellen Geschwindigkeiten selbst zusammen); dabei wird Ab, weil diese Projection nach der Richtung der Kraft gezählt wird, als positiv, jene $A'b'$ dagegen, als in die Verlängerung der Kraft S' fallend, als negativ angenommen.

Da der kleine Bogen Aa als eine gerade Linie angesehen werden kann, so ist das Dreieck Aba jenem CAD ähnlich, und man hat $CD : CA = Ab : Aa$, und daraus, wenn man $Ab = w$ setzt: $w = CD\,\frac{Aa}{CA}$. Eben so folgt analog aus den beiden ähnlichen Dreiecken $A'b'a'$ und $CA'D'$, wenn man $A'b' = w'$ setzt: $w' = CD'\,\frac{A'a'}{CA'}$.

Nun ist aber Bog. $Aa = CA.i$ oder $\frac{Aa}{CA} = i$, und eben so $\frac{A'a'}{CA'} = i$, daher auch, diese Werthe in die beiden vorhergehenden Gleichungen substituirt, $w = CD.i$, und $w' = CD'.i$ oder $\frac{w}{w'} = \frac{CD}{CD'}$, und da aus der obigen Bedingungsgleichung (m $\frac{CD}{CD'} = \frac{S'}{S}$ folgt, so ist auch $\frac{w}{w'} = \frac{S'}{S}$, oder $S'w' = Sw \ldots$ (1, oder auch mit Rücksicht, dafs nach der vorigen Bemerkung w und w' entgegengesetzte Zeichen haben: $Sw + S'w' = o \ldots$ (1',
d. h. im Falle des Gleichgewichtes ist die algebraische Summe der Producte aus den Kräften in die virtuellen Geschwindigkeiten, diese nach den Richtungen der Kräfte genommen, gleich Null.

In diesem Satze nun, welcher allgemein für jede Anzahl von Kräften, welche auf ein System von Puncten wirken, und im Gleichgewichte stehen, bewiesen werden kann, und sich so ausspricht: dafs durch eine Störung des Gleichgewichtes, wodurch die Angriffspuncte der Kräfte um unendlich wenig verrückt, und wenn diese unendlich kleinen Wege auf die Richtungen der betreffenden Kräfte projicirt werden, sofort die algebraische Summe der Producte aus den Kräften in diese entsprechenden Projectionen (welche theils positiv, theils negativ zu nehmen sind, je nachdem sie in die Richtungen der Kräfte oder ihrer Verlängerungen fallen) gleich Null ist, liegt der Satz oder das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, und ist zusammen genommen mit dem umgekehrten Satze, daſs, wenn diese eben genannte Relation Statt findet, auch das statische Gleichgewicht zwischen den Kräften bestehen muſs, in der ganzen Mechanik höchst fruchtbar und wichtig.

Beispiel 1. Um diesen schönen Satz durch einige Beispiele zu erläutern, nehmen wir zuerst den in §. 109 (2. Beispiel) behandelten Fall der beiden schiefen Ebenen, auf welchen (Fig. 98) zwei durch eine Schnur mit einander verbundene Körper im Gleichgewichte stehen, hier wieder auf.

Wird nämlich das Gleichgewicht gestört, und beschreiben die Schwerpuncte O, O' als Angriffspuncte der Kräfte Q und Q' die unendlich kleinen Wege Oa und $O'a'$, so sind diese die virtuellen Geschwindigkeiten und On, $O'n'$ ihre Projectionen auf die Kräfte; es ist also zu Folge des in Rede stehenden Satzes, und da hier nur zwei Glieder vorkommen, sofort $Q \cdot On = Q' \cdot O'n'$, oder $\frac{Q}{Q'} = \frac{O'n'}{On}$, und da wegen Ähnlichkeit der Dreiecke Ona und ACD, so wie von $O'n'a'$ und BCD, sofort $On = CD \frac{Oa}{AC}$ und $O'n' = CD \frac{O'a'}{BC}$, also $\frac{O'n'}{On} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{O'a'}{Oa} = \frac{AC}{BC}$, weil $O'a' = Oa$ ist, auch $\frac{Q}{Q'} = \frac{AC}{BC}$ oder $Q : Q' = AC : BC$, wie im §. 109.

Beispiel 2. Bei einem aus n Rollen bestehendem Flaschenzuge nach der in Fig. 76 dargestellten Art, werde das zwischen der Kraft P und der Last Q bestehende Gleichgewicht gestört, so, daſs (Fig. 76, 3) B nach b und A nach a kommt, und Bb, Aa (was zwar hier nicht absolut nothwendig) unendlich klein, also die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspuncte B und A sind; so hat man, da hier die Projectionen auf die Richtungen der Kräfte mit diesen virtuellen Geschwindigkeiten selbst zusammenfallen: $P \cdot Aa = Q \cdot Bb$. Ist aber $Bb = s$, so ist $Aa = ns$, weil jedes der n tragenden Schnüre um den gleichen Theil s verkürzt werden muſs, folglich wird auch $P \cdot ns = Q \cdot s$, oder wie früher in §. 98 (Gl. 1) $P : Q = 1 : n$.

Beispiel 3. Sey bei der Schraube ohne Ende, durch Störung des Gleichgewichtes der beiden Kräfte P und Q, welche an den Puncten D und B (Fig. 108) wirken, der Punct B nach b gekommen, also der unendlich kleine Bogen Bb die virtuelle Geschwindigkeit von B, deren Projection auf die Kraft Q sofort wieder mit diesem Bogen selbst zusammen fällt, indem der Weg dieses Punctes B auch der Weg der Kraft oder Last Q ist. Um nun auch den gleichzeitigen Weg des Angriffspunctes D der Kraft P zu finden, bemerke man, daſs ein Punct in der Peripherie des gezahnten Rades N vom mittlern Halbmesser R, in derselben Zeit den

Bogen $\frac{R}{r} Bb = \frac{R}{r} s$ beschreibt, wenn man Bog. $Bb = s$ setzt. Da auf eine ganze Umdrehung der Schraubenspindel F, d. i., wenn der Angriffspunct D der Kraft P den Weg $2 R' \pi$ beschreibt, ein Fortrücken dieser Peripherie um die Höhe h eines Schraubenganges Statt hat, so findet man, welchen Theil der Peripherie dieser Punct D beschreiben mufs, während ein Punct der Peripherie des Rades N diesen Weg $\frac{R}{r} s$ zurücklegt aus der Proportion $h : 2 R' \pi = \frac{R}{r} s : x$, und daraus $x = \frac{2 R' R s \pi}{h r}$, und da dieser also zugleich der Weg der Kraft P (der hier wieder mit der Projection zusammenfällt) ist, so hat man nach dem hier in Rede stehenden Satze der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$P \, . \, \frac{2 R R' \pi}{h r} s = Q s, \text{ oder } P : Q = r h : 2 R R' \pi$$

genau so wie oben im §. 117 Gl. (1.