

Fufs zu bringen, der eben den Boden berührt; aus diesem Grunde ist das ungehinderte Marschiren in geschlossenen Reihen nur dadurch möglich, dafs Alle mit demselben Fusse austreten und Schritt halten. Trägt der Mensch eine Last auf dem Rücken, so beugt er sich vorwärts, im entgegengesetzten Falle nach rückwärts; eben so nach rechts, wenn er links eine Last trägt u. s. w., um den gemeinschaftlichen Schwerpunct seines Körpers und der Last zwischen seine Füfse zu bringen. Will er von einem Stuhle frei aufstehen, so mufs er früher entweder durch Vorbeugung des Oberkörpers oder dadurch, dafs er die Füfse etwas zurück unter den Stuhl schiebt, den Schwerpunct über die Füfse bringen. Derjenige, welcher beim Fechten oder Ringen einen Stofs auf die Brust auspariren oder aushalten will, spreizt die Füfse weit aus einander, um durch Vergrößerung der Basis seine Standfähigkeit zu vergrößern. In einem kleinen schwankenden Kahn oder Wagen ist es oft gefährlich aufzustehen, weil dadurch der Schwerpunct höher zu liegen kommt und der Kahn leichter umschlagen kann, u. s. w. u. s. w.

## Viertes Kapitel.

### *Von den auf Seile oder Schnüre wirkenden Kräften.*

§. 66. **Spannung einer Schnur.** Ist das eine Ende einer Schnur befestigt, und wirkt am andern Ende eine ziehende Kraft  $P$ , so heifst  $P$  die Spannung der Schnur. Diese Spannung bleibt auch noch dieselbe, wenn an beiden Enden der Schnur zwei gleiche Kräfte  $P$  nach entgegengesetzten Richtungen wirken und sich also im Gleichgewichte halten. Wirken dagegen an den Endpuncten einer Schnur zwei ungleiche Kräfte,  $P$  und  $p$ , nach entgegengesetzten Richtungen, und ist  $P > p$ , so ist die Spannung der Schnur  $= p$ , weil der Ueberschufs oder die Resultirende  $P - p$  der beiden Kräfte Bewegung erzeugt und auf die Spannung keinen Einfluss hat.

§. 67. **Bedingungen für das Gleichgewicht eines schweren Körpers, welcher längs einer an beiden Enden befestigten Schnur frei hin und her gleiten kann.** Ist die Schnur  $AMA'$  (Fig. 42) in den Puncten  $A, A'$  befestigt, und an diese mittels eines losen Ringes  $M$  das Gewicht  $Q$  aufgehangen, so mufs für's Gleichgewicht die Schnur nothwendig in die durch die Puncte  $A, A'$  gelegte verticale Ebene fallen. Da der bewegliche Aufhängpunct  $M$ , wenn dieser in der genannten Ebene so herumgeführt wird, dafs dabei die beiden Faden- oder

Schnurstücke  $AM$ ,  $A'M$  fortwährend straff gespannt bleiben, bekanntlich eine Ellipse beschreibt, deren große Achse  $BB' = AM + MA'$  ist, und Brennpunkte  $A, A'$  sind; so ist es für den vorliegenden Fall genau eben so, als sollte der schwere Körper auf dem concaven Theil  $BMB'$  der krummen Linie im Gleichgewichte bleiben, was sofort fordert, daß die durch seinen Schwerpunkt gehende lothrechte Linie im Stütz- oder Aufhängpunkt  $M$  auf der Curve normal stehe und daß für das stabile Gleichgewicht dieser Punkt zugleich der tiefste sey, den der Ring also auch das Gewicht  $Q$  dabei einnehmen kann. Beide Bedingungen sind aber für jenen Punkt  $M$  der Ellipse vorhanden, für welchen die Tangente  $TT'$  horizontal, also die Normale  $CM$  vertical ist. Da nun aber, wie aus der Geometrie bekannt, der Winkel  $AMA'$  der beiden Leitstrahlen durch die Normale  $CM$  halbirt wird, so folgt zugleich, weil die Kraft  $Q$  der aus den Spannungen der Seilstücke  $MA$  und  $MA'$  entstehenden Resultirenden gleich seyn muß, daß diese beiden Spannungen gleich groß sind (weil die Resultirende nur für zwei gleiche Seitenkräfte in der Mitte liegt); denn schneidet man auf  $MC$  das Stück  $Ma = Q$  ab und ergänzt das Parallelogramm  $bb'$ , so stellen  $Mb = Mb'$  die Spannungen der Schnurstücke vor.

Beispiel. Ist eine Schnur von der Länge  $AC + BC = l$  (Fig. 43) in den Punkten  $A$  und  $B$  befestigt, und hängt man, wie z. B. bei manchen Straßenlaternen mittels eines Ringes, der auf der Schnur gleiten kann, eine Laterne oder ein Gewicht  $Q$  auf; so findet man den Punkt  $C$ , in welchem  $Q$  im Gleichgewichte bleibt, durch folgende Construction:

Da nach dem Vorhergehenden, wenn man durch  $C$  die lothrechte Linie  $GC$  zieht, die Winkel  $a$  und  $b$  einander gleich seyn müssen, so ist, wenn man auch durch  $B$  die Verticallinie  $DF$  zieht und  $AC$  bis zum Durchschnitt  $F$  verlängert, das Dreieck  $BCF$  gleichschenkelig, nämlich  $CF = CB$  (weil die Winkel an der Basis  $a$  und  $b$ , wie bemerkt, einander gleich sind), folglich ist  $AF = AC + CF = AC + CB = l$ . Durchschneidet man also die durch  $B$  gezogene lothrechte Linie  $DBF$  mit dem Halbmesser  $l$  aus  $A$  in  $F$ , zieht die Gerade  $AF$ , halbirt  $FB$  in  $E$  und zieht durch diesen Punkt auf  $DF$  eine Senkrechte; so durchschneidet diese die vorige Gerade  $AF$  in dem gesuchten Punkte  $C$ , in welchem sich der schwere Körper auf der Schnur in's Gleichgewicht setzt.

**§. 68. Gleichgewichtsbedingungen für mehrere an einem Seile hängende Gewichte (Seilpolygon).** Ist das Seil oder die Schnur  $AMA'$  (Fig. 44) in den Endpunkten  $A, A'$  befestigt, und hängen in den Punkten  $M, M', M''$ , die man Knoten nennt, die Gewichte  $P, P', P''$ ; so kann man, wenn

sich das Gleichgewicht durch die Lage der Schnur  $AMM'M'A'$ , welche übrigens wieder in die durch  $A, A'$  gehende verticale Ebene fällt, hergestellt hat, ohne Störung derselben anstatt der festen Punkte  $A, A'$  Kräfte  $S, S'$  nach den Richtungen  $MA, M'A'$  annehmen, welche den in  $A$  und  $A'$  Statt findenden Spannungen des Seils gleich sind.

Für den Punct  $M$  erscheint aber auch die Spannung des Seilstückes  $MM'$  als eine in  $M$  nach  $MM'$  wirkende Kraft  $s$ , z. B. (die auch zugleich der Spannung von  $M'$  gegen  $M$  gleich ist), so, daß auf den Punct  $M$  3 Kräfte  $S, s$  und  $P$  wirken, die unter sich im Gleichgewichte stehen; damit aber das Gleichgewicht bestehen kann, so müssen diese drei Kräfte zuerst in ein und derselben Ebene, folglich (wegen  $P$ ) in einer Verticalebene liegen, und dann muß (§. 16. Anmerk.)

$$S : s = \sin PMM' : \sin AMP$$

sey. Eben so muß für den Punct  $M'$ , wenn die Spannung des Seilstückes  $M'M'$  in dieser Richtung  $= s'$  ist ( $s'$  ist dann auch die Spannung in  $M'$  gegen  $M$ ), erstlich  $P'$  wieder mit  $MM'$  und  $M'M'$  in einerlei, folglich, da  $P'$  mit  $P$  parallel ist, in die vorige Ebene fallen und dann  $s : s' = \sin P'MM' : \sin MM'P'$  Statt finden.

Eben so ist für die drei Kräfte  $P', s'$  und  $S'$ , welche auf  $M'$  wirken:

$$s' : S' = \sin P'M'A' : \sin M'M'P',$$

bleibt man bei drei solchen Knoten stehen und setzt diese drei Proportionen zusammen, so erhält man

$$S : S' = \sin P'M'A' : \sin AMP = \sin NBA' : \sin ABN,$$

eine Proportion, welche für jede Anzahl von Knoten gilt, und auch von den obigen Proportionen unabhängig auf folgende Art gefunden wird.

Verlängert man nämlich die beiden letzten Seilstücke  $AM$  und  $A'M'$  bis zu ihrem Durchschnitt  $B$ , so muß die Resultirende der parallelen Kräfte  $P, P' \dots$  nothwendiger Weise durch diesen Punct  $B$ , und da  $P, P' \dots$  Gewichte darstellen, so muß die durch  $B$  gezogene Verticallinie  $BN$  durch den Schwerpunct dieser Gewichte gehen, weil sonst die drei Kräfte  $S, S'$  und  $R = P + P' + \dots$  nicht im Gleichgewichte seyn könnten. In diesem Falle ist aber (bereits citirte §. 16)

$$S : S' = \sin A'BN : \sin ABN \text{ (welches die vorige Relat. ist), und}$$

$$S : R = \sin ABN : \sin ABA'.$$

Durch diese beiden Proportionen sind die in den Befestigungspuncten  $A, A'$ , und damit dann auch durch die frühern Proportionen die in den übrigen Knotenpuncten  $M, M' \dots$  Statt findenden Spannungen bestimmt; auch geht hervor, daß das ganze Seilpolygon in einer verticalen Ebene liegt.

Die in den einzelnen Punkten Statt findenden Spannungen lassen sich auch leicht durch Construction der Kräfteparallelogramme finden. So nehme man, um die Spannung im Punkte  $M$  zu bestimmen, auf der lothrechten Linie  $MP$  das Stück  $Mb$  gleich oder proportional dem Gewichte  $P$ , verlängere  $AM$  und construire das Parallelogramm  $bMad$ ; so stellt  $Md$  die Spannung ( $= S$ ) nach  $AM$  im Punkte  $A$ , und  $Ma$  ( $= s$ ) jener des Seilstückes  $MM'$  in  $M'$  gegen  $M'$  (so wie auch zugleich jene in entgegengesetzter Richtung, da  $Mm = Ma$  ist und seyn muſs) vor.

§. 69. **Die Kettenlinie.** Hängt man eine vollkommen biegsame Schnur, oder auch eine aus äußerst feinen Gliedern bestehende Kette mit ihren Endpunkten auf zwei Punkte  $A$  und  $A'$  (Fig. 45) auf, so bildet diese eine in der durch die Aufhängpunkte  $A, A'$  gehenden verticalen Ebene liegende Curve  $ANA$ , welche Kettenlinie heisst. Da man sich die Curve als eine gewichtslose Schnur denken kann, welche nach ihrer ganzen Länge mit unendlich vielen und eben so kleinen Gewichten, deren Summe dem Gewichte der Schnur gleich ist, gleichförmig belastet ist; so hat man ein Seilpolygon von unendlich vielen und kleinen Seiten, auf welches sich sofort die Gesetze des vorigen Paragraphes anwenden lassen.

Zieht man an den End- oder Aufhängpunkten an die Curve die Tangenten  $AB, A'B$ , so muſs also wieder die durch ihren Durchschnittspunct  $B$  gezogene Verticallinie durch den Schwerpunct  $O$  der Kettenlinie gehen, oder was dasselbe ist, die Resultirende aus allen den unendlich vielen und kleinen parallelen Kräften, welche auf die Schnur lothrecht wirken, muſs durch den Punct  $B$  gehen. Nimmt man also auf dieser lothrechten Linie das Stück  $BD =$  dem Gewichte der Kette oder Schnur und construirt das Parallelogramm  $EF$ , so stellen  $EB$  und  $FB$  die Spannungen der Kette in den Aufhängpunkten  $A$  und  $A'$  nach den Richtungen der Tangenten  $AB, A'B$  vor.

Ist  $W.EBD > W.DBF$ , so ist auch

$$\cancel{ED} < \cancel{DF}, ED = FB > DF = EB,$$

oder die Spannung in  $A'$  gröſser als jene in  $A$  (was auch aus

$$S : S' = \sin A'BD : \sin ABD \text{ folgt).}$$

§. 70. Um die Spannung der Schnur oder Kette in jedem andern Punkte, z. B. in  $M$  (Fig. 46) zu bestimmen, kann man ohne Störung des Gleichgewichtes den Punct  $M$  als fest annehmen und das Stück  $MA'$  der Kette unberücksichtigt lassen; eben so kann man den tiefsten Punct  $N$  der Curve befestigt denken und das Stück  $AN$  weglassen, so wird

für das Bogenstück  $NM$  immer noch das Gleichgewicht bestehen. Zieht man also an dieses in den Endpunkten  $N$  und  $M$  die Tangenten, so müssen sich diese in der durch den Schwerpunkt des Kettenstückes  $NM$  gehenden Verticallinie  $FG$  durchschneiden, und die nach den Tangenten gemessenen Spannungen müssen sofort mit dem Gewichte dieses Kettenstückes  $NM$  im Gleichgewichte stehen; der Punct  $E$  steht also im Gleichgewichte mit der in  $M$  Statt findenden, gegen  $EM$  gerichteten Spannung, ferner der in  $N$  gegen  $EN$  gerichteten Spannung, und endlich dem nach  $EG$  wirkenden Gewichte des Bogens  $MN$ . Hieraus folgt nun, wenn man das Kräfteparallelogramm  $ab$  construirt, das Eigenthümliche, daß die Spannung der Schnur oder Kette in irgend einem Puncte  $M$  eine (constante) horizontale Seitenkraft  $Ea$  hat, welche der Spannung des tiefsten Punctes  $N$ , und eine verticale Seitenkraft  $Eb$  besitzt, welche dem Gewichte des Seil- oder Kettenstückes  $MN$ , vom tiefsten Punct  $N$  bis zum betreffenden Punct  $M$  gezählt, gleich ist.

Aus diesem Grunde erleiden die höher liegenden Puncte eine größere Spannung als die tiefer liegenden.

Liegen die beiden Aufhängpuncte  $A, A'$  in einer horizontalen Linie (in einerlei Horizont), so liegt der tiefste Punct  $N$  der Curve in der halben Länge der Kette und die verticale Spannung in jedem Aufhängpuncte ist daher dem halben Gewichte der Kette gleich, während, wie schon bemerkt, die horizontalen Spannungen einander gleich und so groß sind, wie die Spannung im tiefsten Puncte  $N$ .

Anmerkung. Eine der vorzüglichsten Anwendungen findet die Kettenlinie auf die in der neuern Zeit häufig ausgeführten Häng- oder Kettenbrücken, ob schon dabei, wenn die horizontale an den Ketten aufgehängte Fahrbahn der ganzen Länge nach gleichförmig so bedeutend belastet wird, daß dagegen das Gewicht der Ketten selbst vernachlässigt werden kann, diese Curve in eine gemeine Parabel übergeht.

Denkt man sich an der Kettenlinie  $ANA'$  kleine feste Kugeln angereiht, welche sich der Reihe nach berühren und die Schwerkraft nach grad entgegengesetzter Richtung wirkend, wodurch, weil (§. 23) der Mittelpunkt der parallelen Kräfte oder der Schwerpunkt dadurch nicht geändert wird, das Gleichgewicht bestehen bleibt; so kann man den Bogen auch so umkehren, daß er in derselben verticalen Ebene in die Lage  $A'N'A$  (Fig. 45) kommt, folglich die Kugeln durch ihre bloße Berührung diesen Bogen als ein freies oder selbst tragendes Gewölb bilden, die Spannungen in den einzelnen Gliedern der Kette gehen hier in Pressungen der Kugeln über.

Wird ein Seil zum Fortziehen einer Last, z. B. eines Schiffes mit einem Ende  $B$  (Fig. 47) an die Last  $Q$  befestigt, und wirkt am andern Ende  $A$  eine Zugkraft  $P$ ; so bildet das Seil eine Kettenlinie  $ANB$ . Zieht man in  $A$  und  $B$  die Tangenten  $AD$ ,  $BD$  und durch ihren Durchschnittspunkt  $D$  die verticale Linie  $CD$ , so ist, wenn  $G$  das Gewicht des Seils bezeichnet, da  $P$  die Spannung des Seils in  $A$  ist:

$$P : G = \sin CDB : \sin ADB.$$

Soll das Seil nach der geraden Linie  $BA$  ausgespannt werden, so muß der Winkel  $CDB$  in einen rechten Winkel übergehen oder  $= 90$ , und jener  $ADB = 180$  Grad werden; dafür wird  $\sin CDB = 1$  und  $\sin ADB = 0$ , folglich ist  $P : G = 1 : 0$ , und daraus  $P = \frac{G}{0} = \infty$ ,

d. h. entweder müßte das Seil kein Gewicht haben, oder die Kraft  $P$  müßte unendlich groß seyn; da nun in der Wirklichkeit keines von beiden Statt findet, so läßt sich auch, wenn die Zugkraft horizontal wirkt, das Seil niemals in eine mit dieser Richtung zusammen fallende gerade Linie ausspannen. Eben so wenig ist dies auch für eine nicht horizontale Gerade möglich, weil dabei immer wieder  $\sin ADB = 0$  werden müßte, während  $\sin CDB$  einen von Null verschiedenen Werth besitzt; nur für eine verticale Linie ist dieses anders.

## Fünftes Kapitel.

### *Von dem Gleichgewichte bei Maschinen, Satz der virtuellen Geschwindigkeiten.*

§. 71. **Erklärungen.** Jede Vorrichtung, mittelst welcher eine Kraft auf einen außerhalb ihrer Richtung liegenden Punkt fortgepflanzt oder wirksam gemacht wird, um dort einen gewissen Widerstand zu überwinden oder überhaupt irgend eine Arbeit zu verrichten, welches der Kraft, wenn sie unmittelbar auf diesen Punkt wirken müßte, schwer oder gar nicht möglich wäre, pflegt man eine Maschine zu nennen. Dabei ist eine scharfe Gränzlinie zwischen Werkzeugen, Instrumenten und Maschinen weder möglich noch auch nothwendig, und man richtet sich in der Benennung derselben gewöhnlich nach dem Sprachgebrauche.

Der mit einer Maschine zu überwindende Widerstand heißt gewöhnlich die Last; da aber auch diese, z. B. wenn sie in einem zu hebenden Gewichte besteht, als Kraft dienen kann, so sind Kraft und Last bei einer Maschine mehr in ihrer Benennung und ihrer relativen Beziehung als in ihrem Wesen verschieden, daher nennt man die Last auch