# Zweites Kapitel.

## *Vom statischen Momente.*

**§. 24. Moment einer Kraft** *in Beziehung auf eine* **Ebene.** Unter dem auf eine Ebene bezogenen Momente einer Kraft versteht man das Product aus dieser Kraft in das aus ihren Angriffspuncte auf die bezügliche Ebene gefällte Perpendikel.

**§. 25.** Es seyen nun $P$ und $Q$ zwei parallele, an den Endpuncten der Geraden $AB$ (Fig. 20) nach derselben Richtung wirkenden Kräfte, und $R$ ihre durch $C$ gehende Resultirende; ferner seyen $p$, $q$, $r$ die aus den Angriffspuncten $A$, $B$, $C$ dieser Kräfte auf die beliebige Ebene $MN$ gefällten Perpendikel $Aa'$, $Bb'$, $Cc'$; so ist wegen $R = P + Q$ auch $Rr = Pr + Qr$, und da, wenn $ab$ mit der Verbindungslinie $a'b'$ parallel gezogen wird, $r = Cc' = Aa' - Aa = p - Aa$ und eben so auch $r = Bb' + Bb = q + Bb$ ist, so folgt auch

$$Rr = P(p - Aa) + Q(q + Bb) \text{ oder}$$

$$Rr = Pp + Qq + Q.Bb - P.Aa.$$

Da aber (§. 20, Gl. 2) $P : Q = CB : CA = Bb : Aa$ (wegen Ähnlichkeit der Dreiecke $BCb$ und $ACa$) also $P.Aa = Q.Bb$ oder $Q.Bb - P.Aa = 0$ ist, so folgt endlich

$$Rr = Pp + Qq \ldots (m,$$

d. h. das Moment der Resultirenden auf irgend eine Ebene bezogen, ist gleich der Summe der Momente der beiden parallelen Kräfte in Beziehung auf dieselbe Ebene.

Anmerkung 1. Geht die Ebene $MN$ durch den Angriffspunct $C$ der Resultirenden, so wird $r = 0$, also $Pp + Qq = 0$, woraus sofort folgt, daſs (weil $P$ und $Q$ gleiche Zeichen haben) die Perpendikel $p$ und $q$ entgegengesetzte Zeichen erhalten, also zu verschiedenen Seiten der Ebene $MN$ liegen müssen.

Anmerkung 2. Wirken die Kräfte $P$ und $Q$ nach entgegengesetzten Richtungen, so darf man diese nur auch mit entgegengesetzten Zeichen, d. i. die eine mit $+$, die andere mit $-$ in die Gleichung ($m$ setzen, um die analoge zu erhalten; ist z. B. $R = P - Q$, so ist auch

$$Rr = Pp - Qq \ldots (m'.$$

**§. 26. Satz der Momente,** *für eine* **beliebige** *Anzahl von* **parallelen** *Kräften.* Wird das Verfahren des vorigen Paragraphes wiederholt, d. h. die Resultirende aus den beiden ersten Kräften mit der dritten Kraft verbunden, und hierauf wieder der vorige Satz angewendet, sodann die Resultirende der drei ersten Kräfte mit der vierten Kraft eben so combinirt, u. s. w. fort; so erhält man endlich, wenn $P$, $P'$, $P''$ ... die parallelen Kräfte, und $p$, $p'$, $p''$... die aus ihren Angriffspuncten auf die bezügliche Ebene (Ebene der Momente) gefällten Perpendikel, so wie $R$ die Resultirende und $r$ das aus ihrem Angriffspunct oder dem Mittelpunct der parallelen Kräfte auf dieselbe Ebene gezogene Perpendikel sind, ganz allgemein:

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots \quad (n.$$

Anmerkung 1. Diese Gleichung kann zur Bestimmung von $r$, d. i. des Abstandes des Mittelpunctes der parallelen Kräfte von der Ebene der Momente benützt werden. Nimmt man aufser dieser noch zwei, am einfachsten auf derselben senkrechte Ebenen an, und bestimmt aus den ganz ähnlichen Relationen (indem man aus den Angriffspuncten der parallelen Kräfte auch auf diese beiden Ebenen die Perpendikel fällt) eben so die Abstände $r'$ und $r''$ dieses Mittelpunctes von diesen beiden neuen Ebenen; so ist durch diese drei Abstände die Lage dieses Mittelpunctes im Raume vollkommen bestimmt.

Anmerk. 2. Auch folgt aus dieser Relation ($n$, dafs wenn die Kräfte $P$, $P'$... unter sich im Gleichgewichte stehen, also $R = 0$ ist, sofort auch die Summe der Momente, auf jede beliebige Ebene bezogen, gleich Null seyn mufs.

Dieselbe Relation von $0 = Pp + P'p' + \ldots$ findet auch noch Statt, ohne dafs das Gleichgewicht besteht, wenn man die Ebene der Momente durch den Mittelpunct der parallelen Kräfte legt, weil dafür $r = 0$ ist.

Anmerk. 3. Sind endlich sämmtliche Kräfte einander gleich, und ist ihre Anzahl $= n$, so ist $Rr = P(p + p' + \ldots)$ oder wegen $R = nP$, sofort $r = \frac{p + p' + \ldots}{n}$ oder das aus dem Mittelpuncte der parallelen Kräfte auf eine Ebene gefällte Perpendikel ist in diesem Falle das arithmetische Mittel von allen aus den Angriffspuncten der Kräfte auf dieselbe Ebene gefällten Perpendikeln.

**§. 27. Statisches Moment einer Kraft** *in Beziehung auf einen* **Punct.** Fällt man aus einem beliebigen Puncte auf die Richtung einer Kraft ein Perpendikel, so heifst das Product aus der Kraft in dieses Perpendikel, statisches Moment der Kraft, in Beziehung auf diesen Punct, welcher Mittelpunct des Momentes genannt wird.

Wirken nun auf einen Punct $M$ (Fig. 15) zwei Kräfte $P$ und $Q$

und bezieht man ihre Momente auf einen Punct $C$ ihrer Resultirenden, so ist (§. 19), wenn man die Perpendikel $CG = p$ und $CH = q$ setzt:

$$P : Q = q : p \quad \text{oder} \quad Pp = Qq,$$

d. h. die statischen Momente der beiden Kräfte sind in Beziehung auf irgend einen in ihrer Resultirenden liegenden Punct einander gleich.

**§. 28.** Wirken auf einen Punct drei Kräfte und stehen diese unter sich im Gleichgewichte, so mufs jede derselben der Resultirenden aus den beiden übrigen Kräften gleich und ihr gerade entgegengesetzt seyn. Nimmt man daher in der Richtung der einen dieser drei Kräfte einen Punct an, so müssen zufolge des vorigen Satzes die statischen Momente der beiden übrigen Kräfte auf diesen Punct bezogen einander gleich seyn.

**§. 29.** Wirken auf einen Punct $M$ (Fig. 21) zwei Kräfte $P$ und $Q$ nach den durch die Pfeile angedeuteten Richtungen, und ist $R$ ihre Resultirende, so nehme man den Mittelpunct $O$ der statischen Momente in der Ebene dieser Kräfte, jedoch aufserhalb der Resultirenden, und fälle aus diesem Puncte auf die Richtungen der Kräfte die Perpendikel $Oa$, $Ob$ und $Oc$, deren Gröfse wir durch $p$, $q$, $r$ bezeichnen wollen. Man zerlege die Kraft $P$ in zwei Seitenkräfte $S$ und $S'$ nach den Richtungen $MO$ und $MQ$, so ist $R$ die Resultirende aus den beiden Kräften $S$ und $Q + S'$, wovon die erstere nach $MO$ und die letztere nach $MQ$ wirkt, folglich nach dem Satze des vorigen Paragraphes (indem der Mittelpunct $O$ der Momente in der ersten der drei Kräfte $S$, $R$ und $S' + Q$ liegt) $Rr = (Q + S')q = Qq + S'q$, oder da in Beziehung auf die beiden Kräfte $P$ und $S'$ (nach demselben Satze, indem die drei Kräfte $S$, $S'$ und $-P$ einander das Gleichgewicht halten) $S'q = Pp$ ist, auch $Rr = Pp + Qq \ldots (1$,

d. h. das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der Summe der statischen Momente der beiden Seitenkräfte.

**§. 30.** Nimmt man den Punct $O$ nicht aufserhalb, sondern (Fig. 21, $a$) innerhalb des Winkels $PMQ$, so fällt bei der angenommenen Zerlegung der Kraft $P$ in $S$ nach $MO$ und $S'$ nach $MQ$, diese letztere in die Verlängerung von $QM$ über $M$ hinaus, so dafs jetzt $S'$ negativ wird und die vorige Gleichung 1) die Form $Rr = Qq - Pp \ldots (2$

erhält, was man auch unmittelbar aus der Gleichung 1) findet, indem darin für den gegenwärtigen Fall das Perpendikel $p$ negativ genommen werden mufs.

**§. 31.** Sieht man die Gerade $MO$ als eine steife um $O$ drehbare Linie an, so streben die beiden Kräfte $P$ und $Q$ im ersten Falle (§. 29) diese Gerade, also auch den Punct $M$, nach derselben, im zweiten Falle aber (vorigen Paragraph) nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen.

Diefs vorausgesetzt, kann man auch sagen, dafs das statische Moment der Resultirenden gleich ist der Summe oder dem Unterschiede der statischen Momente aus den Seitenkräften, je nachdem diese Kräfte ihren Angriffspunct nach derselben, oder nach entgegengesetzten Seiten zu drehen streben; im ersten Falle sucht die Resultirende diesen Punct ebenfalls nach derselben, im letzteren dagegen nach jener Seite zu drehen, nach welcher ihn jene Seitenkraft, deren Moment das gröfsere ist, zu drehen strebt.

Sieht man dagegen die Perpendikel $Oa$, $Ob$, $Oc$ als steife, um $O$ drehbare Linien an, so kann man sich auch vorstellen, dafs die Kräfte $P$, $Q$ und ihre Resultirende $R$ diese Linien an den Angriffspuncten $a$, $b$, $c$ um den Punct $O$, und zwar im ersten Falle nach einerlei, im letztern nach entgegengesetzten Richtungen (wobei $P$ in einem, $Q$ und $R$ im andern Sinne wirken) umzudrehen suchen.

**§. 32. Allgemeiner Satz.** Durch Wiederholung dieser Schlüsse zeigt man überhaupt, dafs das statische Moment der Resultirenden aus m e h r e r e n auf einen Punct wirkenden, in derselben Ebene liegenden Kräften gleich ist der S u m m e der Momente der einzelnen Kräfte, wenn diese den gemeinschaftlichen Angriffspunct in Beziehung auf den Mittelpunct der statischen Momente, nach d e r s e l b e n Seite, oder wenn diefs nicht der Fall, gleich ist dem U n t e r s c h i e d aus den Momenten jener Kräfte, welche diesen Angriffspunct nach der einen, und den Kräften, welche ihn nach der entgegengesetzten Seite zu drehen suchen.

Um beide Fälle in einen einzigen Satz zusammenzufassen, darf man blofs jene Kräfte, welche den Angriffspunct nach einer Seite drehen wollen, mit $+$ und die übrigen, welche also eine entgegengesetzte Drehung bewirken wollen, mit dem entgegengesetzten Zeichen — belegen, dann ist in beiden Fällen das statische Moment der Resultirenden, auf einen ganz beliebigen Punct bezogen, gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Seitenkräfte, oder es ist

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots (a.$$

Halten sich die sämmtlichen Kräfte $P$, $P'$ ... das Gleichgewicht, so ist ihre Resultirende $R = 0$, folglich auch

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0 \; (b.$$

Diese Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht der Kräfte $P$, $P'$... mufs also für jeden beliebigen Punct, als Mittelpunct der Momente genommen, gelten, während sie auch bestehen kann, ohne dafs Gleichgewicht Statt findet, wenn man diesen Mittelpunct in der Resultirenden annimmt, wofür in Gl. ($a$ das Perpendikel $r = 0$ wird.

**§. 33. Satz der Momente für parallele Kräfte.** Da die in den letzten Paragraphen entwickelten Sätze von den Winkeln, unter welchen die Kräfte auf den Punct $M$ wirken, ganz unabhängig sind; so gelten sie auch noch für parallele in derselben Ebene liegende Kräfte. Um indefs den betreffenden Satz für parallele Kräfte direct abzuleiten, seyen $P$ und $Q$ (Fig. 22) zwei parallele, an den Endpuncten der Geraden $AB$ nach einerlei Richtung wirkende Kräfte, und $R$ ihre Resultirende. Nimmt man in der Ebene dieser drei Kräfte, aufserhalb ihren Richtungen den Mittelpunct $O$ der statischen Momente an, fällt aus diesem auf die Richtungen der Kräfte das Perpendikel $Ob$ und setzt wieder die den Kräften $P$, $Q$, $R$ entsprechenden Perpendikel $Oa = p$, $Ob = q$ und $Oc = r$; so ist $R = P + Q$ und wegen

$$Oc = Oa + ac \quad \text{und auch} \quad Oc = Ob - bc$$

offenbar

$$R.Oc = P(Oa + ac) + Q(Ob - bc) = P.Oa + Q.Ob + P.ac - Q.bc$$

oder wegen $P.ac = Q.bc$ (§. 20, Gl. 2) sofort $Rr = Pp + Qq \ldots (1.$

Auf dieselbe Art zeigt man, dafs wenn der Punct $O$ zwischen den Richtungen der Kräfte $P$ und $Q$ angenommen wird, die Gerade $Ob$, oder die Angriffspuncte $a$, $c$, $b$ nicht wie hier, nach einerlei Richtung um den Mittelpunct der Momente $O$ gedreht werden, sofort das statische Moment der Mittelkraft dem Unterschied aus den Momenten der Seitenkräfte gleich, d. i. $Rr = Pp - Qq \ldots (2$ ist.

Endlich kann auch durch Wiederholung dieser Schlüsse der Satz der Momente für jede beliebige Anzahl von parallelen Kräften, wenn sie dabei in ein und derselben Ebene liegen, also die Giltigkeit der obigen Gleichung (a:

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots (n$$

bewiesen werden.