Erster Abschnitt.

S t a t i k.

Erstes Kapitel.

Von der näheren Bestimmung der Kräfte, so wie von ihrer Zusammensetzung und Zerlegung.

§. 6. **Ruhe und Bewegung.** Von einem Körper, welcher seinen Ort nicht verändert, sagt man er r u h e; für uns ist jede Ruhe nur eine r e l a t i v e, nämlich gegen die ihn umgebenden Gegenstände, weil jeder uns zugängige Körper an der doppelten Bewegung der Erde theil nimmt, also eben so wenig a b s o l u t ruht, als ein in einem segelnden Schiffe ruhig sitzender Mensch. Ändert dagegen ein Körper seinen Ort auf eine stetige Weise, so sagt man er b e w e g e sich.

§. 7. **Gleichgewicht.** Ein Körper kann ruhen, entweder indem gar keine, oder auch indem Kräfte auf ihn wirken, welche sich gegenseitig aufheben; im letztern Falle sind die Kräfte, oder wie man sich auch kürzer ausdrückt, ist der Körper im Gleichgewichte, und dieser Zustand unterscheidet sich von der Ruhe nur durch das Bestreben zur Bewegung.

§. 8. **Nähere Bestimmung der Kräfte.** Man unterscheidet bei einer jeden auf einen Körper wirkenden Kraft: 1[stens] ihren A n g r i f f s p u n c t, 2[tens] ihre R i c h t u n g, und 3[tens] ihre G r ö ſ s e oder I n t e n s i t ä t.

Der A n g r i f f s p u n c t *A* (Fig. 1) ist derjenige Punct des Körpers *M*, auf welchen die Kraft unmittelbar wirkt. Die R i c h t u n g der Kraft ist die durch den Angriffspunct gehende gerade Linie *A B*, nach welcher die Kraft den Punct *A* des Körpers bewegt oder zu bewegen strebt. Übrigens kann jeder Punct der Geraden AB oder ihrer Verlängerung zum Angriffspuncte der Kraft genommen werden, wenn dieser mit dem erstern A unveränderlich verbunden ist.

Zur Schätzung der Gröfse oder Intensität einer Kraft, vergleicht man sie mit einer beliebigen zur Einheit gewählten Kraft, wozu sich am besten die Gewichtseinheit eignet; denn wirkt z. B. eine ziehende Kraft auf den Körper M in der Richtung AB, so kann man in A eine Schnur oder einen Faden befestigen, diesen in der Richtung AB über eine Rolle gehen lassen und an den Faden ein Gewicht von solcher Gröfse anhängen, dafs dadurch auf den Körper derselbe Zug wie durch die zu schätzende Kraft (welche z. B. eine Muskelkraft seyn kann) hervorgebracht wird; hat das Gewicht P Pfunde, so kann man dieses Gewicht als das Mafs für die Intensität dieser Zugkraft ansehen, oder diese letztere ganz einfach gleich P setzen, wenn man das Pfund zur Gewichtseinheit und zugleich als Einheit der Kräfte annimmt. Ist p überhaupt die Kräfteneinheit, so wird eine $2, 3 \ldots n$ Mal so grofse Kraft durch $2p$, $3p \ldots np$, oder wenn man $p = 1$ setzt, schlechtweg durch die Absolutzahl $2, 3 \ldots n$ ausgedrückt.

Für die Ableitung der Gesetze des Gleichgewichtes sind weniger diese absoluten Zahlen, als die Verhältnifszahlen zwischen den Gröfsen der Kräfte nothwendig; man erhält sie am einfachsten, indem man die geraden Linien, nach welchen die Kräfte wirken, durch Annahme einer ganz beliebigen Linieneinheit den betreffenden Kräften proportional abschneidet.

§. 9. Zusammensetzung der auf einen Punct wirkenden Kräfte. Zwei gleiche Kräfte, welche auf einen beweglichen Punct nach gerad entgegengesetzten Richtungen wirken, halten sich das Gleichgewicht oder heben sich auf; umgekehrt erkennt man, dafs zwei Kräfte einander gleich sind, wenn sie unter diesen Umständen im Gleichgewichte stehen.

Durch das Zusammennehmen von $2, 3 \ldots n$ solchen gleichen Kräften erhält man eine $2, 3 \ldots n$fache Kraft.

§. 10. Mittelkraft oder Resultirende. Wirken auf einen Punct M (Fig. 2) mehrere Kräfte p, q, r nach derselben Richtung MA, so kann man diese durch eine einzige Kraft R, welche der Summe aus diesen einzelnen Kräften gleich ist, ersetzen. Diese Kraft $R = p + q + r$, welche genau dasselbe bewirkt, was die einzelnen Kräfte bewirken, heifst die **Mittelkraft** oder **Resultirende**, während auf diese bezogen die Kräfte p, q, r die **gleichgeltenden** oder auch (besonders wenn ihre Richtungen einen Winkel bilden) **Seitenkräfte** genannt werden.

Wirken z. B. auf den Punct M die Kräfte von 2, 3 und 5 Pfund in der Richtung MA, so ist die ebenfalls von M gegen A wirkende Resultirende $R = 10$ Pf.

Das Verfahren, um aus mehreren Kräften die Mittelkraft zu finden, heifst das **Zusammensetzen**, das entgegengesetzte, um eine Kraft in mehrere Seitenkräfte zu zerlegen, das **Zerlegen** der Kräfte.

§. 11. Wirken zwei **ungleiche** Kräfte P und Q nach gerad entgegengesetzten Richtungen MA und MB auf einen Punct M (Fig. 3), so ist ihre Resultirende der **Unterschied** aus beiden Kräften und dabei nach jener Seite hin wirksam, nach welcher die gröfsere dieser beiden Kräfte wirkt; es ist nämlich $R = P - Q$ oder $= Q - P$, je nachdem $P > Q$ oder $Q > P$ ist; im erstern Falle wirkt R gegen A, im letztern gegen B.

Ist z. B. $P = 5$ und $Q = 3$ (auf die Benennung der Kräfteneinheit kommt es dabei nicht an), so wird $R = 5 - 3 = 2$ nach A wirksam, d. h. es ist für den Erfolg genau eben so, als ob anstatt der beiden vorhandenen Kräfte von 5 und 3, z. B. 5 Pf. und 3 Pfund, welche auf M nach MA und MB wirken, nur die einzige Kraft von 2 Pf. von M nach A wirksam oder vorhanden wäre. Denn zerlegt man die Kraft $P = 5$ in die beiden gleichgeltenden $3 + 2$, so hält die Kraft 3 von P der Kraft $Q = 3$ (§. 9) das Gleichgewicht, so, dafs diese beiden Kräfte auf die Resultirende keinen Einflufs haben und als nicht vorhanden angesehen werden können; dadurch bleibt aber nur noch die einzige nach MA wirkende Kraft von 2 Pfund übrig, welches sofort die Resultirende ist.

§. 12. Wirken auf einen Punct M (Fig. 4) mehrere Kräfte P, Q, S, P', Q' theils nach einer, theils nach der entgegengesetzten Richtung, so ist ihre Resultirende $R = (P + Q + S) \quad (P' + Q')$ oder $= (P' + Q') - (P + Q + S)$, je nachdem die eine oder die andere Summe der nach einerlei Seite hin wirkenden Kräfte die gröfsere ist.

Ist z. B. $P = 2$, $Q = 5$, $S = 3$, $P' = 6$ und $Q' = 8$, so ist $R = (6 + 8) - (2 + 5 + 3) = 4$ die Gröfse der Resultirenden und MB ihre Richtung.

§. 13. Weitere Art die Resultirende zu finden. Betrachtet man in allen vorhergehenden Fällen die Kräfte nicht blofs in wie ferne sie Bewegung erzeugen wollen, sondern wirklich erzeugen; so kann die Resultirende in allen Fällen auch dadurch gefunden werden, dafs man die Kräfte auf ihren Richtungen proportional aufträgt (§. 8) und die dadurch begrenzten geraden Linien zugleich als die Wege ansieht, die der bewegliche Punct in einerlei Zeit zurücklegen würde, wenn jede der einzelnen Kräfte allein nach der betreffenden Richtung wirksam wäre.

Sind z. B. in jenem Falle, in welchem (§. 11) zwei Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen wirken, $P = 3$ und $Q = 2$ Pfund dieser auf M (Fig. 5) nach MA und MB wirkenden Kräfte; so trage man eine beliebige Linieneinheit e von M gegen A bis a 3, und gegen B bis b 2 Mal auf, so, dafs sich $Ma : Mb = 3 : 2$, also wie $P : Q$ verhalten. Obschon nun die Linien Ma und Mb den Kräften P und Q blofs proportional sind, so ist es doch erlaubt kurzweg diese den Kräften selbst gleich und $Ma = P$, $Mb = Q$ zu setzen.

Wirken aber zwei oder mehrere Kräfte auf einen beweglichen Punct eine gewisse Zeit t hindurch gleichzeitig ein, so ist der Erfolg genau derselbe, als ob jede Kraft für sich während der Zeit t, aber eine nach der andern gewirkt hätte. Geht z. B. ein Mensch in einem segelnden Schiffe von einem Puncte A (Fig. 6) des einen Bordes zu einem andern Puncte B des andern, und macht das Schiff während dieser Zeit den Weg $AC = BD$ vorwärts; so hat der Mensch gleichzeitig zwei Bewegungen: eine von A nach B, und die zweite von A nach C. Liefse nun sein eigentlicher Weg auf der Wasserfläche eine Spur zurück, so wäre diese die gerade Linie AD, d. i. die Diagonale des aus den beiden Linien AC und AB construirten Parallelogramms $ABDC$; denn theilt man AC und AB in eine beliebige, aber die nämliche Anzahl gleicher Theile Aa, $ab\ldots$, Aa', $a'b'\ldots$; so macht das Schiff die Wege Aa, $ab\ldots$, während der Mensch jene Aa', $a'b'\ldots$ zurücklegt; ist nun aber der Punct A in a, so ist a' in m, ist A in b, so ist b' in n u. s. w. so, dafs sich also der Mensch nach Verlauf der einzelnen auch noch so kleinen Zeitintervallen, in den Endpuncten der Diagonalen der kleinen Parallelogramme aa', $bb'\ldots$, folglich fortwährend auf der geraden Linie AD und zuletzt, nach Verlauf der bestimmten Zeit, im Endpuncte D der Diagonale AD befindet. Hätten nun aber diese beiden Bewegungen des Menschen nicht gleichzeitig, sondern nach einander Statt gefunden, wäre also z. B. der Mensch zuerst von A nach B gegangen und hätte dann erst das Schiff seinen Weg BD gemacht, oder wäre zuerst das Schiff von A nach C gesegelt und hätte hierauf der Mensch seinen Weg $AB = CD$ zurückgelegt, so würde er in beiden Fällen an den Punct D, wie bei der gleichzeitigen Bewegung angelangt seyn.

Diesen Satz nun auf unser vorliegendes Beispiel angewendet, denken wir uns zuerst die Kraft von 3 Pfund allein wirksam, so wird sie den Punct M in einer bestimmten Zeit von M nach a bringen; wirkt jetzt die Kraft 2 Pf. nach ihrer Richtung, so bringt sie (da die Wirkungen den Kräften proportional sind) diesen Punct in einer gleichen Zeit um das Stück $3\,1 = Mb$ zurück, so, dafs sich also M im Puncte 1 befindet; da nun dasselbe auch durch die gleichzeitige Wirkung der beiden Kräfte 3 und 2 erfolgt, und aufserdem eine Kraft $= 1$ ebenfalls diese Wirkung hervorbringt, so ist diese letztere $= 3 - 2$, gerade so wie wir bereits in §. 11 fanden, die Resultirende aus den beiden Kräften P und Q.

§. **14. Kräftenparallelogramm.** Wirken zwei Kräfte P und Q (Fig. 7) auf einen Punct M unter irgend einem Winkel AMB, so schneide man auf ihren Richtungen MA und MB diese Kräfte (im Sinne des vorigen Paragraphes) ab, d. i. man mache $Ma = P$ und $Mb = Q$ (d. h. $Ma : Mb = P : Q$), ergänze aus den Puncten a und b das Parallelogramm $MbCa$ und ziehe die Diagonale MC; so stellt diese die Resultirende R sowohl der Gröfse als auch der Lage nach vor, oder es ist $R = MC$ (d. h. $Ma : Mb : MC = P : Q : R$); denn theilt man Ma und Mb in eine gleiche Anzahl gleicher Theile in den Puncten 1, 2 ..., 1′, 2′ ...; so würde die Kraft Q für sich allein den beweglichen Punct M in denselben Zeitabschnitten nach den Puncten 1′, 2′ ... bringen, in welchen ihn die Kraft P nach den Puncten 1, 2 ... brächte. Denkt man sich nun die beiden Kräfte immer nach einander wirkend, so wird, wenn M in 1 ist, dieser Punct in der zugehörigen gleichen Zeit von der Kraft Q durch die Gerade $1m$, welche der $M1'$ gleich und parallel ist, geführt, der Punct M also während des ersten Zeitintervalles durch beide Kräfte P und Q (vereint oder getrennt) nach m gebracht werden. Eben so zeigt man, dafs dieser Punct M nach dem zweiten Zeitintervall in n seyn mufs, wenn $2n$ gleich und parallel mit $M2'$ ist, u. s. w., so, dafs also durch die vereinte oder combinirte Wirkung beider Kräfte der bewegliche Punct M der Reihe nach die Puncte m, n, o, p, C, nämlich die Spitzen der einzelnen Parallelogramme $11'$, $22'$ ... ab einnimmt, durch welche Puncte sofort die Resultirende gehen mufs. Nun ist aber aus der Geometrie bekannt, dafs diese sämmtlichen Puncte m, n .. C in einer geraden Linie liegen, welche die Diagonale des Parallelogramms $MaCb$, welches defshalb auch Kräftenparallelogramm genannt wird, bildet.

Da in einem jeden Dreieck eine Seite (z. B. MC) immer kleiner als die Summe der beiden übrigen (Mb und $bC = Ma$) und gröfser als ihr Unterschied ist, so ist auch die Resultirende R in einem solchem Falle kleiner als die Summe (und zwar um so kleiner, je gröfser der Winkel AMB ist) und gröfser als der Unterschied der beiden Seitenkräfte P und Q.

Ist z. B. $P = 5$ und $Q = 3$ Pfund, so trage man eine beliebige Linieneinheit e (Fig. 8) 5 Mal auf MA und 3 Mal auf MB bis A und B auf, ergänze das Parallelogramm, ziehe die Diagonale MC und untersuche, wie oft dieselbe Linieneinheit e in dieser enthalten ist; fände man z. B. dafür die Zahl $7^1/_2$, so wäre die Resultirende $R = 7^1/_2$ Pf. Am bequemsten dient zu solchen Constructionen ein tausendtheiliger Mafsstab.

§. 15. Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte. Soll umgekehrt eine nach der Richtung MC (Fig. 9) wirkende Kraft P in zwei Kräfte nach den Richtungen MA und MB zerlegt werden, so schneide man auf MC ein Stück Mc der gegebenen Kraft proportional ab (indem man z. B. eine beliebig gewählte Linieneinheit so oft aufträgt, als P Pfunde hat), ziehe durch c zu MB und MA die Parallelen ca und cb, so stellen Ma und Mb die gesuchten Seitenkräfte p und q vor, welche sich zu der gegebenen Kraft P eben so, wie die Linien Ma und Mb zu jener Mc verhalten.

Hat z. B. die gegebene Kraft P 20 Loth, und verhalten sich nach vollendeter Construction die drei Linien $Mc : Ma : Mb$ wie $4 : 5 : 3$, so, dafs also die 4 Theile von Mc die 20 Loth, folglich 1 Theil 5 Loth bezeichnet, so wird $p = 5 \times 5 = 25$ und $q = 3 \times 5 = 15$ Loth.

§. 16. Zusammensetzung von Kräften, *welche auf einen Punct wirken und in* **ein und derselben Ebene** *liegen.* Wirken z. B. drei Kräfte P, P', P'' auf den beweglichen Punct M (Fig. 10) nach den in derselben Ebene liegenden Richtungen MA, MB, MD; so schneide man darauf die Linien MA, MB, MD diesen Kräften P, P', P'' proportional ab, setze zuerst zwei dieser Kräfte, z. B. P und P' nach §. 14 zusammen, so stellt die Diagonale MC ihre Resultirende vor; diese verbinde man mit der dritten Kraft P'', indem man abermals das Parallelogramm $MCED$ construirt, so bezeichnet die Diagonale ME die Resultirende R aus diesen beiden, folglich auch aus den drei Seitenkräften P, P', P''. Auf dieselbe Weise findet man auch die Mittelkraft von 4 und überhaupt jeder beliebigen Anzahl von Kräften; dabei ist die Ordnung, nach welcher man die Kräfte mit einander verbindet, willkürlich. Stehen die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte, so findet man die vorletzte Resultirende der letzten Kraft gleich und gerade entgegengesetzt.

Mit Rücksicht darauf, dafs bei dieser Construction durch den Endpunct A der ersten Kraft P die Gerade AC gleich und parallel mit der zweiten Kraft P', durch den Endpunct C die Gerade CE gleich und parallel mit der dritten Kraft P'' ist, und die Diagonale oder Resultirende ME das dadurch entstehende Polygon $MACE$ schliefst — kann man die Resultirende R auch ganz einfach durch Construirung dieses Polygons (Fig. 10, a) finden, in welchem man die offen bleibende Seite durch die Gerade ME schliefst, welche sofort die gesuchte Resultirende ist. Schliefst sich das Polygon durch die zuletzt aufgetragene Kraft von selbst, so stehen die gegebenen Kräfte unter sich im Gleichgewichte oder es ist $R = 0$. Dieses Verfahren kann offenbar auf jede Anzahl von in einer Ebene liegenden Kräften ausgedehnt werden.

Anmerkung. Stehen also die 3 auf den Punct M wirkenden Kräfte P, P', P'' (Fig. 10, b) unter einander im Gleichgewichte und bilden ihre in einer Ebene liegenden Richtungen die Winkel a, b, c; so entsteht durch dieses Verfahren das Dreieck ABC, dessen Seiten $= P$, P', P'' und Winkel $A = 180 - a$, $B = 180 - b$, $C = 180 - c$ sind. Da sich nun nach einem bekannten Satze in jedem Dreiecke die Seiten wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkel verhalten und zwei Nebenwinkel (wie A und a) gleiche Sinus haben, so hat man für das Gleichgewicht der 3 auf M wirkenden Kräfte auch

$$P : P' : P'' = Sin\, c : Sin\, b : Sin\, a.$$

§. 17. Zusammensetzung von Kräften, *welche auf einen Punct wirken und in* verschiedenen *Ebenen liegen.*

Wirken auf den Punct M (Fig. 11) 3 Kräfte nach den Richtungen MA, MB, MC, und bezeichnen diese genannten Linien zugleich die Kräfte selbst; so stellt die Diagonale MD des Parallelogramms AB die Mittelkraft aus den beiden ersten Kräften vor; construirt man ferner mit dieser und der dritten Kraft MC das Parallelogramm CD, so ist die Diagonale ME desselben die gesuchte Resultirende aus den 3 gegebenen Kräften.

Wie man sieht, ist hier die Resultirende nichts anders als die Diagonale des aus den drei Seiten MA, MB, MC construirten Parallelopipedes, welches ein senkrechtes ist, wenn die Richtungen der Kräfte wechselweise auf einander senkrecht stehen.

§. 18. Beispiele über die Zerlegung der Kräfte.

1. Wird beim Schiffszug gegen den Strom das Schiff BC (Fig. 12) durch eine Kraft P in der Richtung AP schief gegen das Ufer MN gezogen, so mufs man zur Beurtheilung der Richtung, welche das Schiff nimmt, diese Kraft P in zwei auf einander senkrechte Kräfte p und p'

nach den Richtungen AC (die Länge des Schiffes) und Ab zerlegen. Da aber durch die Form und Bauart des Schiffes diese letztere Kraft so gut wie verloren geht (indem diese die grofse, an der Seite des Schiffes anliegende Wassermasse wegschieben müfste), so bleibt nur die erstere, welche also das Schiff in der mit dem Ufer parallelen Richtung BC fortbewegt.

2. Ist das eine Ende einer Schnur an einem horizontal in eine Wand eingeschlagenen Nagel A (Fig. 13) befestigt und hierauf ohne gespannt zu seyn über die Rolle C geführt, so kann, wenn an dem Puncte M ein Gewicht Q aufgehängt wird, welches sich in einem Ringe auf der Schnur verschieben läfst, zuerst gefragt werden, wie grofs für das Gleichgewicht die am andern Ende der Schnur lothrecht wirkende Kraft P seyn mufs, und dann, welchen Druck oder Zug der Nagel A dabei zu erleiden hat. Um diese Fragen zu beantworten, mufs man das Gewicht Q als eine lothrecht wirkende Kraft ansehen und diese in zwei Kräfte nach den Richtungen MA und MB, nach welchen die Schnur gespannt wird, zerlegen. Nimmt man also auf der durch M gehenden lothrechten Linie $MD = Q$ und construirt das Parallelogramm ab, so stellen Ma und Mb die beiden Seitenkräfte vor, von denen die letztere die Gröfse der Kraft P angibt. Zerlegt man die erstere Ma, um die Kraft zu finden, welche den Nagel aus der Wand herauszuziehen sucht, neuerdings in zwei auf einander senkrechte Kräfte nach horizontaler und verticaler Richtung, so erhält man durch Construirung des Rechteckes de sofort ad für die in A nach horizontaler und ae für die an denselben Punct nach verticaler Richtung wirkenden Kraft.

Ist das Gewicht Q, wie es in Fig. (13, a) dargestellt ist, weiter in die Höhe gezogen, so zeigt ein Blick auf die Zeichnung (weil MD denselben Werth behält), dafs jetzt sowohl P als auch die horizontale Zugkraft ad auf den Nagel gröfser ist, als in der vorigen Lage des Gewichtes.

3. Stellt MN (Fig. 14) das Segel eines Schiffes vor, welches von dem Winde in der Richtung FO getroffen wird, dessen Stärke durch die Linie OD dargestellt werden soll; so zerlege man, um den Erfolg der Einwirkung des Windes zu finden, DO in zwei Seitenkräfte CO und EO, wovon die eine in die Richtung der Segelfläche fällt und die andere darauf senkrecht steht. Da die erstere dieser beiden Kräfte verloren geht und die zweite das Schiff in der Richtung Od zu bewegen sucht, so zerlege man $Od = OE$ abermals in zwei auf einander senkrechte Kräfte Oa und Ob, so stellt die erstere die Kraft vor, mit welcher das Schiff seiner Länge BA nach vorwärts, die letztere dagegen

jene Kraft dar, mit welcher das Schiff seitwärts (leewärts) getrieben wird, wobei jedoch die letztere, in Folge der eigenthümlichen Form des Schiffes, nur eine geringe Wirkung äufsern kann.

Auf derselben Wirkung beruht das sogenannte Laviren der Schiffe bei ganz contrairem Winde.

§. **19. Zusammensetzung von Kräften,** *welche auf* **mehrere** *Puncte eines Körpers wirken.* Wirken an den Endpuncten A und B (Fig. 15) der steifen geraden Linien AB zwei Kräfte P und Q nach den in einerlei Ebene liegenden, gegen M zu convergirenden Richtungen AD und BE, und stellen diese genannten Stücke zugleich die Kräfte P und Q selbst vor; so verlängere man DA und EB bis sich diese Geraden in M durchschneiden, so kann man (§. 8) diesen Punct als den gemeinschaftlichen Angriffspunct der beiden Kräfte P und Q ansehen. Schneidet man jetzt $Ma = AD$ und $Mb = BE$ ab und construirt das Parallelogramm ab, so ist die Diagonale Mc die Resultirende aus den beiden Kräften P und Q. Verlängert man diese Diagonale, so kann man den Durchschnittspunct C mit der Geraden AB als den Angriffspunct der Resultirenden R ansehen, deren Gröfse durch $CF = Mc$ dargestellt wird.

Fällt man aus einem Puncte C der Geraden Mc auf AM und BM die Perpendikel CG und CH, so wie auch noch auf Mc das Perpendikel ad, so ist das Dreieck Mad jenem MGC und das Dreieck acd jenem MCH (wegen W. acd = W. cMb) ähnlich und man hat

$$\frac{ad}{Ma} = \frac{GC}{MC} \text{ und } \frac{ad}{ac} = \frac{HC}{MC},$$

oder wenn man die erste Gleichung durch die zweite dividirt:

$\frac{ac}{Ma} = \frac{GC}{HC}$ oder wegen $Ma = P$ und $ac = Mb = Q$, auch

$\frac{Q}{P} = \frac{GC}{HC}$ oder was dasselbe ist $P : Q = CH : CG$ . . . (1,

d. h. die Kräfte P und Q verhalten sich verkehrt wie die aus einem Puncte C ihrer Resultirenden auf ihre Richtungen gefällten Perpendikel.

Anmerkung. Es ist leicht zu sehen, dafs die Länge der Geraden AB auf die Gröfse der Resultirenden keinen Einflufs hat.

§. **20. Denselben Satz für parallele Kräfte.** Der vorige Satz ist von der Gröfse des Winkels AMB unabhängig, er gilt also auch noch, wenn derselbe Null, d. h. wenn die beiden Kräfte

P und Q zu einander parallel sind. In diesem Falle bilden aber die beiden Perpendikel CG und CH (Fig. 16) eine gerade Linie und da die Dreiecke CAG und CBH ähnlich sind, so folgt

$$CH : CG = CB : CA \quad \text{oder}$$

(Gleichung 1 des vorigen Paragraphes)

$$P : Q = CH : CG = CB : CA \ldots (2,$$

d. h. die Seitenkräfte P und Q verhalten sich umgekehrt wie die Entfernungen des Angriffspunctes C der Resultirenden von den Angriffspuncten der beiden Seitenkräfte.

Aus dieser Proportion folgt zugleich $P : P + Q = CB : AB$ und daraus ist $CB = AB \frac{P}{P+Q}$, wodurch der Angriffspunct C der Resultirenden gegeben ist. Eben so ist auch $CH = GH \frac{P}{P+Q}$, die Entfernung der Resultirenden von der Kraft Q, und da diese (weil GH, P und Q constant sind), wo man auch den Punct C in der Resultirenden annehmen mag, dieselbe bleibt, so folgt, daſs die Resultirende mit den Seitenkräften parallel läuft.

Um die Gröſse der Resultirenden zu finden, bemerke man, daſs für $AB = 0$ die beiden Seitenkräfte in C zusammenfallen und sofort (§. 10) $R = P + Q$ ist; da nun nach dem vorigen Satze (§. 19, Anm.) die Gröſse der Resultirenden von der Länge der Geraden AB unabhängig ist, so bleibt für alle Fälle die Gröſse $R = P + Q \ldots (3$ ungeändert.

Wirken also zwei parallele Kräfte nach einerlei Richtung, so theilt 1stens die Resultirende die gerade Linie, welche den Abstand der beiden Seitenkräfte bestimmt, im verkehrten Verhältniſs der Kräfte, 2tens ist die Richtung der Resultirenden mit jener der Seitenkräfte parallel, und 3tens ist die Resultirende gleich der Summe der Seitenkräfte.

Um daher zwischen zwei parallelen, an den Endpuncten einer frei beweglichen Geraden AB nach derselben Seite hin wirkenden Kräften das Gleichgewicht herzustellen, wird man die Gerade AB im Puncte C im umgekehrten Verhältniſs der beiden Kräfte theilen und in diesem Puncte eine Kraft, welche der Summe aus den beiden gegebenen Kräften gleich ist, mit dieser parallel, jedoch in entgegengesetzter Richtung anbringen.

Auch ist nun leicht die umgekehrte Aufgabe: eine gegebene Kraft R in zwei parallele, nach einerlei Richtung wirkende Kräfte zu zerlegen, aufzulösen.

Anmerkung. Will man die Gröfse der Resultirenden, d. i. die vorige Relation (3 von dem obigen Satze in §. 19 unabhängig, nämlich unmittelbar für parallele Kräfte ableiten, so darf man nur zu den beiden gegebenen Kräften AD und BE (Fig. 17) zwei gleiche, sonst aber beliebige Kräfte Aa und Bb, welche in der Verlängerung von AB nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und sonach, da sie sich aufheben, an dem Resultate nichts ändern, hinzufügen, die aus AD, Aa und BE, Bb entstehenden Resultirenden Ac und Bd bestimmen, diese bis zu ihren Durchschnitt M verlängern und darauf $Mr = Ac$, $Ms = Bd$ abschneiden, durch M mit AB eine Parallele ziehen und die Resultirenden Mr, Ms neuerdings in ihre ursprünglichen Kräfte Mm, Mp und Mn, Mo auflösen; so findet sich, dafs von den vier zuletzt genannten Kräften, welche man anstatt der beiden ursprünglichen parallelen Kräfte substituiren kann, jene beiden Mm und Mn, da sie einander gleich sind (jede ist $= Aa = Bb$) und entgegengesetzt wirken, aufheben und daher die beiden übrigen $Mp = AD$ und $Mo = BE$, da sie nach derselben Richtung wirken, durch ihre Summe $AD + BE$ die Resultirende CF darstellen, wodurch die obige Relation (3 direct abgeleitet ist.

§. 21. Wirken die beiden parallelen Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen und ist z. B. $Q > P$; so zerlege man (Fig. 18) Q in zwei parallele Kräfte P und R, wovon die erstere durch A geht, so, dafs also $Q = P + R$ oder $R = Q - P$ . . . (1 wird. Ist C der Angriffspunct dieser Kraft R auf der verlängerten Geraden AB, so ist (voriger Paragraph) $P : R = BC : AB$, woraus

$$BC = AB \frac{P}{Q - P} \quad . . . (2$$

folgt.

Da sich nun die beiden im Puncte A wirkenden Kräfte P aufheben, so bleibt nur die Kraft R als gesuchte Resultirende der beiden ursprünglichen Kräfte P und Q übrig, deren Gröfse aus (1 und Lage durch Gleichung (2 bestimmt ist; die Resultirende ist nämlich dem Unterschiede aus beiden gegebenen Kräften gleich, und wirkt mit ihnen parallel nach jener Seite hin, nach welcher die gröfsere der beiden Kräfte wirkt.

Anmerkung. Für den besondern Fall von $P = Q$ wird aus (2

$$BC = \frac{AB \, . \, P}{0} = \infty,$$

d. i. Unendlich, zum Zeichen, dafs es in diesem Falle für die beiden Kräfte keine Resultirende gibt, folglich auch durch das Hinzufügen einer einzigen Kraft kein Gleichgewicht hergestellt werden kann.

§. 22. Zusammensetzung von parallelen Kräften, *welche auf ein System von Puncten wirken, die fest*

mit einander verbunden sind. Wirken die parallelen Kräfte p, p', p''... auf die mit einander verbundenen Puncte A, B, C... (Fig. 19) im Raume nach einerlei Richtung, so suche man nach §. 20 zuerst die Resultirende aus den beiden Kräften p und p', indem man ihre Angriffspuncte durch die Gerade AB verbindet, und diese in M so theilt, dafs $AM : BM = p' : p$ wird. Denkt man sich in diesem Puncte M die Resultirende $r = p + p'$ angebracht und verbindet man diese mit der dritten Kraft p'', so erhält man auf gleiche Art auf der Geraden MC den Angriffspunct der neuen Resultirenden $r' = p + p' + p''$; diese mit der nächsten Kraft p''' verbunden, erhält man (durch Theilung der Geraden ND, so dafs $NO : OD = p''' : r'$) den Angriffspunct O der Resultirenden $R = p + p' + p'' + p'''$, und so fährt man fort, bis man auch die letzte Seitenkraft in Verbindung gebracht hat.

Wirken die parallelen Kräfte theils nach der einen, theils nach der entgegengesetzten Richtung, so suche man nach der vorigen Weise sowohl von jenen Kräften, welche nach der einen, als auch von jenen, welche nach der entgegengesetzten Seite wirken, die Resultirende, und dann erst von diesen beiden parallelen, nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften nach dem vorigen Paragraphe die Mittelkraft, so ist diese zugleich auch die gesuchte Resultirende aus den ursprünglich gegebenen Kräften.

§. 23. Mittelpunct der parallelen Kräfte. Aus dem Verfahren des vorigen Paragraphes geht hervor, dafs wenn die sämmtlichen parallelen Kräfte um ihre Angriffspuncte wie immer gedreht werden, dabei aber nicht aufhören, unter sich parallel zu seyn, weder die Gröfse der Resultirenden, noch ihr Angriffspunct verändert wird; auch bleibt der Angriffspunct der Resultirenden noch derselbe, wenn die sämmtlichen Kräfte so vergröfsert oder verkleinert werden, dafs ihr Verhältnifs zu einander dasselbe bleibt (wenn man also jede $n$fach oder von jeder den $n$ten Theil nimmt), blofs die Gröfse der Resultirenden ändert sich dabei, und zwar in demselben Verhältnifs.

Aus diesem Grunde heifst dieser Angriffspunct der Resultirenden auch Mittelpunct der parallelen Kräfte.

Auch läfst sich ganz einfach zeigen, oder folgt vielmehr aus dem Bisherigen schon von selbst, dafs wenn die Angriffspuncte der parallelen Kräfte in einer Ebene oder in einer geraden Linie liegen, auch der Mittelpunct dieser Kräfte in derselben Ebene oder der nämlichen geraden Linie liegen müsse.