Erster Abschnitt.

Statik.

Erstes Kapitel.

Von der näheren Bestimmung der Kräfte, so wie von ihrer Zusammensetzung und Zerlegung.

§. 6. **Ruhe und Bewegung.** Von einem Körper, welcher seinen Ort nicht verändert, sagt man er ruhe; für uns ist jede Ruhe nur eine relative, nämlich gegen die ihn umgebenden Gegenstände, weil jeder uns zugängige Körper an der doppelten Bewegung der Erde theil nimmt, also eben so wenig absolut ruht, als ein in einem segelnden Schiffe ruhig sitzender Mensch. Ändert dagegen ein Körper seinen Ort auf eine stetige Weise, so sagt man er bewege sich.

§. 7. **Gleichgewicht.** Ein Körper kann ruhen, entweder indem gar keine, oder auch indem Kräfte auf ihn wirken, welche sich gegenseitig aufheben; im letztern Falle sind die Kräfte, oder wie man sich auch kürzer ausdrückt, ist der Körper im Gleichgewichte, und dieser Zustand unterscheidet sich von der Ruhe nur durch das Bestreben zur Bewegung.

§. 8. **Nähere Bestimmung der Kräfte.** Man unterscheidet bei einer jeden auf einen Körper wirkenden Kraft: 1tens ihren Angriffspunct, 2tens ihre Richtung, und 3tens ihre Größe oder Intensität.

Der Angriffspunct A (Fig. 1) ist derjenige Punct des Körpers M, auf welchen die Kraft unmittelbar wirkt. Die Richtung der Kraft ist die durch den Angriffspunct gehende gerade Linie AB, nach welcher die Kraft den Punct A des Körpers bewegt oder zu bewegen strebt. Übrigens kann jeder Punct der Geraden AB oder ihrer Verlängerung zum Angriffspuncte der Kraft genommen werden, wenn dieser mit dem erstern A unveränderlich verbunden ist.

Zur Schätzung der Gröfse oder Intensität einer Kraft, vergleicht man sie mit einer beliebigen zur Einheit gewählten Kraft, wozu sich am besten die Gewichtseinheit eignet; denn wirkt z. B. eine ziehende Kraft auf den Körper M in der Richtung AB, so kann man in A eine Schnur oder einen Faden befestigen, diesen in der Richtung AB über eine Rolle gehen lassen und an den Faden ein Gewicht von solcher Gröfse anhängen, dafs dadurch auf den Körper derselbe Zug wie durch die zu schätzende Kraft (welche z. B. eine Muskelkraft seyn kann) hervorgebracht wird; hat das Gewicht P Pfunde, so kann man dieses Gewicht als das Mafs für die Intensität dieser Zugkraft ansehen, oder diese letztere ganz einfach gleich P setzen, wenn man das Pfund zur Gewichtseinheit und zugleich als Einheit der Kräfte annimmt. Ist p überhaupt die Kräfteneinheit, so wird eine $2, 3 .. n$ Mal so grofse Kraft durch $2p$, $3p .. np$, oder wenn man $p = 1$ setzt, schlechtweg durch die Absolutzahl $2, 3 .. n$ ausgedrückt.

Für die Ableitung der Gesetze des Gleichgewichtes sind weniger diese absoluten Zahlen, als die Verhältnifszahlen zwischen den Gröfsen der Kräfte nothwendig; man erhält sie am einfachsten, indem man die geraden Linien, nach welchen die Kräfte wirken, durch Annahme einer ganz beliebigen Linieneinheit den betreffenden Kräften proportional abschneidet.

§. 9. Zusammensetzung der auf einen Punct wirkenden Kräfte. Zwei gleiche Kräfte, welche auf einen beweglichen Punct nach gerad entgegengesetzten Richtungen wirken, halten sich das Gleichgewicht oder heben sich auf; umgekehrt erkennt man, dafs zwei Kräfte einander gleich sind, wenn sie unter diesen Umständen im Gleichgewichte stehen.

Durch das Zusammennehmen von $2, 3 .. n$ solchen gleichen Kräften erhält man eine $2, 3 .. n$ fache Kraft.

§. 10. Mittelkraft oder Resultirende. Wirken auf einen Punct M (Fig. 2) mehrere Kräfte p, q, r nach derselben Richtung MA, so kann man diese durch eine einzige Kraft R, welche der Summe aus diesen einzelnen Kräften gleich ist, ersetzen. Diese Kraft $R = p + q + r$, welche genau dasselbe bewirkt, was die einzelnen Kräfte bewirken, heifst die **Mittelkraft** oder **Resultirende**, während auf diese bezogen die Kräfte p, q, r die **gleichgeltenden** oder auch (besonders wenn ihre Richtungen einen Winkel bilden) **Seitenkräfte** genannt werden.

Wirken z. B. auf den Punct M die Kräfte von 2, 3 und 5 Pfund in der Richtung MA, so ist die ebenfalls von M gegen A wirkende Resultirende $R = 10$ Pf.

Das Verfahren, um aus mehreren Kräften die Mittelkraft zu finden, heifst das **Zusammensetzen**, das entgegengesetzte, um eine Kraft in mehrere Seitenkräfte zu zerlegen, das **Zerlegen** der Kräfte.

§. 11. Wirken zwei **ungleiche** Kräfte P und Q nach gerad entgegengesetzten Richtungen MA und MB auf einen Punct M (Fig. 3), so ist ihre Resultirende der **Unterschied** aus beiden Kräften und dabei nach jener Seite hin wirksam, nach welcher die gröfsere dieser beiden Kräfte wirkt; es ist nämlich $R = P - Q$ oder $= Q - P$, je nachdem $P > Q$ oder $Q > P$ ist; im erstern Falle wirkt R gegen A, im letztern gegen B.

Ist z. B. $P = 5$ und $Q = 3$ (auf die Benennung der Kräfteneinheit kommt es dabei nicht an), so wird $R = 5 - 3 = 2$ nach A wirksam, d. h. es ist für den Erfolg genau eben so, als ob anstatt der beiden vorhandenen Kräfte von 5 und 3, z. B. 5 Pf. und 3 Pfund, welche auf M nach MA und MB wirken, nur die einzige Kraft von 2 Pf. von M nach A wirksam oder vorhanden wäre. Denn zerlegt man die Kraft $P = 5$ in die beiden gleichgeltenden $3 + 2$, so hält die Kraft 3 von P der Kraft $Q = 3$ (§. 9) das Gleichgewicht, so, dafs diese beiden Kräfte auf die Resultirende keinen Einflufs haben und als nicht vorhanden angesehen werden können; dadurch bleibt aber nur noch die einzige nach MA wirkende Kraft von 2 Pfund übrig, welches sofort die Resultirende ist.

§. 12. Wirken auf einen Punct M (Fig. 4) mehrere Kräfte P, Q, S, P', Q' theils nach einer, theils nach der entgegengesetzten Richtung, so ist ihre Resultirende $R = (P + Q + S) \quad (P' + Q')$ oder $= (P' + Q') - (P + Q + S)$, je nachdem die eine oder die andere Summe der nach einerlei Seite hin wirkenden Kräfte die gröfsere ist.

Ist z. B. $P = 2$, $Q = 5$, $S = 3$, $P' = 6$ und $Q' = 8$, so ist $R = (6 + 8) - (2 + 5 + 3) = 4$ die Gröfse der Resultirenden und MB ihre Richtung.

§. 13. Weitere Art die Resultirende zu finden. Betrachtet man in allen vorhergehenden Fällen die Kräfte nicht blofs in wie ferne sie Bewegung erzeugen wollen, sondern wirklich erzeugen; so kann die Resultirende in allen Fällen auch dadurch gefunden werden, dafs man die Kräfte auf ihren Richtungen proportional aufträgt (§. 8) und die dadurch begrenzten geraden Linien zugleich als die Wege ansieht, die der bewegliche Punct in einerlei Zeit zurücklegen würde, wenn jede der einzelnen Kräfte allein nach der betreffenden Richtung wirksam wäre.

Sind z. B. in jenem Falle, in welchem (§. 11) zwei Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen wirken, $P = 3$ und $Q = 2$ Pfund dieser auf M (Fig. 5) nach MA und MB wirkenden Kräfte; so trage man eine beliebige Linieneinheit e von M gegen A bis a 3, und gegen B bis b 2 Mal auf, so, dafs sich $Ma : Mb = 3 : 2$, also wie $P : Q$ verhalten. Obschon nun die Linien Ma und Mb den Kräften P und Q blofs proportional sind, so ist es doch erlaubt kurzweg diese den Kräften selbst gleich und $Ma = P$, $Mb = Q$ zu setzen.

Wirken aber zwei oder mehrere Kräfte auf einen beweglichen Punct eine gewisse Zeit t hindurch gleichzeitig ein, so ist der Erfolg genau derselbe, als ob jede Kraft für sich während der Zeit t, aber eine nach der andern gewirkt hätte. Geht z. B. ein Mensch in einem segelnden Schiffe von einem Puncte A (Fig. 6) des einen Bordes zu einem andern Puncte B des andern, und macht das Schiff während dieser Zeit den Weg $AC = BD$ vorwärts; so hat der Mensch gleichzeitig zwei Bewegungen: eine von A nach B, und die zweite von A nach C. Liefse nun sein eigentlicher Weg auf der Wasserfläche eine Spur zurück, so wäre diese die gerade Linie AD, d. i. die Diagonale des aus den beiden Linien AC und AB construirten Parallelogramms $ABDC$; denn theilt man AC und AB in eine beliebige, aber die nämliche Anzahl gleicher Theile Aa, $ab\ldots$, Aa', $a'b'\ldots$; so macht das Schiff die Wege Aa, $ab\ldots$, während der Mensch jene Aa', $a'b'\ldots$ zurücklegt; ist nun aber der Punct A in a, so ist a' in m, ist A in b, so ist b' in n u. s. w. so, dafs sich also der Mensch nach Verlauf der einzelnen auch noch so kleinen Zeitintervallen, in den Endpuncten der Diagonalen der kleinen Parallelogramme aa', $bb'\ldots$, folglich fortwährend auf der geraden Linie AD und zuletzt, nach Verlauf der bestimmten Zeit, im Endpuncte D der Diagonale AD befindet. Hätten nun aber diese beiden Bewegungen des Menschen nicht gleichzeitig, sondern nach einander Statt gefunden, wäre also z. B. der Mensch zuerst von A nach B gegangen und hätte dann erst das Schiff seinen Weg BD gemacht, oder wäre zuerst das Schiff von A nach C gesegelt und hätte hierauf der Mensch seinen Weg $AB = CD$ zurückgelegt, so würde er in beiden Fällen an den Punct D, wie bei der gleichzeitigen Bewegung angelangt seyn.

Diesen Satz nun auf unser vorliegendes Beispiel angewendet, denken wir uns zuerst die Kraft von 3 Pfund allein wirksam, so wird sie den Punct M in einer bestimmten Zeit von M nach a bringen; wirkt jetzt die Kraft 2 Pf. nach ihrer Richtung, so bringt sie (da die Wirkungen den Kräften proportional sind) diesen Punct in einer gleichen Zeit um das Stück $3\,1 = Mb$ zurück, so, dafs sich also M im Puncte 1 befindet; da nun dasselbe auch durch die gleichzeitige Wirkung der beiden Kräfte 3 und 2 erfolgt, und aufserdem eine Kraft $= 1$ ebenfalls diese Wirkung hervorbringt, so ist diese letztere $= 3 - 2$, gerade so wie wir bereits in §. 11 fanden, die Resultirende aus den beiden Kräften P und Q.

§. 14. Kräftenparallelogramm. Wirken zwei Kräfte P und Q (Fig. 7) auf einen Punct M unter irgend einem Winkel AMB, so schneide man auf ihren Richtungen MA und MB diese Kräfte (im Sinne des vorigen Paragraphes) ab, d. i. man mache $Ma = P$ und $Mb = Q$ (d. h. $Ma : Mb = P : Q$), ergänze aus den Puncten a und b das Parallelogramm $MbCa$ und ziehe die Diagonale MC; so stellt diese die Resultirende R sowohl der Gröfse als auch der Lage nach vor, oder es ist $R = MC$ (d. h. $Ma : Mb : MC = P : Q : R$); denn theilt man Ma und Mb in eine gleiche Anzahl gleicher Theile in den Puncten $1, 2 \ldots, 1', 2' \ldots$; so würde die Kraft Q für sich allein den beweglichen Punct M in denselben Zeitabschnitten nach den Puncten $1'$, $2' \ldots$ bringen, in welchen ihn die Kraft P nach den Puncten $1, 2 \ldots$ brächte. Denkt man sich nun die beiden Kräfte immer nach einander wirkend, so wird, wenn M in 1 ist, dieser Punct in der zugehörigen gleichen Zeit von der Kraft Q durch die Gerade $1m$, welche der $M1'$ gleich und parallel ist, geführt, der Punct M also während des ersten Zeitintervalles durch beide Kräfte P und Q (vereint oder getrennt) nach m gebracht werden. Eben so zeigt man, dafs dieser Punct M nach dem zweiten Zeitintervall in n seyn mufs, wenn $2n$ gleich und parallel mit $M2'$ ist, u. s. w., so, dafs also durch die vereinte oder combinirte Wirkung beider Kräfte der bewegliche Punct M der Reihe nach die Puncte m, n, o, p, C, nämlich die Spitzen der einzelnen Parallelogramme $11', 22' \ldots ab$ einnimmt, durch welche Puncte sofort die Resultirende gehen mufs. Nun ist aber aus der Geometrie bekannt, dafs diese sämmtlichen Puncte $m, n \ldots C$ in einer geraden Linie liegen, welche die Diagonale des Parallelogramms $MaCb$, welches defshalb auch Kräftenparallelogramm genannt wird, bildet.

Da in einem jeden Dreieck eine Seite (z. B. MC) immer kleiner als die Summe der beiden übrigen (Mb und $bC = Ma$) und gröſser als ihr Unterschied ist, so ist auch die Resultirende R in einem solchem Falle kleiner als die Summe (und zwar um so kleiner, je gröſser der Winkel AMB ist) und gröſser als der Unterschied der beiden Seitenkräfte P und Q.

Ist z. B. $P = 5$ und $Q = 3$ Pfund, so trage man eine beliebige Linieneinheit e (Fig. 8) 5 Mal auf MA und 3 Mal auf MB bis A und B auf, ergänze das Parallelogramm, ziehe die Diagonale MC und untersuche, wie oft dieselbe Linieneinheit e in dieser enthalten ist; fände man z. B. dafür die Zahl $7^1/_2$, so wäre die Resultirende $R = 7^1/_2$ Pf. Am bequemsten dient zu solchen Constructionen ein tausendtheiliger Maſsstab.

§. 15. Zerlegung einer Kraft in zwei Seitenkräfte. Soll umgekehrt eine nach der Richtung MC (Fig. 9) wirkende Kraft P in zwei Kräfte nach den Richtungen MA und MB zerlegt werden, so schneide man auf MC ein Stück Mc der gegebenen Kraft proportional ab (indem man z. B. eine beliebig gewählte Linieneinheit so oft aufträgt, als P Pfunde hat), ziehe durch c zu MB und MA die Parallelen ca und cb, so stellen Ma und Mb die gesuchten Seitenkräfte p und q vor, welche sich zu der gegebenen Kraft P eben so, wie die Linien Ma und Mb zu jener Mc verhalten.

Hat z. B. die gegebene Kraft P 20 Loth, und verhalten sich nach vollendeter Construction die drei Linien $Mc : Ma : Mb$ wie $4 : 5 : 3$, so, daſs also die 4 Theile von Mc die 20 Loth, folglich 1 Theil 5 Loth bezeichnet, so wird $p = 5 \times 5 = 25$ und $q = 3 \times 5 = 15$ Loth.

§. 16. Zusammensetzung von Kräften, *welche auf einen Punct wirken und in* **ein und derselben Ebene** *liegen.* Wirken z. B. drei Kräfte P, P', P'' auf den beweglichen Punct M (Fig. 10) nach den in derselben Ebene liegenden Richtungen MA, MB, MD; so schneide man darauf die Linien MA, MB, MD diesen Kräften P, P', P'' proportional ab, setze zuerst zwei dieser Kräfte, z. B. P und P' nach §. 14 zusammen, so stellt die Diagonale MC ihre Resultirende vor; diese verbinde man mit der dritten Kraft P'', indem man abermals das Parallelogramm $MCED$ construirt, so bezeichnet die Diagonale ME die Resultirende R aus diesen beiden, folglich auch aus den drei Seitenkräften P, P', P''. Auf dieselbe Weise findet man auch die Mittelkraft von 4 und überhaupt jeder beliebigen Anzahl von Kräften; dabei ist die Ordnung, nach welcher man die Kräfte mit einander verbindet, willkürlich. Stehen die gegebenen Kräfte im Gleichgewichte, so findet man die vorletzte Resultirende der letzten Kraft gleich und gerade entgegengesetzt.

Mit Rücksicht darauf, dafs bei dieser Construction durch den Endpunct A der ersten Kraft P die Gerade AC gleich und parallel mit der zweiten Kraft P', durch den Endpunct C die Gerade CE gleich und parallel mit der dritten Kraft P'' ist, und die Diagonale oder Resultirende ME das dadurch entstehende Polygon $MACE$ schliefst — kann man die Resultirende R auch ganz einfach durch Construirung dieses Polygons (Fig. 10, a) finden, in welchem man die offen bleibende Seite durch die Gerade ME schliefst, welche sofort die gesuchte Resultirende ist. Schliefst sich das Polygon durch die zuletzt aufgetragene Kraft von selbst, so stehen die gegebenen Kräfte unter sich im Gleichgewichte oder es ist $R = 0$. Dieses Verfahren kann offenbar auf jede Anzahl von in einer Ebene liegenden Kräften ausgedehnt werden.

Anmerkung. Stehen also die 3 auf den Punct M wirkenden Kräfte P, P', P'' (Fig. 10, b) unter einander im Gleichgewichte und bilden ihre in einer Ebene liegenden Richtungen die Winkel a, b, c; so entsteht durch dieses Verfahren das Dreieck ABC, dessen Seiten $= P$, P', P'' und Winkel $A = 180 - a$, $B = 180 - b$, $C = 180 - c$ sind. Da sich nun nach einem bekannten Satze in jedem Dreiecke die Seiten wie die Sinusse der gegenüberliegenden Winkel verhalten und zwei Nebenwinkel (wie A und a) gleiche Sinus haben, so hat man für das Gleichgewicht der 3 auf M wirkenden Kräfte auch

$$P : P' : P'' = \sin c : \sin b : \sin a.$$

§. 17. Zusammensetzung von Kräften, *welche auf einen Punct wirken und in* verschiedenen *Ebenen liegen.*

Wirken auf den Punct M (Fig. 11) 3 Kräfte nach den Richtungen MA, MB, MC, und bezeichnen diese genannten Linien zugleich die Kräfte selbst; so stellt die Diagonale MD des Parallelogramms AB die Mittelkraft aus den beiden ersten Kräften vor; construirt man ferner mit dieser und der dritten Kraft MC das Parallelogramm CD, so ist die Diagonale ME desselben die gesuchte Resultirende aus den 3 gegebenen Kräften.

Wie man sieht, ist hier die Resultirende nichts anders als die Diagonale des aus den drei Seiten MA, MB, MC construirten Parallelopipedes, welches ein senkrechtes ist, wenn die Richtungen der Kräfte wechselweise auf einander senkrecht stehen.

§. 18. Beispiele über die Zerlegung der Kräfte.

1. Wird beim Schiffszug gegen den Strom das Schiff BC (Fig. 12) durch eine Kraft P in der Richtung AP schief gegen das Ufer MN gezogen, so mufs man zur Beurtheilung der Richtung, welche das Schiff nimmt, diese Kraft P in zwei auf einander senkrechte Kräfte p und p'

nach den Richtungen AC (die Länge des Schiffes) und Ab zerlegen. Da aber durch die Form und Bauart des Schiffes diese letztere Kraft so gut wie verloren geht (indem diese die grofse, an der Seite des Schiffes anliegende Wassermasse wegschieben müfste), so bleibt nur die erstere, welche also das Schiff in der mit dem Ufer parallelen Richtung BC fortbewegt.

2. Ist das eine Ende einer Schnur an einem horizontal in eine Wand eingeschlagenen Nagel A (Fig. 13) befestigt und hierauf ohne gespannt zu seyn über die Rolle C geführt, so kann, wenn an dem Puncte M ein Gewicht Q aufgehängt wird, welches sich in einem Ringe auf der Schnur verschieben läfst, zuerst gefragt werden, wie grofs für das Gleichgewicht die am andern Ende der Schnur lothrecht wirkende Kraft P seyn mufs, und dann, welchen Druck oder Zug der Nagel A dabei zu erleiden hat. Um diese Fragen zu beantworten, mufs man das Gewicht Q als eine lothrecht wirkende Kraft ansehen und diese in zwei Kräfte nach den Richtungen MA und MB, nach welchen die Schnur gespannt wird, zerlegen. Nimmt man also auf der durch M gehenden lothrechten Linie $MD = Q$ und construirt das Parallelogramm ab, so stellen Ma und Mb die beiden Seitenkräfte vor, von denen die letztere die Gröfse der Kraft P angibt. Zerlegt man die erstere Ma, um die Kraft zu finden, welche den Nagel aus der Wand herauszuziehen sucht, neuerdings in zwei auf einander senkrechte Kräfte nach horizontaler und verticaler Richtung, so erhält man durch Construirung des Rechteckes de sofort ad für die in A nach horizontaler und ae für die an denselben Punct nach verticaler Richtung wirkenden Kraft.

Ist das Gewicht Q, wie es in Fig. (13, a) dargestellt ist, weiter in die Höhe gezogen, so zeigt ein Blick auf die Zeichnung (weil MD denselben Werth behält), dafs jetzt sowohl P als auch die horizontale Zugkraft ad auf den Nagel gröfser ist, als in der vorigen Lage des Gewichtes.

3. Stellt MN (Fig. 14) das Segel eines Schiffes vor, welches von dem Winde in der Richtung FO getroffen wird, dessen Stärke durch die Linie OD dargestellt werden soll; so zerlege man, um den Erfolg der Einwirkung des Windes zu finden, DO in zwei Seitenkräfte CO und EO, wovon die eine in die Richtung der Segelfläche fällt und die andere darauf senkrecht steht. Da die erstere dieser beiden Kräfte verloren geht und die zweite das Schiff in der Richtung Od zu bewegen sucht, so zerlege man $Od = OE$ abermals in zwei auf einander senkrechte Kräfte Oa und Ob, so stellt die erstere die Kraft vor, mit welcher das Schiff seiner Länge BA nach vorwärts, die letztere dagegen

jene Kraft dar, mit welcher das Schiff seitwärts (leewärts) getrieben wird, wobei jedoch die letztere, in Folge der eigenthümlichen Form des Schiffes, nur eine geringe Wirkung äufsern kann.

Auf derselben Wirkung beruht das sogenannte Laviren der Schiffe bei ganz contrairem Winde.

§. **19. Zusammensetzung von Kräften,** *welche auf* **mehrere** *Puncte eines Körpers wirken.* Wirken an den Endpuncten A und B (Fig. 15) der steifen geraden Linien AB zwei Kräfte P und Q nach den in einerlei Ebene liegenden, gegen M zu convergirenden Richtungen AD und BE, und stellen diese genannten Stücke zugleich die Kräfte P und Q selbst vor; so verlängere man DA und EB bis sich diese Geraden in M durchschneiden, so kann man (§. 8) diesen Punct als den gemeinschaftlichen Angriffspunct der beiden Kräfte P und Q ansehen. Schneidet man jetzt $Ma = AD$ und $Mb = BE$ ab und construirt das Parallelogramm ab, so ist die Diagonale Mc die Resultirende aus den beiden Kräften P und Q. Verlängert man diese Diagonale, so kann man den Durchschnittspunct C mit der Geraden AB als den Angriffspunct der Resultirenden R ansehen, deren Gröfse durch $CF = Mc$ dargestellt wird.

Fällt man aus einem Puncte C der Geraden Mc auf AM und BM die Perpendikel CG und CH, so wie auch noch auf Mc das Perpendikel ad, so ist das Dreieck Mad jenem MGC und das Dreieck acd jenem MCH (wegen $W.acd = W.cMb$) ähnlich und man hat

$$\frac{ad}{Ma} = \frac{GC}{MC} \text{ und } \frac{ad}{ac} = \frac{HC}{MC},$$

oder wenn man die erste Gleichung durch die zweite dividirt:

$\frac{ac}{Ma} = \frac{GC}{HC}$ oder wegen $Ma = P$ und $ac = Mb = Q$, auch

$\frac{Q}{P} = \frac{GC}{HC}$ oder was dasselbe ist $P : Q = CH : CG \ldots (1,$

d. h. die Kräfte P und Q verhalten sich verkehrt wie die aus einem Puncte C ihrer Resultirenden auf ihre Richtungen gefällten Perpendikel.

Anmerkung. Es ist leicht zu sehen, dafs die Länge der Geraden AB auf die Gröfse der Resultirenden keinen Einflufs hat.

§. **20. Denselben Satz für parallele Kräfte.** Der vorige Satz ist von der Gröfse des Winkels AMB unabhängig, er gilt also auch noch, wenn derselbe Null, d. h. wenn die beiden Kräfte

P und Q zu einander parallel sind. In diesem Falle bilden aber die beiden Perpendikel CG und CH (Fig. 16) eine gerade Linie und da die Dreiecke CAG und CBH ähnlich sind, so folgt

$$CH : CG = CB : CA \quad \text{oder}$$

(Gleichung 1 des vorigen Paragraphes)

$$P : Q = CH : CG = CB : CA \; . \; . \; . \; (2,$$

d. h. die Seitenkräfte P und Q verhalten sich umgekehrt wie die Entfernungen des Angriffspunctes C der Resultirenden von den Angriffspuncten der beiden Seitenkräfte.

Aus dieser Proportion folgt zugleich $P : P + Q = CB : AB$ und daraus ist $CB = AB \frac{P}{P+Q}$, wodurch der Angriffspunct C der Resultirenden gegeben ist. Eben so ist auch $CH = GH \frac{P}{P+Q}$, die Entfernung der Resultirenden von der Kraft Q, und da diese (weil GH, P und Q constant sind), wo man auch den Punct C in der Resultirenden annehmen mag, dieselbe bleibt, so folgt, daſs die Resultirende mit den Seitenkräften parallel läuft.

Um die Gröſse der Resultirenden zu finden, bemerke man, daſs für $AB = 0$ die beiden Seitenkräfte in C zusammenfallen und sofort (§. 10) $R = P + Q$ ist; da nun nach dem vorigen Satze (§. 19, Anm.) die Gröſse der Resultirenden von der Länge der Geraden AB unabhängig ist, so bleibt für alle Fälle die Gröſse $R = P + Q \; . \; . \; . \; (3$ ungeändert.

Wirken also zwei parallele Kräfte nach einerlei Richtung, so theilt 1stens die Resultirende die gerade Linie, welche den Abstand der beiden Seitenkräfte bestimmt, im verkehrten Verhältniſs der Kräfte, 2tens ist die Richtung der Resultirenden mit jener der Seitenkräfte parallel, und 3tens ist die Resultirende gleich der Summe der Seitenkräfte.

Um daher zwischen zwei parallelen, an den Endpuncten einer frei beweglichen Geraden AB nach derselben Seite hin wirkenden Kräften das Gleichgewicht herzustellen, wird man die Gerade AB im Puncte C im umgekehrten Verhältniſs der beiden Kräfte theilen und in diesem Puncte eine Kraft, welche der Summe aus den beiden gegebenen Kräften gleich ist, mit dieser parallel, jedoch in entgegengesetzter Richtung anbringen.

Auch ist nun leicht die umgekehrte Aufgabe: eine gegebene Kraft R in zwei parallele, nach einerlei Richtung wirkende Kräfte zu zerlegen, aufzulösen.

Anmerkung. Will man die Gröfse der Resultirenden, d. i. die vorige Relation (3 von dem obigen Satze in §. 19 unabhängig, nämlich unmittelbar für parallele Kräfte ableiten, so darf man nur zu den beiden gegebenen Kräften AD und BE (Fig. 17) zwei gleiche, sonst aber beliebige Kräfte Aa und Bb, welche in der Verlängerung von AB nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und sonach, da sie sich aufheben, an dem Resultate nichts ändern, hinzufügen, die aus AD, Aa und BE, Bb entstehenden Resultirenden Ac und Bd bestimmen, diese bis zu ihren Durchschnitt M verlängern und darauf $Mr = Ac$, $Ms = Bd$ abschneiden, durch M mit AB eine Parallele ziehen und die Resultirenden Mr, Ms neuerdings in ihre ursprünglichen Kräfte Mm, Mp und Mn, Mo auflösen; so findet sich, dafs von den vier zuletzt genannten Kräften, welche man anstatt der beiden ursprünglichen parallelen Kräfte substituiren kann, jene beiden Mm und Mn, da sie einander gleich sind (jede ist $= Aa = Bb$) und entgegengesetzt wirken, aufheben und daher die beiden übrigen $Mp = AD$ und $Mo = BE$, da sie nach derselben Richtung wirken, durch ihre Summe $AD + BE$ die Resultirende CF darstellen, wodurch die obige Relation (3 direct abgeleitet ist.

§. 21. Wirken die beiden parallelen Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen und ist z. B. $Q > P$; so zerlege man (Fig. 18) Q in zwei parallele Kräfte P und R, wovon die erstere durch A geht, so, dafs also $Q = P + R$ oder $R = Q - P$ . . . (1 wird. Ist C der Angriffspunct dieser Kraft R auf der verlängerten Geraden AB, so ist (voriger Paragraph) $P : R = BC : AB$, woraus

$$BC = AB \frac{P}{Q - P} \quad . . . (2$$

folgt.

Da sich nun die beiden im Puncte A wirkenden Kräfte P aufheben, so bleibt nur die Kraft R als gesuchte Resultirende der beiden ursprünglichen Kräfte P und Q übrig, deren Gröfse aus (1 und Lage durch Gleichung (2 bestimmt ist; die Resultirende ist nämlich dem Unterschiede aus beiden gegebenen Kräften gleich, und wirkt mit ihnen parallel nach jener Seite hin, nach welcher die gröfsere der beiden Kräfte wirkt.

Anmerkung. Für den besondern Fall von $P = Q$ wird aus (2

$$BC = \frac{AB \cdot P}{0} = \infty,$$

d. i. Unendlich, zum Zeichen, dafs es in diesem Falle für die beiden Kräfte keine Resultirende gibt, folglich auch durch das Hinzufügen einer einzigen Kraft kein Gleichgewicht hergestellt werden kann.

§. 22. **Zusammensetzung von parallelen Kräften,** *welche auf ein System von Puncten wirken, die fest* *mit einander verbunden sind.* Wirken die parallelen Kräfte p, p', p''... auf die mit einander verbundenen Puncte A, B, C... (Fig. 19) im Raume nach einerlei Richtung, so suche man nach §. 20 zuerst die Resultirende aus den beiden Kräften p und p', indem man ihre Angriffspuncte durch die Gerade AB verbindet, und diese in M so theilt, daſs $AM : BM = p' : p$ wird. Denkt man sich in diesem Puncte M die Resultirende $r = p + p'$ angebracht und verbindet man diese mit der dritten Kraft p'', so erhält man auf gleiche Art auf der Geraden MC den Angriffspunct der neuen Resultirenden $r' = p + p' + p''$; diese mit der nächsten Kraft p''' verbunden, erhält man (durch Theilung der Geraden ND, so daſs $NO : OD = p''' : r'$) den Angriffspunct O der Resultirenden $R = p + p' + p'' + p'''$, und so fährt man fort, bis man auch die letzte Seitenkraft in Verbindung gebracht hat.

Wirken die parallelen Kräfte theils nach der einen, theils nach der entgegengesetzten Richtung, so suche man nach der vorigen Weise sowohl von jenen Kräften, welche nach der einen, als auch von jenen, welche nach der entgegengesetzten Seite wirken, die Resultirende, und dann erst von diesen beiden parallelen, nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräften nach dem vorigen Paragraphe die Mittelkraft, so ist diese zugleich auch die gesuchte Resultirende aus den ursprünglich gegebenen Kräften.

§. 23. Mittelpunct der parallelen Kräfte. Aus dem Verfahren des vorigen Paragraphes geht hervor, daſs wenn die sämmtlichen parallelen Kräfte um ihre Angriffspuncte wie immer gedreht werden, dabei aber nicht aufhören, unter sich parallel zu seyn, weder die Gröſse der Resultirenden, noch ihr Angriffspunct verändert wird; auch bleibt der Angriffspunct der Resultirenden noch derselbe, wenn die sämmtlichen Kräfte so vergröſsert oder verkleinert werden, daſs ihr Verhältniſs zu einander dasselbe bleibt (wenn man also jede $n$fach oder von jeder den $n$ten Theil nimmt), bloſs die Gröſse der Resultirenden ändert sich dabei, und zwar in demselben Verhältniſs.

Aus diesem Grunde heiſst dieser Angriffspunct der Resultirenden auch Mittelpunct der parallelen Kräfte.

Auch läſst sich ganz einfach zeigen, oder folgt vielmehr aus dem Bisherigen schon von selbst, daſs wenn die Angriffspuncte der parallelen Kräfte in einer Ebene oder in einer geraden Linie liegen, auch der Mittelpunct dieser Kräfte in derselben Ebene oder der nämlichen geraden Linie liegen müsse.

Zweites Kapitel.

Vom statischen Momente.

§. **24. Moment einer Kraft** *in Beziehung auf eine* **Ebene.** Unter dem auf eine Ebene bezogenen Momente einer Kraft versteht man das Product aus dieser Kraft in das aus ihren Angriffspuncte auf die bezügliche Ebene gefällte Perpendikel.

§. **25.** Es seyen nun P und Q zwei parallele, an den Endpuncten der Geraden AB (Fig. 20) nach derselben Richtung wirkenden Kräfte, und R ihre durch C gehende Resultirende; ferner seyen p, q, r die aus den Angriffspuncten A, B, C dieser Kräfte auf die beliebige Ebene MN gefällten Perpendikel Aa', Bb', Cc'; so ist wegen $R = P + Q$ auch $Rr = Pr + Qr$, und da, wenn ab mit der Verbindungslinie $a'b'$ parallel gezogen wird, $r = Cc' = Aa' - Aa = p - Aa$ und eben so auch $r = Bb' + Bb = q + Bb$ ist, so folgt auch

$$Rr = P(p - Aa) + Q(q + Bb) \text{ oder}$$

$$Rr = Pp + Qq + Q.Bb - P.Aa.$$

Da aber (§. 20, Gl. 2) $P : Q = CB : CA = Bb : Aa$ (wegen Ähnlichkeit der Dreiecke BCb und ACa) also $P.Aa = Q.Bb$ oder $Q.Bb - P.Aa = 0$ ist, so folgt endlich

$$Rr = Pp + Qq \ldots (m,$$

d. h. das Moment der Resultirenden auf irgend eine Ebene bezogen, ist gleich der Summe der Momente der beiden parallelen Kräfte in Beziehung auf dieselbe Ebene.

Anmerkung 1. Geht die Ebene MN durch den Angriffspunct C der Resultirenden, so wird $r = 0$, also $Pp + Qq = 0$, woraus sofort folgt, dafs (weil P und Q gleiche Zeichen haben) die Perpendikel p und q entgegengesetzte Zeichen erhalten, also zu verschiedenen Seiten der Ebene MN liegen müssen.

Anmerkung 2. Wirken die Kräfte P und Q nach entgegengesetzten Richtungen, so darf man diese nur auch mit entgegengesetzten Zeichen, d. i. die eine mit $+$, die andere mit $-$ in die Gleichung (m setzen, um die analoge zu erhalten; ist z. B. $R = P - Q$, so ist auch

$$Rr = Pp - Qq \ldots (m'.$$

§. **26. Satz der Momente,** *für eine* **beliebige** *Anzahl von* **parallelen** *Kräften.* Wird das Verfahren des vorigen Paragraphes wiederholt, d. h. die Resultirende aus den beiden ersten Kräften mit der dritten Kraft verbunden, und hierauf wieder der vorige Satz angewendet, sodann die Resultirende der drei ersten Kräfte mit der vierten Kraft eben so combinirt, u. s. w. fort; so erhält man endlich, wenn P, P', P'' ... die parallelen Kräfte, und p, p', p''... die aus ihren Angriffspuncten auf die bezügliche Ebene (Ebene der Momente) gefällten Perpendikel, so wie R die Resultirende und r das aus ihrem Angriffspunct oder dem Mittelpunct der parallelen Kräfte auf dieselbe Ebene gezogene Perpendikel sind, ganz allgemein:

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots \quad (n.$$

Anmerkung 1. Diese Gleichung kann zur Bestimmung von r, d. i. des Abstandes des Mittelpunctes der parallelen Kräfte von der Ebene der Momente benützt werden. Nimmt man aufser dieser noch zwei, am einfachsten auf derselben senkrechte Ebenen an, und bestimmt aus den ganz ähnlichen Relationen (indem man aus den Angriffspuncten der parallelen Kräfte auch auf diese beiden Ebenen die Perpendikel fällt) eben so die Abstände r' und r'' dieses Mittelpunctes von diesen beiden neuen Ebenen; so ist durch diese drei Abstände die Lage dieses Mittelpunctes im Raume vollkommen bestimmt.

Anmerk. 2. Auch folgt aus dieser Relation (n, dafs wenn die Kräfte P, P'... unter sich im Gleichgewichte stehen, also $R = 0$ ist, sofort auch die Summe der Momente, auf jede beliebige Ebene bezogen, gleich Null seyn mufs.

Dieselbe Relation von $0 = Pp + P'p' + \ldots$ findet auch noch Statt, ohne dafs das Gleichgewicht besteht, wenn man die Ebene der Momente durch den Mittelpunct der parallelen Kräfte legt, weil dafür $r = 0$ ist.

Anmerk. 3. Sind endlich sämmtliche Kräfte einander gleich, und ist ihre Anzahl $= n$, so ist $Rr = P(p + p' + \ldots)$ oder wegen $R = nP$, sofort $r = \frac{p + p' + \ldots}{n}$ oder das aus dem Mittelpuncte der parallelen Kräfte auf eine Ebene gefällte Perpendikel ist in diesem Falle das arithmetische Mittel von allen aus den Angriffspuncten der Kräfte auf dieselbe Ebene gefällten Perpendikeln.

§. 27. Statisches Moment einer Kraft *in Beziehung auf einen* **Punct.** Fällt man aus einem beliebigen Puncte auf die Richtung einer Kraft ein Perpendikel, so heifst das Product aus der Kraft in dieses Perpendikel, statisches Moment der Kraft, in Beziehung auf diesen Punct, welcher Mittelpunct des Momentes genannt wird.

Wirken nun auf einen Punct M (Fig. 15) zwei Kräfte P und Q

und bezieht man ihre Momente auf einen Punct C ihrer Resultirenden, so ist (§. 19), wenn man die Perpendikel $CG = p$ und $CH = q$ setzt:

$$P : Q = q : p \quad \text{oder} \quad Pp = Qq,$$

d. h. die statischen Momente der beiden Kräfte sind in Beziehung auf irgend einen in ihrer Resultirenden liegenden Punct einander gleich.

§. **28.** Wirken auf einen Punct drei Kräfte und stehen diese unter sich im Gleichgewichte, so mufs jede derselben der Resultirenden aus den beiden übrigen Kräften gleich und ihr gerade entgegengesetzt seyn. Nimmt man daher in der Richtung der einen dieser drei Kräfte einen Punct an, so müssen zufolge des vorigen Satzes die statischen Momente der beiden übrigen Kräfte auf diesen Punct bezogen einander gleich seyn.

§. **29.** Wirken auf einen Punct M (Fig. 21) zwei Kräfte P und Q nach den durch die Pfeile angedeuteten Richtungen, und ist R ihre Resultirende, so nehme man den Mittelpunct O der statischen Momente in der Ebene dieser Kräfte, jedoch aufserhalb der Resultirenden, und fälle aus diesem Puncte auf die Richtungen der Kräfte die Perpendikel Oa, Ob und Oc, deren Gröfse wir durch p, q, r bezeichnen wollen. Man zerlege die Kraft P in zwei Seitenkräfte S und S' nach den Richtungen MO und MQ, so ist R die Resultirende aus den beiden Kräften S und $Q + S'$, wovon die erstere nach MO und die letztere nach MQ wirkt, folglich nach dem Satze des vorigen Paragraphes (indem der Mittelpunct O der Momente in der ersten der drei Kräfte S, R und $S' + Q$ liegt) $Rr = (Q + S')q = Qq + S'q$, oder da in Beziehung auf die beiden Kräfte P und S' (nach demselben Satze, indem die drei Kräfte S, S' und $-P$ einander das Gleichgewicht halten) $S'q = Pp$ ist, auch $Rr = Pp + Qq \ldots (1,$

d. h. das statische Moment der Mittelkraft ist gleich der Summe der statischen Momente der beiden Seitenkräfte.

§. **30.** Nimmt man den Punct O nicht aufserhalb, sondern (Fig. 21, a) innerhalb des Winkels PMQ, so fällt bei der angenommenen Zerlegung der Kraft P in S nach MO und S' nach MQ, diese letztere in die Verlängerung von QM über M hinaus, so dafs jetzt S' negativ wird und die vorige Gleichung 1) die Form $Rr = Qq - Pp \ldots (2$

erhält, was man auch unmittelbar aus der Gleichung 1) findet, indem darin für den gegenwärtigen Fall das Perpendikel p negativ genommen werden mufs.

§. 31. Sieht man die Gerade MO als eine steife um O drehbare Linie an, so streben die beiden Kräfte P und Q im ersten Falle (§. 29) diese Gerade, also auch den Punct M, nach derselben, im zweiten Falle aber (vorigen Paragraph) nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen.

Diefs vorausgesetzt, kann man auch sagen, dafs das statische Moment der Resultirenden gleich ist der Summe oder dem Unterschiede der statischen Momente aus den Seitenkräften, je nachdem diese Kräfte ihren Angriffspunct nach derselben, oder nach entgegengesetzten Seiten zu drehen streben; im ersten Falle sucht die Resultirende diesen Punct ebenfalls nach derselben, im letzteren dagegen nach jener Seite zu drehen, nach welcher ihn jene Seitenkraft, deren Moment das gröfsere ist, zu drehen strebt.

Sieht man dagegen die Perpendikel Oa, Ob, Oc als steife, um O drehbare Linien an, so kann man sich auch vorstellen, dafs die Kräfte P, Q und ihre Resultirende R diese Linien an den Angriffspuncten a, b, c um den Punct O, und zwar im ersten Falle nach einerlei, im letztern nach entgegengesetzten Richtungen (wobei P in einem, Q und R im andern Sinne wirken) umzudrehen suchen.

§. 32. Allgemeiner Satz. Durch Wiederholung dieser Schlüsse zeigt man überhaupt, dafs das statische Moment der Resultirenden aus mehreren auf einen Punct wirkenden, in derselben Ebene liegenden Kräften gleich ist der Summe der Momente der einzelnen Kräfte, wenn diese den gemeinschaftlichen Angriffspunct in Beziehung auf den Mittelpunct der statischen Momente, nach derselben Seite, oder wenn diefs nicht der Fall, gleich ist dem Unterschied aus den Momenten jener Kräfte, welche diesen Angriffspunct nach der einen, und den Kräften, welche ihn nach der entgegengesetzten Seite zu drehen suchen.

Um beide Fälle in einen einzigen Satz zusammenzufassen, darf man blofs jene Kräfte, welche den Angriffspunct nach einer Seite drehen wollen, mit + und die übrigen, welche also eine entgegengesetzte Drehung bewirken wollen, mit dem entgegengesetzten Zeichen — belegen, dann ist in beiden Fällen das statische Moment der Resultirenden, auf einen ganz beliebigen Punct bezogen, gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Seitenkräfte, oder es ist

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots (a.$$

Halten sich die sämmtlichen Kräfte P, P' ... das Gleichgewicht, so ist ihre Resultirende $R = 0$, folglich auch

$$Pp + P'p' + P''p'' + \ldots = 0 \quad (b.$$

Diese Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht der Kräfte P, P' ... mufs also für jeden beliebigen Punct, als Mittelpunct der Momente genommen, gelten, während sie auch bestehen kann, ohne dafs Gleichgewicht Statt findet, wenn man diesen Mittelpunct in der Resultirenden annimmt, wofür in Gl. (*a* das Perpendikel $r = 0$ wird.

§. 33. Satz der Momente für parallele Kräfte. Da die in den letzten Paragraphen entwickelten Sätze von den Winkeln, unter welchen die Kräfte auf den Punct M wirken, ganz unabhängig sind; so gelten sie auch noch für parallele in derselben Ebene liegende Kräfte. Um indefs den betreffenden Satz für parallele Kräfte direct abzuleiten, seyen P und Q (Fig. 22) zwei parallele, an den Endpuncten der Geraden AB nach einerlei Richtung wirkende Kräfte, und R ihre Resultirende. Nimmt man in der Ebene dieser drei Kräfte, aufserhalb ihren Richtungen den Mittelpunct O der statischen Momente an, fällt aus diesem auf die Richtungen der Kräfte das Perpendikel Ob und setzt wieder die den Kräften P, Q, R entsprechenden Perpendikel $Oa = p$, $Ob = q$ und $Oc = r$; so ist $R = P + Q$ und wegen

$$Oc = Oa + ac \quad \text{und auch} \quad Oc = Ob - bc$$

offenbar

$$R.Oc = P(Oa + ac) + Q(Ob - bc) = P.Oa + Q.Ob + P.ac - Q.bc$$

oder wegen $P.ac = Q.bc$ (§. 20, Gl. 2) sofort $Rr = Pp + Qq \ldots (1.$

Auf dieselbe Art zeigt man, dafs wenn der Punct O zwischen den Richtungen der Kräfte P und Q angenommen wird, die Gerade Ob, oder die Angriffspuncte a, c, b nicht wie hier, nach einerlei Richtung um den Mittelpunct der Momente O gedreht werden, sofort das statische Moment der Mittelkraft dem Unterschied aus den Momenten der Seitenkräfte gleich, d. i. $Rr = Pp - Qq \ldots (2$ ist.

Endlich kann auch durch Wiederholung dieser Schlüsse der Satz der Momente für jede beliebige Anzahl von parallelen Kräften, wenn sie dabei in ein und derselben Ebene liegen, also die Giltigkeit der obigen Gleichung (a:

$$Rr = Pp + P'p' + P''p'' + \ldots (n$$

bewiesen werden.

Drittes Kapitel.

Von dem Gewichte, Schwerpunct und der Stabilität der Körper.

§. 34. Erklärungen. Unter Schwere versteht man jene Kraft, welche alle Körper lothrecht oder senkrecht gegen die Oberfläche der Erde zu bewegen strebt; sie wird deſshalb auch irdische Schwere genannt, um sie von der allgemeinen Schwere oder Gravitation, welche die sämmtlichen Planeten und Cometen gegen die Sonne zu bewegen strebt, zu unterscheiden. Die Richtung der Schwerkraft müſste also überall nach dem Mittelpuncte der Erde gehen, wenn diese eine vollkommene Kugel wäre; obschon sie aber in der That ein an den Polen abgeplattetes Sphäroid bildet, so kann hier gleichwohl von dieser sehr geringen Abweichung von der genauen Kugelform gänzlich abstrahirt werden.

Die Schwere erstreckt sich nicht nur auf alle Körper, sondern auch auf ihre sämmtlichen materiellen Puncte auf ganz gleiche Weise, und obschon diese Puncte nach geraden Linien gezogen werden, welche gegen den Mittelpunct der Erde convergiren; so können diese doch, da erstlich die Ausdehnung ab (Fig. 21, b) der Körper gegen den Erdhalbmesser ganz unbedeutend ist, und dann auf den convergirenden Linien nur ganz kurze Stücke am, bn genommen werden, diese Linien oder Richtungen als zu einander parallel angesehen werden. Da nämlich der Erdhalbmesser in runder Zahl beinahe 860 deutsche Meilen beträgt (der mittlere Erdhalbmesser, nämlich für die Breite von 45° ist = 6336745 Meter), so bilden erst die Halbmesser von 2 Puncten, die auf der Oberfläche der Erde um nahe 100 Fuſs von einander entfernt sind, einen Winkel am Mittelpuncte der Erde von 1 Secunde oder den 3600sten Theil eines Grades.

Obschon ferner auch, wenn man sich von der Oberfläche der Erde entfernt, oder in einer verticalen Linie aufwärts steigt, die Schwerkraft im quadratischen Verhältniſs der Entfernung vom Mittelpuncte der Erde abnimmt (im innern der Erde nimmt sie bloſs nach dem einfachen Verhältniſs, und zwar so ab, wie die Entfernung vom Mittelpuncte abnimmt, sie ist also im Mittelpuncte selbst gleich Null), ferner auch noch eine Abnahme in einerlei Höhe gegen den Aequator zu (wegen der Abplattung der Erde und der Umdrehung um ihre Achse) Statt findet; so sind diese Veränderungen für gewöhnlich so unbedeutend, daſs man sie bei den gegenwärtigen Untersuchungen gänzlich übergehen kann.

§. 35. Mafs für die Massen der Körper. Da der Erfahrung zufolge die materiellen Theilchen aller, auch noch so verschiedenartiger Körper an einem und demselben Orte mit vollkommen gleicher Stärke von der Erde angezogen werden, also alle Körper gleich schwer sind; so haben gleiche Massen an demselben Orte der Erde auch gleiches Gewicht, oder die Gewichte verschiedener Massen verhalten sich wie die Massen selbst und umgekehrt. Sind M, M' zwei Massen und P, P' ihre Gewichte an demselben Orte, so ist also $M : M' = P : P'$; setzt man $M' = 1$ und das Gewicht der Masseneinheit $P' = f$, so folgt aus dieser Proportion

$$P = Mf \quad \text{oder} \quad M = \frac{P}{f} \; . \; . \; . \; (1.$$

Drückt man, wie es bei uns üblich ist, die Masse durch Gewichtseinheiten aus, so wird $f = 1$ und also ganz kurz

$$M = P \; . \; . \; . \; (1',$$

d. h. so oft die Gewichtseinheit in dem Gewichte P einer Masse enthalten ist, eben so oft ist auch die Masseneinheit (jene Masse, deren Gewicht $= 1$ ist) in dieser Masse M enthalten, oder die Masse und ihr Gewicht werden bei dieser Annahme durch die nämliche Zahl ausgedrückt.

Ungeachtet der Veränderlichkeit der Schwere (voriger Paragraph) bleibt die Zahl, welche das Gewicht der Masse, also auch die Masse M selbst ausdrückt, an jedem Orte der Erde dieselbe, sobald man das Gewicht durch Abwägen bestimmt, indem das Gewicht der Masse M in eben dem Verhältnifs zu- oder abnimmt, wie die zur Einheit genommene Masse. Nähme man z. B. das Gewicht f von 1 Kubikzoll Wasser zur Gewichtseinheit und dessen Masse m zur Masseneinheit, so wäre, wenn an irgend einem Orte der Erde das Gewicht P der Masse M, d. i. $\frac{P}{f} = n$ ist, auch $M = n \cdot m$ oder $\frac{M}{m} = n$; es sey nun an einem andern Orte die Schwere z. B. nur halb so grofs, so ist das Gewicht von 1 Kubikzoll Wasser $f' = \frac{1}{2} f$ und jenes der Masse M, $P' = \frac{1}{2} P$; durch das Abwägen findet man aber wieder $\frac{P'}{f'} = \frac{\frac{1}{2} P}{\frac{1}{2} f} = n$ und man drückt also hier ebenfalls die Masse M durch nm oder für $m = 1$, schlechtweg durch n wie am ersten Orte aus.

Anmerkung. Die französischen, und nach ihnen mehrere deutsche Schriftsteller nehmen die Masseneinheit m so an, dafs ihr Gewicht an jedem Orte der Erde durch dieselbe Zahl ausgedrückt wird, durch welche die von der Schwere bewirkte Geschwindigkeitsänderung eines frei fallenden Körpers in einer Secunde an dem betreffenden Orte bezeichnet wird. Wird nämlich diese Geschwindigkeitsänderung in einer Secunde mit g bezeichnet, so wird nach dieser Annahme $f = g$, also $P = Mg$ und $M = \frac{P}{g}$ gesetzt, indem auch hier, wie weiter unten (§. 142) gezeigt wird, g genau in demselben Verhältnifs wie P veränderlich ist, also wie es seyn soll, M constant bleibt.

§. **36. Dichte der Körper.** Unter der Dichte eines Körpers versteht man den Quotienten (die Verhältnifszahl) aus dem Volumen in die Masse des Körpers. Ist nämlich D die Dichte, M die Masse und V das Volumen eines Körpers, so ist $D = \frac{M}{V}$. Für einen zweiten Körper ist eben so $D' = \frac{M'}{V'}$, folglich $D : D' = \frac{M}{V} : \frac{M'}{V'}$, daher für $V' = V$ sofort $D : D = M : M' = P : P'$ (nach dem vorigen Paragraphe). Besitzt also z. B. 1 Kubikzoll Eisen 7 Mal so viel Masse (wiegt er also auch 7 Mal so viel) als 1 Kubikzoll Holz, so sagt man das Eisen sey 7 Mal dichter als das Holz.

§. **37. Specifisches Gewicht.** Unter dem specifischen Gewichte eines Körpers versteht man entweder das Gewicht der Volumeneinheit dieses Körpers, oder gewöhnlicher, die Verhältnifszahl zwischen dem Gewichte dieses Körpers bei einem beliebigen Volumen und dem Gewichte eines eben so grofsen Theiles eines andern Körpers, z. B. des Wassers, welches auch in der That zur Vergleichung der festen und tropfbar flüssigen Körper durchaus gewählt wird. Ist also z. B. ein Kubikfufs Eisen 7 Mal so schwer als ein Kubikfufs Wasser (also auch jedes beliebige Volumen des Eisens 7 Mal so schwer als ein gleich grofses Volumen Wasser), so sagt man, das specifische Gewicht des Eisens sey $= 7$. Da für Luft- und Gasarten diese Zahlen sehr klein ausfallen würden, so wählt man zu ihrer Vergleichung anstatt des Wassers allgemein die atmosphärische Luft, bei einem gewissen Thermo- und Barometerstande. Diese beiden Körper, Wasser und atmosphärische Luft, werden defshalb als Vergleichungsgröfsen gewählt, weil diese am leichtesten an allen Orten der Erde auf einen bestimmten Zustand in physischer und chemischer Beziehung gebracht werden können.

§. **38.** Nach dem letztern, nun allgemein angenommenen Sinne des specifischen Gewichtes folgt, dafs sowohl die Dichte als das specifische Gewicht eines festen oder tropfbar flüssigen Körpers durch dieselbe Zahl ausgedrückt wird, wenn man die Dichte des Wassers zur

Einheit der Dichten nimmt; denn wiegt z. B. das Eisen unter gleichem Volumen 7 Mal so viel als das Wasser, so ist das erstere (§. 36) auch 7 Mal dichter; wird also die Dichte des Wassers = 1 gesetzt, so ist jene des Eisens = 7, welches sofort dieselbe Zahl wie für das specifische Gewicht des Eisens ist. Aus diesem Grunde kann man auch das Gewicht eines Körpers, seinem Volumen multiplicirt mit dessen Dichte, anstatt mit seinem specifischen Gewichte, d. i. m) . . . $P = VD$ gleich setzen.

Die nachstehende Tabelle enthält das specifische Gewicht einiger der wichtigsten Körper, dessen Bestimmung in das Gebiet der Physik gehört.

§. 39. Tafel der specifischen Gewichte einiger Körper. Für die festen und tropfbar flüssigen Körper ist das Wasser im Zustande der gröfsten Dichte (4° C.), für Luft- und Gasarten die atmosphärische Luft bei 0° und 28 Par. Zoll Barometerstand zur Einheit genommen.

Benennung der Körper.	Spec. Gewicht.	Benennung der Körper.	Spec. Gewicht.
Feste Körper.		Tannenholz (Edel-) .	·481—·870
Ahornholz	·645—·904 *)	Ulmenholz (Rüstern)	·568—·948
Basalt	2·415—3·3	Zink geschmolzen .	6·862—7·239
Bausteine, im Mittel	2·500	» gehämmert .	7·215—7·861
Blei	11·352—11·388	Zinn (möglichst rein)	7·291—7·473
Braunkohle . . .	1·150—1·300	Tropfbar flüssige Körper.	
Eichenholz (Stein-) .	·708—1·100	Alkohol (absoluter) .	·791
Eisen, geschmiedetes	7·788—7·790	Bier	1·023—1·034
» Gufs- . . .	7·0—7·5	Olivenöl	·915—·919
Elfenbein	1·825—1·917	Quecksilber . . .	13·597
Eschenholz . . .	·670—·904	Seewasser	1·028—1·211
Glas	2·642—2·733	Wasser, destillirtes .	1·000
Kalkstein	2·710—2·837	Wein	·916—1·054
Kohle (Pech-) . .	1·29—1·35	Luft- und Gasarten.	
Kupfer (Rosetten-) .	8·51—8·843	Atmosphärische Luft	1·000
» Draht . . .	8·879	Kohlenoxydgas . .	·94—·972
Lindenholz . . .	·43—·817	Kohlensaures Gas . .	1·517—1·57
Marmor	2·717—2·838	Kohlenwasserstoffgas .	·491—·600
Messing, gegossen .	8·396	Oehlbildendes Gas .	·909—·985
» Draht . .	8·544	Sauerstoffgas . . .	1·087—1·127
Platin, gehämmert .	20·337—21·359	Stickstoffgas . . .	·943—·985
Quarz	2·608—2·690	Wasserdampf . . .	·623—·741
Stahl, weicher . .	7·833	Wasserstoffgas . .	·069—·073
» Gufs- (englischer	7·852		
Steinkohlen . . .	1·26—1·50		

*) Bei den Hölzern beziehen sich die gröfseren Zahlen auf den frisch gefällten, die kleineren auf den vollkommen lufttrockenen Zustand.

§. 40. Beispiele *über die Anwendung des* **specifischen** *Gewichtes.*

1. Um das Gewicht P eines Körpers aus seinem Volumen und specifischen Gewichte zu finden, sey V das Volumen und s das specifische Gewicht desselben, so wie γ das Gewicht der kubischen Einheit, also eines Kubikfuſs Wassers, wenn man den Fuſs zur Einheit des Längenmaſses nimmt; so ist ganz einfach $P = Vs\gamma \ldots$ (1 oder da 1 Kubikfuſs Wasser auf das Wiener Maſs und Gewicht bezogen, genau genug $56\frac{1}{2}$ Pfund wiegt, auch

$$P = 56.5\,s\,V \ldots (2,$$

wobei man s für den betreffenden Körper aus der vorigen Tabelle zu nehmen und V in Kubikfuſs auszudrücken hat, um P in Pfunden zu erhalten.

Beispiel. Um das Gewicht einer guſseisernen cylinderischen Welle von 7·6 Zoll Durchmesser und 18 Fuſs Länge zu finden, so ist ihr kubischer Inhalt $V = \frac{1}{4} \cdot \frac{(7{\cdot}6)^2 . 3{\cdot}1415}{144} \times 18 = 5{\cdot}67$ Kubikfuſs. Nimmt man ferner aus der vorigen Tabelle $s = 7{\cdot}207$, so erhält man nach der Formel (2 genau genug $P = 2305$ Pfund oder nahe 23 Centner für das Gewicht der Welle.

2. Um den Inhalt eines irregulären Gefäſses zu finden, wäge man zuerst das leere Gefäſs ab, dessen Gewicht $= p$ seyn mag; hierauf fülle man dasselbe mit einer Flüssigkeit, z. B. mit Wasser, und wäge es abermals, sey p' das betreffende Gewicht, so ist $p' - p$ das Gewicht der Flüssigkeit vom gesuchten Volumen des Gefäſses V; dividirt man dieses Gewicht durch das Gewicht der kubischen Einheit der Flüssigkeit, hier also durch 56·5, so gibt der Quotient (vermöge Gl. 2) das gesuchte Volumen V.

Auf eine ähnliche Art kann man auch aus dem Gewichte P z. B. einer Statue, deren specifisches Gewicht $= s$ ist, den kubischen Inhalt oder das Volumen derselben finden, indem wieder $V = \frac{P}{s\gamma}$ (nach Gl. 1) ist.

3. Wenn zwei Substanzen, deren Gewichte p und p', Volumina v, v' und Dichten d u. d' sind, mit einander vermischt oder nach Umständen zusammen geschmolzen werden, und dabei keine Ausdehnung oder Zusammenziehung eintritt (oder diese wenigstens so gering ist, daſs sie vernachläſsigt werden kann), also das Volumen der Mischung gleich der Summe der Volumina der beiden Zuthaten; wenn ferner P das Gewicht, V das Volumen und D die Dichte des Gemisches oder der

Legirung ist; so hat man $P = p + p' \ldots$ (1 und $V = v + v'$ oder (§. 38, Gl. m) $\frac{P}{D} = \frac{p}{d} + \frac{p'}{d'} \ldots$ (2.

Aus diesen beiden Gleichungen (1 und (2 folgt ganz einfach

$$p = \frac{P\,d\,(D - d')}{D\,(d - d')} \text{ und } p' = \frac{P\,d'\,(d - D)}{D\,(d - d')}$$

und aus Gl. (2:

$$D = \frac{P}{\frac{p}{d} + \frac{p'}{d'}}$$

Gesetzt man habe ein Stück Bronce, d. i. eine Legirung aus Kupfer und Zinn, im Gewichte von 111 Pfund und dem specifischen Gewichte (welches man bestimmen wird) $= 8{\cdot}612$; so findet man wie viel Kupfer ($= p$) und wie viel Zinn ($= p'$) in dieser Legirung enthalten ist, wegen $P = 111$ und $D = 8{\cdot}612$, ferner (aus der Tabelle) $d = 8{\cdot}788$ und $d' = 7{\cdot}291$ sofort $p = 100$, folglich $p' = 111 - 100 = 11$ Pfund.

§. 41. Gewicht, Schwerpunct und Mittelpunct der Massen. Die Einwirkung der Schwere auf die materiellen Puncte eines Körpers kann (§. 34) so angesehen werden, als ob ein System paralleler und unter sich gleicher Kräfte, deren Zahl unendlich grofs ist, auf diese Puncte wirksam wäre. Die Resultirende aus allen diesen Kräften, deren Gröfse gleich der Summe und Richtung parallel mit diesen Kräften, also lothrecht ist, bildet das Gewicht des Körpers, welches daher keineswegs mit der Schwere verwechselt werden darf. Der Angriffspunct dieser Resultirenden, welchen wir (§. 23) Mittelpunct der parallen Kräfte genannt haben, heifst hier Schwerpunct des Körpers; er ist also derjenige Punct, in welchem man sich das gesammte Gewicht des Körpers vereinigt denken kann, oder um welchen, wenn er befestigt oder unterstützt wird, der Körper in allen Lagen im Gleichgewichte bleibt. Da man sich aus gleichem Grunde auch die sämmtlichen materiellen Theilchen m, m' ..., nämlich die gesammte Masse $M = m + m' + \ldots$, in so ferne sie schwer sind, in diesem Puncte vereinigt denken kann, so wird dieser Punct auch öfter Mittelpunct der Masse genannt.

§. 42. Ist die Masse eines Körpers durchaus gleich vertheilt, besitzt er also (§. 36) durchaus einerlei Dichte, so heifst der Körper homogen, ein Zustand, welcher bei den zunächst folgenden Untersuchungen immer vorausgesetzt wird; im entgegengesetzten Falle wird der Körper heterogen genannt. Weil nun (§§. 35 und 41) die Gewichte der Körper ihren Massen und diese (wenn die Körper homogen) dem Volumen proportional sind; so kann man auch bei den folgenden Untersuchungen für die Gewichte die Massen oder Volumina setzen.

§. **43. Ebene und Linie oder Durchmesser der Schwere.** Eine jede Ebene, welche einen Körper dergestalt durchschneidet, dafs sich zu jedem materiellen Theilchen, welches man auf der einen Seite dieser Ebene annimmt, ein anderes auf der entgegengesetzten Seite mit dem ersten symmetrisch liegendes vorfindet, heifst Symmetrie-Ebene, oder weil in ihr der Schwerpunct des Körpers liegen mufs, indem je zwei gegen die Ebene symmetrisch liegende, also davon gleichweit abstehende materielle Puncte gegen diese Ebene gleiche aber entgegengesetzte Momente (§. 25, m) haben, die sich sofort paarweise aufheben, wodurch die Gleichung (n §. 26 in $Pr = o$ übergeht, woraus $r = o$ folgt und anzeigt, dafs der Mittelpunct der parallelen Kräfte, hier der Schwerpunct in derselben Ebene liegt, auch Ebene der Schwere.

Eben so wird auch jede gerade Linie, welche durch den Schwerpunct eines Körpers geht, Linie oder Durchmesser der Schwere genannt.

Schwerpunct der Linien.

§. **44.** Bei dieser Bestimmung setzt man voraus oder stellt sich vor, dafs die Linien schwer, und da man sie als homogen annimmt, ihre Gewichte ihren Längen proportional seyen.

Der Schwerpunct einer geraden Linie liegt in ihrer halben Länge, weil je zwei gegen diesen Halbirungspunct symmetrisch liegende Puncte gleiche Momente haben, oder auch eine durch diesen Punct senkrecht auf diese Gerade gelegte Ebene eine Ebene der Schwere ist.

Der Schwerpunct eines Kreises liegt aus demselben Grunde in seinem Mittelpuncte, so wie der Schwerpunct überhaupt jedes regelmäfsigen Polygons mit dem Mittelpuncte desselben zusammen fällt.

§. **45.** Um den Schwerpunct von dem Umfange eines Dreieckes ABC (Fig. 23) zu finden, dessen Seiten AC, BC, AB die Längen a, b, c haben, halbire man diese Seiten in den Puncten m, n, p; so sind diese die Schwerpuncte dieser Linien, also die Angriffspuncte der 3 parallelen Kräfte a, b, c (weil diese dem Gewichte der Linien und diese wieder der Länge derselben §. 42 proportional sind), wofür man nach §. 22 den Mittelpunct bestimmen wird. Man zieht nämlich mn, theilt diese Gerade im Puncte r so, daſs $nr : mr = a : b$ wird, zieht die Gerade rp und theilt diese in o so, daſs $ro : op = c : a + b$ Statt findet; so ist o der gesuchte Schwerpunct.

Auf dieselbe Art verfährt man, wenn statt dem Dreieck ein Polygon gegeben ist.

Zieht man das Dreieck mnp, so läſst sich zeigen, daſs der so bestimmte Schwerpunct o zugleich der Mittelpunct des in diesem Dreieck mnp eingeschriebenen Kreises ist.

§. 46. Schwerpunct eines Kreisbogens. Um den Schwerpunct des Kreisbogens $ADB = s$ (Fig. 24) zu finden, dessen Halbmesser $Cc = CD = r$ und Sehne $AB = a$ seyn mag, ziehe man den auf AB senkrechten Halbmesser CD; so ist dieser, da er den Kreisbogen in zwei symmetrische Theile theilt, ein Durchmesser der Schwere und enthält den gesuchten Schwerpunct O. Um aber noch CO zu finden, theile man den Bogen ADB in sehr viele gleiche Theile, so, daſs jeder Theil davon wie ab als ein Bogenelement, nämlich als gerade Linie angesehen werden kann, fälle sodann aus den Endpuncten a, b und dem Halbirungspuncte c auf die Sehne AB die Perpendikel am, bn, cp, und ziehe auch noch den Halbmesser Cc; nimmt man nun eine durch den mit AB parallel gezogenen Durchmesser MN gehende, auf der Kreisebene senkrechte Ebene als diejenige an, worauf man die statischen Momente bezieht, so ist das statische Moment des Bogenelementes ab sofort $ab \times cp$, oder, wenn ad mit AB parallel gezogen wird, wegen Ähnlichkeit der Dreiecke abd und Ccp, wodurch $ab : ad = Cc : cp$ wird, auch $ab \times cp = ad \times Cc = mn \times r$. Da nun mn die Projection des Bogens ab auf die Sehne AB ist, so wird, wenn man die Projectionen der folgenden Bogenelemente mit $m'n'$, $m''n''$ ... bezeichnet, die Summe der statischen Momente aus allen Bogenelementen $= r\,(mn + m'n' \ldots) = r \,.\, AB = ra$.

Da ferner O der Mittelpunct der parallelen Kräfte seyn soll, deren Summe der Länge des Bogens $ADB = s$ proportinal ist, also durch s bezeichnet werden kann; so ist, wenn man $CO = x$ setzt (§. 33, Gl. n) $sx = ra$ oder $s : a = r : x$ und daraus $x = \frac{ra}{s}$ . . . (1, d. h. der Abstand des Schwerpunctes vom Mittelpuncte des Kreisbogens ist die vierte Proportionalgröſse zwischen dem Bogen, der zugehörigen Sehne und dem Halbmesser.

Schwerpunct der ebenen Flächen.

§. 47. Da auch hier wieder homogene, d. i. solche Flächen vorausgesetzt werden, bei welchen gleich grofse Theile auch ein gleiches Gewicht besitzen, so werden die Gewichte den Flächen pr portional, also diese letztern wieder unmittelbar statt den Gewichten selbst gesetzt.

Hieraus folgt unmittelbar, dafs der Schwerpunct einer jeden regelmäfsigen Figur, wie eines Rechteckes, eines Quadrates, eines regulären Polygons der Kreisfläche, der Ellipse u. s. w. in ihrem Mittelpuncte liegt.

§. 48. **Schwerpunct eines Dreieckes.** Theilt man das Dreieck ABC (Fig. 25) durch äufserst oder unendlich nahe liegende, mit der Seite AB parallel laufende Linien in schmale Streifen, d. h. löst man die Dreiecksfläche in ihre Elemente parallel mit AB auf, so können diese als Rechtecke angesehen werden. Halbirt man AB in D und zieht CD, so halbirt diese Gerade alle mit AB parallelen Linien wie EF in G, so, dafs also die Linie CD durch die sämmtlichen Schwerpuncte dieser Rechtecke oder Flächenelemente geht, folglich auch der Schwerpunct der ganzen Fläche (d. i. §. 23 der Mittelpunct der parallelen Kräfte) in dieser Geraden liegt, diese also eine Linie der Schwere ist.

Halbirt man nun noch eine der beiden übrigen Seiten, z. B. BC in d, und zieht die Gerade Ad, so mufs aus gleichem Grunde auch diese eine Linie der Schwere seyn, so, dafs also der gesuchte Schwerpunct des Dreieckes im Durchschnitt O dieser beiden Geraden CD und Ad liegt.

Da die Verbindungslinie Dd mit AC parallel und dadurch das Dreieck AOC jenem DOd ähnlich, also $CO : OD = AC : Dd = AB : DB = 2:1$ ist; so folgt $CO = 2\,OD$, also $CD = 3\,OD$ oder $OD = \frac{1}{3}CD$ und $CO = \frac{2}{3}CD$.

Der Schwerpunct eines Dreieckes liegt also in der geraden Linie, welche den Halbirungspunct einer Seite mit der gegenüber liegenden Spitze des Dreieckes verbindet um $\frac{2}{3}$ Theile dieser Linie von der Spitze abwärts.

Denkt man sich drei gleiche Massen in den Scheitelpuncten eines Dreieckes angebracht, so fällt der Schwerpunct derselben mit dem Schwerpuncte des Dreieckes zusammen; denn der Schwerpunct der beiden ersten in den Puncten A und B angebrachten Massen liegt im Halbirungspuncte D und bildet den Angriffspunct der doppelten Masse, diese mit der dritten Masse in C combinirt, mufs man zur Bestimmung des Angriffspunctes der

Resultirenden, CD in O so theilen, dafs $CO : OD = 2 : 1$ wird, was aber auch für den Schwerpunct des Dreieckes ABC der Fall ist.

§. 49. Schwerpunct eines beliebigen Vieleckes. Um den Schwerpunct irgend eines Polygons zu finden, theile man dasselbe in Dreiecke, bestimme nach dem vorigen Paragraphe den Schwerpunct eines jeden dieser Dreiecke und denke sich diese als die Angriffspuncte von parallelen Kräften, welche beziehungsweise den Flächen dieser Dreiecke gleich sind; so ist der Mittelpunct dieser parallelen Kräfte sofort der gesuchte Schwerpunct des Polygons.

§. 50. Schwerpunct eines Kreissectors. Um den Schwerpunct des Kreissectors $ADBC$ (Fig. 26) zu finden, sey der Bogen $ADB = s$, dessen Sehne $AB = a$, der Halbmesser $CA = CD = r$, und der Abstand des gesuchten Schwerpunctes O, auf dem den Sector in D halbirenden Halbmesser CD (als Linie der Schwere) $CO = x$. Theilt man den Bogen in unendlich viele gleiche Theile, wie mn, und zieht an die Theilungspuncte die Halbmesser; so wird die Fläche des Sectors in lauter sehr kleine Dreiecke, wie Cmn, aufgelöst, deren Schwerpuncte nach §. 48 um $\frac{2}{3}$ des Halbmessers von C abstehen. Beschreibt man daher aus C mit dem Halbmesser $Ca = \frac{2}{3}r$ einen Kreisbogen adb (welcher also mit dem äufsern concentrisch ist), so enthält dieser die Schwerpuncte dieser sämmtlichen Dreiecke Cmn, und da diese letztern gleich grofs sind, so ist dieser Kreisbogen adb gleichmäfsig schwer, und man hat nur noch den Schwerpunct dieses Bogens zu bestimmen. Nach §. 46 (Gl. 1) ist aber $x = \frac{Ca \times ab}{adb}$, oder da die ähnlichen Bögen und zugehörigen Sehnen ihren Halbmessern proportional sind, folglich $Ca = \frac{2}{3}r$, $ab = \frac{2}{3}a$ und $adb = \frac{2}{3}s$ ist, so folgt

$$x = \frac{2}{3}\frac{ra}{s} \ldots (2$$

für den gesuchten Abstand des Schwerpunctes O des Sectors vom Mittelpuncte C.

Verwandelt sich der Sector in einen Halbkreis, so wird wegen $a = 2r$ und $s = r\pi$ sofort $x = \frac{4r}{3\pi}$ oder beinahe $\frac{4}{9}r$ (genauer $= \cdot 42\, r$).

Zieht man aus C mit einem Halbmesser $Ca = r'$ zu demselben Winkel ACB den concentrischen Kreisbogen adb, und ist o der Schwerpunct des Sectors aCb; so ist eben so $Co = \frac{2}{3}\frac{r'a'}{s'}$, wobei $a' : a = r' : r$ und

$s' : s = r' : r$, also $a' = \frac{r' a}{r}$ und $s' = \frac{r' s}{r}$, folglich $Co = \frac{2}{3} r' \frac{a}{s}$.
Ist ferner F die Fläche des Sectors ABC, f jene des Sectors aCb und f' jene des Kreisbandes $ADBadb$, so wie i dessen Schwerpunct; so ist $F.CO = f.Co + f'.Ci$ und daraus wegen $F = \frac{1}{2} rs$, $f = \frac{1}{2} r's' = \frac{1}{2} r'^2 \frac{s}{r}$ und $f' = F - f$, wenn man substituirt und reducirt:

$$Ci = \frac{2}{3} \frac{a}{s} \left(\frac{r^3 - r'^3}{r^2 - r'^2}\right) \ldots (3.$$

§. 51. Schwerpunct eines Kreissegmentes. Um den Schwerpunct O des Kreissegmentes ADB (Fig. 27), wofür der Halbmesser $CA = CD = r$, der Bogen $ADB = s$ und Sehne $AB = a$ seyn soll, zu finden, ziehe man an den Halbirungspunct D des Bogens den Halbmesser CD als eine Linie der Schwere, und bemerke, daſs, so wie das Segment der Unterschied zwischen dem Sector $ACBD$ und dem Dreieck ACB, so auch das statische Moment des Segments auf irgend eine Ebene oder Gerade bezogen, der Unterschied aus dem Momente des Sectors und jenem des Dreieckes ist. Ist nämlich a der Schwerpunct des Dreieckes, b jene des Sectors und O der Schwerpunct des Segmentes, und sind f', F und f der Reihe nach ihre Flächen; so wirken in den 3 genannten Puncten die parallelen Kräfte f', F, f, wobei F die Resultirende aus den beiden übrigen ist. Man hat daher (§. 25) $F.Cb = f'.Ca + f.CO$ oder, wenn man $CO = x$ setzt und wegen $F = \frac{1}{2} rs$, $f' = \frac{1}{2} a.CE$, $Ca = \frac{2}{3} CE$ (§. 48), $Cb = \frac{2}{3}\frac{ra}{s}$ (§. 50), auch $\frac{1}{3} r^2 a = \frac{1}{3} a.CE^2 + fx$, woraus, wenn man noch für CE^2 den aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACE folgenden Werth $AC^2 - AE^2 = r^2 - \frac{1}{4} a^2$ setzt, sofort folgt:

$$x = \frac{a^3}{12 f} \ldots (3.$$

Schwerpunct der krummen Flächen.

§. 52. Schwerpunct einer cylinderischen Mantelfläche. Da der Schwerpunct dieser Fläche sowohl in der Achse als in der mit der Grundfläche des Cylinders in der halben Höhe parallel geführten Ebene liegen muſs; so findet man diesen Punct, wenn man die Länge der Achse halbirt.

Auf gleiche Weise liegt auch der Schwerpunct von der Umfläche eines Prisma im Halbirungspuncte jener Geraden, welche die Schwerpuncte der beiden Grundflächen verbindet.

§. 53. Schwerpunct einer geraden Kegelfläche. Denkt man sich durch Theilung der Peripherie die Basis in sehr viele gleiche Theile und Verbindung der Theilungspuncte mit der Spitze des Kegels durch gerade Linien die conische Mantelfläche in lauter sehr schmale gleichschenkliche Dreiecke zerlegt, so geht eine mit der Basis im Abstande von $\frac{2}{3}$ der Höhe des Kegels von der Spitze abwärts parallele Ebene (§. 48) durch die sämmtlichen Schwerpuncte dieser Flächenelemente, also auch durch den gesuchten Schwerpunct der Kegelfläche selbst, der zugleich auch in der Achse des Kegels, mithin im Durchschnitte der Achse mit der genannten Ebene, oder, wenn man die Achse in 3 gleiche Theile theilt, in dem zweiten dieser Theilungspuncte von der Spitze abwärts liegt.

Auf ganz gleiche Weise liegt auch der Schwerpunct von der Umfläche einer Pyramide um $\frac{2}{3}$ der Länge der Achse von der Spitze abwärts.

Um den Schwerpunct der Mantelfläche eines mit der Basis parallel abgestutzten Kegels (oder auch einer abgestutzten Pyramide) zu finden, mufs man den Kegel ergänzen, diesen aus den beiden Theilen des gegebenen und Ergänzungskegel ansehen und darauf den Satz der statischen Momente genau auf dieselbe Art anwenden, wie diefs in §. 51 bei der Bestimmung des Kreissegmentes geschah.

§. 54. Schwerpunct einer Kugelschale und Kugelzone. Theilt man die krumme Oberfläche der Zone $AEBD$ (Fig. 28) durch unendlich nahe liegende, mit der kreisförmigen Basis $AEBF$ parallel laufende Ebenen in unendlich kleine Zonen von durchaus gleicher Höhe; so haben sie auch alle eine gleiche Oberfläche (indem jede davon gleich ist dem Producte aus dem Umfange des gröfsten Kugelkreises in die Höhe der Zone), und da der Schwerpunct einer jeden solchen Zone in ihrer halben Höhe, also in der auf der Grundfläche $AEBF$ im Mittelpuncte C senkrechten Geraden CD liegt, diese Linie sonach durchaus gleich schwer ist; so liegt der gesuchte Schwerpunct der krummen Oberfläche der Zone, diese mag eine oder zwei Grundflächen besitzen, im Halbirungspuncte von CD, d. i. in der halben Höhe der Achse der Zone.

Schwerpunct der Körper.

§. 55. Schwerpunct einer dreiseitigen Pyramide. Theilt man die Seite BC (Fig. 29) des Dreieckes BCD der Pyramide $ADBC$ im Puncte E in zwei gleiche Theile, verbindet E

mit D und A durch gerade Linien, schneidet $Dp = \frac{1}{3} DE$ und $Aq = \frac{2}{3} AE$ ab; so sind p und q die Schwerpuncte der Dreiecke BDC und ABC. Da nun nach einer geometrischen Eigenschaft die Gerade Ap durch die Schwerpuncte a sämmtlicher Dreiecke bcd geht, welche durch den Schnitt der Pyramide mit Ebenen entstehen, die mit der Basis BCD parallel laufen; so enthält diese Gerade auch den Schwerpunct der sämmtlichen Körperelemente der Pyramide, welche entstehen, wenn man diese mit unendlich nahe liegenden und mit BCD parallel laufenden Ebenen durch die ganze Höhe durchschneidet, so, daſs also diese Verbindungslinie Ap ein Durchmesser der Schwere ist.

Da aus gleichem Grunde auch die Verbindungslinie Dq eine solche Linie der Sehwere seyn muſs, so liegt der gesuchte Schwerpunct O der Pyramide im Durchschnitte dieser beiden Linien.

Zieht man die Hilfslinie pq, so ist diese mit AD parallel (weil im Dreiecke DEA, $Ep : Eq = ED : EA$), mithin das Dreieck Opq jenem DOA ähnlich und sonach $AO : Op = AD : pq = DE : Ep = 3 : 1$, woraus $AO = 3\,Op$ und daher $Ap = 4\,Op$, oder $Op = \frac{1}{4} Ap$ und $AO = \frac{3}{4} Ap$ folgt; der Schwerpunct der Pyramide liegt also in der Geraden, welche den Schwerpunct der Grundfläche mit der gegenüber liegenden Spitze verbindet um $\frac{3}{4}$ Theile dieser Geraden von der Spitze abwärts.

§. 56. Schwerpunct einer vielseitigen Pyramide und des Kegels. Da man jede vielseitige Pyramide in lauter dreiseitige zerlegen kann, deren Grundflächen zusammen jene der gegebenen Pyramide ausmachen und gemeinschaftliche Spitzen in der Spitze dieser Pyramide liegen, so muſs eine Ebene, welche in dem Abstande von $\frac{3}{4}$ der Höhe der Pyramide von der Spitze abwärts mit der Grundfläche parallel geführt wird, nach dem vorigen Paragraphe durch die Schwerpuncte der sämmtlichen dreiseitigen Pyramiden, folglich auch durch den gesuchten Schwerpunct der ganzen Pyramide gehen; da dieser Punct aber auch in jener Geraden, welche den Schwerpunct der Grundfläche mit der Spitze der Pyramide verbindet, mithin im Durchschnitte derselben mit der vorigen Ebene liegt, so darf man auch hier, wie es bei der dreiseitigen Pyramide der Fall ist, diese Verbindungslinie nur in 4 gleiche Theile theilen, so ist der von der Spitze abwärts genommene dritte Theilungspunct der Schwerpunct der Pyramide.

Offenbar gilt dieselbe Regel auch für die Bestimmung des Schwerpunctes eines Kegels, indem man diesen als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten ansehen kann.

§. 57. Schwerpunct einer abgestutzten Pyramide oder eines abgekürzten Kegels. Um den Schwerpunct einer mit der Basis parallel abgestutzten Pyramide zu finden, mufs man sich diese ergänzt denken, die ganze ergänzte Pyramide als aus 2 Theilen: der gegebenen und der Ergänzungspyramide bestehend ansehen, und das statische Moment (ähnlich dem Verfahren im §. 51) der ganzen Pyramide der Summe der statischen Momente der beiden Theile gleich setzen. Bezeichnet man zwei ähnlich liegende Seiten in den beiden Grundflächen, wie AB und ab (Fig. 30) mit A und a, die Höhe der Pyramide Pp durch h; so findet man für den gesuchten Schwerpunct O den Abstand

$$PO = \tfrac{1}{4} h \frac{A^2 + 2Aa + 3a^2}{A^2 + Aa + a^2}$$

und eben so für einen mit der Basis parallel abgekürzten Kegel, dessen obere Basis den Halbmesser r und untere jenen R hat:

$$PO = \tfrac{1}{4} h \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + R + r^2}.$$

Für $r = R$ wird, wie es seyn soll, indem der Kegel in einen Cylinder übergeht, $PO = \frac{1}{2} h$.

§. 58. Schwerpunct eines Kugelausschnittes. Denkt man sich den Kugelausschnitt $CBAD$ (Fig. 31) vom Halbmesser $CB = CA = r$ in lauter unendlich kleine Pyramiden aufgelöst, deren Grundflächen zusammen die kugelförmige Basis $BsDcA$ des Sectors ausmachen und deren Spitzen mit der Spitze des Sectors, d. i. mit dem Mittelpuncte C der Kugel zusammenfallen, ferner das Gewicht jeder dieser Elementarpyramiden in ihrem Schwerpuncte vereinigt; so liegen diese sämmtlichen Schwerpuncte in der Kugeloberfläche, welche (§. 56) mit dem Halbmesser $= \frac{3}{4} r$ aus C, also concentrisch mit der Basis des Kugelsectors angenommen wird. Gibt man daher dieser Kugelfläche das Gewicht des Kugelsectors (nämlich dessen Inhalt), so ist der Schwerpunct O dieser Kugeloberfläche sofort auch der gesuchte Schwerpunct des Kugelausschnitts.

Ist also $Ca = \frac{3}{4} CA = \frac{3}{4} r$, $aO = \frac{1}{2} ae = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} AE = \frac{3}{8} AE$, so ist (§. 54)

$$CO = Ca - aO = \tfrac{3}{4} r - \tfrac{3}{8} AE = \tfrac{3}{8} (2r - AE),$$

wo AE die Höhe der entsprechenden Kugelzone $BsDcA$ ist. Für die Halbkugel ist $AE = r$, folglich $CO = \frac{3}{8}r$.

§. 59. Schwerpunct eines Kugelabschnittes. Der Kugelabschnitt $BsDcA$ (Fig. 31) ist der Unterschied zwischen dem Kugelsector $BCDcA$ und dem Kegel $BsDcC$; wird, da die Schwerpuncte dieser beiden letzteren Körper bereits gefunden wurden, der Unterschied der statischen Momente dieser beiden Körper dem statischen Momente des Kugelsegmentes (auf ähnliche Weise, wie im §. 51) gleich gesetzt, so erhält man, wenn O' der gesuchte Schwerpunct des Kugelabschnittes und die Höhe desselben $AE = a$ ist:

$$CO' = \frac{3}{4}\,\frac{(2r - a)^2}{3r - a}.$$

Für die Halbkugel wird $a = r$; also $CO' = \frac{3}{4} \cdot \frac{r^2}{2r} = \frac{3}{8}r$, wie zuvor.

Anmerkung. Daſs der Schwerpunct eines regelmäſsigen Körpers, wie einer Kugel, eines Würfels u. s. w. wieder im Mittelpuncte liegt, bedarf keiner Erwähnung mehr.

§. 60. Practische oder empirische Methode zur Bestimmung des Schwerpunctes. Aus der im §. 41 angeführten Eigenschaft des Schwerpunctes folgt, daſs, wenn ein Körper an einem Faden aufgehängt wird, der Körper nur dann ruhen kann, wenn sich der Schwerpunct desselben und der Befestigungspunct des Fadens in einer lothrechten oder verticalen Linie befinden. Verlängert man daher dabei, wenn C (Fig. 32) der Aufhänge- und A der Befestigungspunct des Fadens ist, die Richtung desselben nach AB in das Innere des Körpers, so geht diese durch dessen Schwerpunct O. Wiederholt man dasselbe Verfahren in Beziehung auf einen zweiten Punct A', welcher nicht in der Verlängerung von AB liegt, so geht auch dabei die Verlängerung $A'B'$ der Fadenrichtung durch den Schwerpunct O; dieser liegt demnach im Durchschnitte dieser beiden Geraden AB und $A'B'$.

Da ein Punct auch durch den Durchschnitt dreier Ebenen bestimmt wird, so kann man den betreffenden Körper auch in 3 verschiedenen Positionen auf eine Schneide oder scharfe Kante eines Prisma in's Gleichgewicht bringen, sich jedesmal durch die Auflaglinie oder Kante eine verticale Ebene durchgelegt denken; so werden sich diese Ebenen ebenfalls im Schwerpuncte des Körpers durchschneiden.

Diese beiden Verfahrungsarten geben auch dann noch die Lage des Schwerpunctes an, wenn die Körper (§. 42) heterogen sind.

§. 61. Gleichgewichts - Bedingungen für schwere Körper. Die Kenntnifs von der Lage des Schwerpunctes eines Körpers ist schon defshalb sehr wichtig, weil es nur dadurch möglich wird, die Bedingungen anzugeben, unter welchen der Körper die eine oder andere Lage mit Sicherheit annehmen kann.

Ruht z. B. ein Körper S (Fig. 33) mit einem einzigen Puncte A auf einer horizontalen Ebene, so kann der Widerstand, welchen die Ebene dem verticalen (dem Gewichte des Körpers gleichen) Drucke des Körpers in diesem Puncte entgegensetzt, als eine eben so grofse aufwärts wirkende Kraft angesehen (oder durch eine solche Kraft ersetzt) werden; soll also das Gleichgewicht bestehen oder der Körper in dieser Lage ruhen, so mufs die durch den Schwerpunct O gehende lothrechte Linie durch den Stützpunct A gehen, weil sich zwei gleiche gerad entgegengesetzt wirkende Kräfte, wenn sie nicht denselben Angriffspunct haben, nicht das Gleichgewicht halten können und der Punct O um jenen A eine Drehung erhielte. Wirken auf den Körper aufser der Schwere noch andere Kräfte, so mufs für das Gleichgewicht die Resultirende nicht blofs durch den Stützpunct A gehen, sondern diese zugleich auch auf der horizontalen Ebene MN senkrecht stehen und von oben nach unten wirken; weil, wenn die Resultirende auf der Ebene schief stände, diese in zwei renkrechte Kräfte, wovon die eine mit der Ebene parallel wäre zerlegt werden könnte, und diese letztere ein Gleiten auf der Ebene MN bewirken würde.

§. 62. Ruht ein Körper (Fig. 34) auf zwei Puncten A und B einer solchen Ebene, so ist es für das Gleichgewicht hinreichend, wenn die Resultirende aus allen auf den Körper einwirkenden Kräften lothrecht von oben nach unten und durch einen Punct der Geraden AB, zwischen A und B gehet; denn man kann sich in diesem Falle die Resultirende in zwei parallele Kräfte aufgelöst denken, welche durch die Puncte A und B gehen und sofort durch den Widerstand, welchen die horizontale Ebene in diesen Puncten leistet, aufgehoben werden. Wirken aufser der Schwere keine weitern Kräfte auf den Körper, so ist es hinreichend, wenn die durch den Schwerpunct O gezogene Verticallinie durch irgend einen Punct der Geraden AB (mit Ausschlufs ihrer Verlängerung) geht.

§. **63.** Eben so wird bei einem mit drei Puncten auf einer horizontalen Ebene ruhenden Körper das Gleichgewicht bestehen, wenn die durch dessen Schwerpunct gehende lothrechte Linie, oder im Falle außer der Schwere noch andere Kräfte einwirken, die von oben nach unten wirkende Resultirende in das Dreieck fällt, welches durch die Verbindung der drei Stützpuncte gebildet wird. Dasselbe gilt auch hinsichtlich des Polygons, welches aus der Verbindung aller Stützpuncte, wenn ihre Zahl größer als 3 ist, entsteht.

So wird z. B. das schiefe Prisma M in Fig. 35 auf einer horizontalen Ebene stehen bleiben, weil die Horizontalprojection des Schwerpunctes O in die Grundfläche $a\,b$ fällt. Dagegen fällt das Prisma in Fig. 36 oder der schiefe Cylinder in Fig. 37 um, weil diese Projection über die Grundfläche hinausfällt; das Prisma dreht'sich dabei um die Kante $b\,c$.

§. **64. Sicheres und unsicheres Gleichgewicht.** Hat ein auf einer horizontalen Ebene ruhender Körper das Bestreben seine Lage, wenn er aus dieser gebracht wird, sogleich wieder einzunehmen, so sagt man, er habe ein sicheres (stabiles) Gleichgewicht; findet dagegen selbst bei der geringsten Verrückung der Lage das Gegentheil Statt, so besitzt er ein unsicheres (labiles) Gleichgewicht; da der Schwerpunct eines Körpers fortwährend das Bestreben zu fallen hat, so wird er im ersten Falle die möglichst tiefe und im letztern die höchste Lage gegen die horizontale Ebene, worauf er ruht, einnehmen, oder sich derselben wenigstens noch nähern können.

So wird z. B. eine elliptische Scheibe (Fig. 38) auf dem Endpunct b der kleinen Achse ruhend ein sicheres, dagegen auf dem Endpunct der großen Achse a ein unsicheres Gleichgewicht besitzen, weil bei einer auch noch so geringen Wälzung der Ellipse um den Bogen $b\,c$, wodurch c der Unterstützungspunct wird, der Schwerpunct O im ersten Falle steigt, und im zweiten fällt, indem $O\,c > O\,b$ und $< O\,a$ ist.

Eben so hat die an einem Faden oder steifen Draht befestigte Kugel A in Fig. 39, wo der Faden oder Draht in C aufgehangen ist, ein stabiles, dagegen in der Lage Fig. 39, a, wo sich die Kugel auf den Draht und dieser auf eine Unterlage C stützt, ein labiles Gleichgewicht.

§. **65. Maſs für die Stabilität oder Standfähigkeit eines Körpers.** Ein auf einer horizontalen Ebene ruhender Körper kann ein mehr oder weniger sicheres Gleichgewicht besitzen, je nachdem unter sonst gleichen Umständen seine Basis gröſser oder kleiner ist, und bei gleicher Grundfläche, dessen Schwerpunct tiefer oder höher liegt. So wird z. B. ein Lineal (Fig. 40) auf die flache Seite gelegt, wie in 1., sicherer ruhen, als wenn es wie in 2. auf die Kante gelegt wird, und in dieser Lage wieder sicherer im Gleichgewichte seyn, als in der aufrechten Stellung 3.; zugleich wird es im letztern Falle wieder leichter um die Kante AC, als um jene AB umfallen, indem schon eine geringe Neigung des Lineals um diese Kante AC hinreicht, die Horizontalprojection a des Schwerpunctes O über die Grundfläche BC hinausfallen zu machen; endlich wird auch unter einerlei Umständen ein eisernes Lineal, da es ein gröfseres Gewicht besitzt, nicht so leicht als ein hölzernes umfallen oder umgeworfen werden.

Da also das Umwerfen irgend eines auf einer horizontalen Ebene MN ruhenden Körpers AE (Fig. 41) um eine seiner Kanten AB für irgend eine Kraft P um so schwieriger wird, je gröfser sein Gewicht und der Abstand mC der Horizontalprojection von der Kante AB ist, so kann das Product aus diesen beiden Gröfsen, welche das Umdrehungsmoment um AB bildet, als Mafs für die Stabilität des Körpers in Beziehung auf die Kante AB angesehen werden.

Ist CE eine durch den Schwerpunct O des Körpers verticale, auf der Kante AB senkrechte Ebene, und darin OD ein aus C mit dem Abstande CO bis zu der durch C gehenden lothrechten Linie Cc gezogener Kreisbogen; so mufs, wenn der Körper um AB wirklich umgeworfen werden soll, der Schwerpunct O diesen Bogen beschreiben, und da dieser für einen tiefer liegenden Punct o gröfser ausfällt, auch der Punct o bis d höher, als jener von O bis D gehoben werden mufs; so folgt, dafs bei gleichem Gewichte und Abstande Cm, die Stabilität in Beziehung auf ein völliges Umwerfen um so gröfser ist, je tiefer der Schwerpunct liegt.

Auf den hier erörterten Eigenschaften der Stabilität beruhen im gemeinen Leben unzählige Verfahrungs- und Benehmungsarten. Beim Beladen eines Wagens oder der Ausrüstung eines Schiffes legt man die schweren Lasten zu unterst und die leichtern oben auf, um den Schwerpunct möglichst tief herab zu bringen; auch sieht man darauf, dafs die durch diesen Punct gehende Verticallinie in die halbe Breite des Wagens oder Schiffes fällt. Menschen und Thiere verändern bei ihren Bewegungen den Schwerpunct fortwährend und gleichsam instinctmäfsig auf eine solche Weise, dafs dieser dabei beständig unterstützt wird. Der Mensch lernt diese nothwendigen Veränderungen von Kindheit auf und oft nur mit vieler Mühe. Steht er aufrecht, so fällt die durch seinen Schwerpunct (der zwischen den Hüften liegt) gehende Verticallinie zwischen die Füfse; beim Gehen wirft oder bewegt er den Schwerpunct abwechselnd auf die rechte und linke Seite, so wie er den linken oder rechten Fufs hebt, um diesen Punct über jenen

Fufs zu bringen, der eben den Boden berührt; aus diesem Grunde ist das ungehinderte Marschiren in geschlossenen Reihen nur dadurch möglich, dafs Alle mit demselben Fufse austreten und Schritt halten. Trägt der Mensch eine Last auf dem Rücken, so beugt er sich vorwärts, im entgegengesetzten Falle nach rückwärts; eben so nach rechts, wenn er links eine Last trägt u. s. w., um den gemeinschaftlichen Schwerpunct seines Körpers und der Last zwischen seine Füfse zu bringen. Will er von einem Stuhle frei aufstehen, so mufs er früher entweder durch Vorbeugung des Oberkörpers oder dadurch, dafs er die Füfse etwas zurück unter den Stuhl schiebt, den Schwerpunct über die Füfse bringen. Derjenige, welcher beim Fechten oder Ringen einen Stofs auf die Brust auspariren oder aushalten will, spreizt die Füfse weit aus einander, um durch Vergröfserung der Basis seine Standfähigkeit zu vergröfsern. In einem kleinen schwankenden Kahn oder Wagen ist es oft gefährlich aufzustehen, weil dadurch der Schwerpunct höher zu liegen kommt und der Kahn leichter umschlagen kann, u. s. w. u. s. w.

Viertes Kapitel.

Von den auf Seile oder Schnüre wirkenden Kräften.

§. 66. Spannung einer Schnur. Ist das eine Ende einer Schnur befestigt, und wirkt am andern Ende eine ziehende Kraft P, so heifst P die Spannung der Schnur. Diese Spannung bleibt auch noch dieselbe, wenn an beiden Enden der Schnur zwei gleiche Kräfte P nach entgegengesetzten Richtungen wirken und sich also im Gleichgewichte halten. Wirken dagegen an den Endpuncten einer Schnur zwei ungleiche Kräfte, P und p, nach entgegengesetzten Richtungen, und ist $P > p$, so ist die Spannung der Schnur $= p$, weil der Ueberschufs oder die Resultirende $P - p$ der beiden Kräfte Bewegung erzeugt und auf die Spannung keinen Einflufs hat.

§. 67. Bedingungen für das Gleichgewicht eines schweren Körpers, welcher längs einer an beiden Enden befestigten Schnur frei hin und her gleiten kann. Ist die Schnur AMA' (Fig. 42) in den Puncten A, A' befestigt, und an diese mittels eines losen Ringes M das Gewicht Q aufgehangen, so mufs für's Gleichgewicht die Schnur nothwendig in die durch die Puncte A, A' gelegte verticale Ebene fallen. Da der bewegliche Aufhängpunct M, wenn dieser in der genannten Ebene so herumgeführt wird, dafs dabei die beiden Faden- oder

Schnurstücke AM, $A'M$ fortwährend straff gespannt bleiben, bekanntlich eine Ellipse beschreibt, deren grofse Achse $BB' = AM + MA'$ ist, und Brennpuncte A, A' sind; so ist es für den vorliegenden Fall genau eben so, als sollte der schwere Körper auf dem concaven Theil BMB' der krummen Linie im Gleichgewichte bleiben, was sofort fordert, dafs die durch seinen Schwerpunct gehende lothrechte Linie im Stütz- oder Aufhängpunct M auf der Curve normal stehe und dafs für das stabile Gleichgewicht dieser Punct zugleich der tiefste sey, den der Ring also auch das Gewicht Q dabei einnehmen kann. Beide Bedingungen sind aber für jenen Punct M der Ellipse vorhanden, für welchen die Tangente TT' horizontal, also die Normale CM vertical ist. Da nun aber, wie aus der Geometrie bekannt, der Winkel AMA' der beiden Leitstrahlen durch die Normale CM halbirt wird, so folgt zugleich, weil die Kraft Q der aus den Spannungen der Seilstücke MA und MA' entstehenden Resultirenden gleich seyn mufs, dafs diese beiden Spannungen gleich grofs sind (weil die Resultirende nur für zwei gleiche Seitenkräfte in der Mitte liegt); denn schneidet man auf MC das Stück $Ma = Q$ ab und ergänzt das Parallelogramm bb', so stellen $Mb = Mb'$ die Spannungen der Schnurstücke vor.

Beispiel. Ist eine Schnur von der Länge $AC + BC = l$ (Fig. 43) in den Puncten A und B befestigt, und hängt man, wie z. B. bei manchen Strassenlaternen mittels eines Ringes, der auf der Schnur gleiten kann, eine Laterne oder ein Gewicht Q auf; so findet man den Punct C, in welchem Q im Gleichgewichte bleibt, durch folgende Construction:

Da nach dem Vorhergehenden, wenn man durch C die lothrechte Linie GC zieht, die Winkel a und b einander gleich seyn müssen, so ist, wenn man auch durch B die Verticallinie DF zieht und AC bis zum Durchschnitt F verlängert, das Dreieck BCF gleichschenklich, nämlich $CF = CB$ (weil die Winkel an der Basis a und b, wie bemerkt, einander gleich sind), folglich ist $AF = AC + CF = AC + CB = l$. Durchschneidet man also die durch B gezogene lothrechte Linie DBF mit dem Halbmesser l aus A in F, zieht die Gerade AF, halbirt FB in E und zieht durch diesen Punct auf DF eine Senkrechte; so durchschneidet diese die vorige Gerade AF in dem gesuchten Puncte C, in welchem sich der schwere Körper auf der Schnur in's Gleichgewicht setzt.

§. 68. Gleichgewichtsbedingungen für mehrere an einem Seile hängende Gewichte (Seilpolygon). Ist das Seil oder die Schnur AMA' (Fig. 44) in den Endpuncten A, A' befestigt, und hängen in den Puncten M, M', M'', die man Knoten nennt, die Gewichte P, P', P''; so kann man, wenn sich das Gleichgewicht durch die Lage der Schnur $AMM'M''A'$, welche übrigens wieder in die durch A, A' gehende verticale Ebene fällt, hergestellt hat, ohne Störung derselben anstatt der festen Puncte A, A' Kräfte S, S' nach den Richtungen MA, $M''A'$ annehmen, welche den in A und A' Statt findenden Spannungen des Seils gleich sind.

Für den Punct M erscheint aber auch die Spannung des Seilstückes MM' als eine in M nach MM' wirkende Kraft s, z. B. (die auch zugleich der Spannung von M' gegen M gleich ist), so, dafs auf den Punct M 3 Kräfte S, s und P wirken, die unter sich im Gleichgewichte stehen; damit aber das Gleichgewicht bestehen kann, so müssen diese drei Kräfte zuerst in ein und derselben Ebene, folglich (wegen P) in einer Verticalebene liegen, und dann mufs (§. 16. Anmerk.)

$$S : s = \sin PMM' : \sin AMP$$

seyn. Eben so mufs für den Punct M', wenn die Spannung des Seilstückes $M'M''$ in dieser Richtung $= s'$ ist (s' ist dann auch die Spannung in M'' gegen M'), erstlich P' wieder mit MM' und $M'M''$ in einerlei, folglich, da P' mit P parallel ist, in die vorige Ebene fallen und dann $s : s' = \sin P'M'M'' : \sin MM'P'$ Statt finden.

Eben so ist für die drei Kräfte P'', s' und S', welche auf M'' wirken:
$$s' : S' = \sin P''M''A' : \sin M'M''P'',$$
bleibt man bei drei solchen Knoten stehen und setzt diese drei Proportionen zusammen, so erhält man

$$S : S' = \sin P''M''A' : \sin AMP = \sin NBA' : \sin ABN,$$

eine Proportion, welche für jede Anzahl von Knoten gilt, und auch von den obigen Proportionen unabhängig auf folgende Art gefunden wird.

Verlängert man nämlich die beiden letzten Seilstücke AM und $A'M''$ bis zu ihrem Durchschnitt B, so mufs die Resultirende der parallelen Kräfte P, P' ... nothwendiger Weise durch diesen Punct B, und da P, P' ... Gewichte darstellen, so mufs die durch B gezogene Verticallinie BN durch den Schwerpunct dieser Gewichte gehen, weil sonst die drei Kräfte S, S' und $R = P + P' + \ldots$ nicht im Gleichgewichte seyn könnten. In diesem Falle ist aber (bereits citirte §. 16) $S : S' = \sin A'BN : \sin ABN$ (welches die vorige Relat. ist), und $S : R = \sin ABN : \sin ABA'$.

Durch diese beiden Proportionen sind die in den Befestigungspuncten A, A', und damit dann auch durch die frühern Proportionen die in den übrigen Knotenpuncten M, M' ... Statt findenden Spannungen bestimmt; auch geht hervor, dafs das ganze Seilpolygon in einer v e r t i c a l e n E b e n e liegt.

Die in den einzelnen Puncten Statt findenden Spannungen lassen sich auch leicht durch Construction der Kräftenparallelogramme finden. So nehme man, um die Spannung im Puncte M zu bestimmen, auf der lothrechten Linie MP das Stück Mb gleich oder proportional dem Gewichte P, verlängere AM und construire das Parallelogramm $bMad$; so stellt Md die Spannung ($= S$) nach AM im Puncte A, und Ma ($=$ s) jener des Seilstückes MM' in M' gegen M' (so wie auch zugleich jene in entgegengesetzter Richtung, da $Mm = Ma$ ist und seyn muſs) vor.

§. **69. Die Kettenlinie.** Hängt man eine vollkommen biegsame Schnur, oder auch eine aus äuſserst feinen Gliedern bestehende Kette mit ihren Endpuncten auf zwei Puncte A und A' (Fig. 45) auf, so bildet diese eine in der durch die Aufhängpuncte A, A' gehenden verticalen Ebene liegende Curve ANA, welche Kettenlinie heiſst. Da man sich die Curve als eine gewichtslose Schnur denken kann, welche nach ihrer ganzen Länge mit unendlich vielen und eben so kleinen Gewichten, deren Summe dem Gewichte der Schnur gleich ist, gleichförmig belastet ist; so hat man ein Seilpolygon von unendlich vielen und kleinen Seiten, auf welches sich sofort die Gesetze des vorigen Paragraphes anwenden lassen.

Zieht man an den End- oder Aufhängpuncten an die Curve die Tangenten AB, $A'B$, so muſs also wieder die durch ihren Durchschnittspunct B gezogene Verticallinie durch den Schwerpunct O der Kettenlinie gehen, oder was dasselbe ist, die Resultirende aus allen den unendlich vielen und kleinen parallelen Kräften, welche auf die Schnur lothrecht wirken, muſs durch den Punct B gehen. Nimmt man also auf dieser lothrechten Linie das Stück $BD =$ dem Gewichte der Kette oder Schnur und construirt das Parallelogramm EF, so stellen EB und FB die Spannungen der Kette in den Aufhängpuncten A und A' nach den Richtungen der Tangenten AB, $A'B$ vor.

Ist $W.EBD > W.DBF$, so ist auch

$$ED < DF,\quad ED = FB > DF = EB,$$

oder die Spannung in A' gröſser als jene in A (was auch aus

$$S : S' = \sin A'BD : \sin ABD \text{ folgt}).$$

§. **70.** Um die Spannung der Schnur oder Kette in jedem andern Puncte, z. B. in M (Fig. 46) zu bestimmen, kann man ohne Störung des Gleichgewichtes den Punct M als fest annehmen und das Stück MA' der Kette unberücksichtigt lassen; eben so kann man den tiefsten Punct N der Curve befestigt denken und das Stück AN weglassen, so wird für das Bogenstück NM immer noch das Gleichgewicht bestehen. Zieht man also an dieses in den Endpuncten N und M die Tangenten, so müssen sich diese in der durch den Schwerpunct des Kettenstückes NM gehenden Verticallinie FG durchschneiden, und die nach den Tangenten gemessenen Spannungen müssen sofort mit dem Gewichte dieses Kettenstückes NM im Gleichgewichte stehen; der Punct E steht also im Gleichgewichte mit der in M Statt findenden, gegen EM gerichteten Spannung, ferner der in N gegen EN gerichteten Spannung, und endlich dem nach EG wirkenden Gewichte des Bogens MN. Hieraus folgt nun, wenn man das Kräftenparallelogramm ab construirt, das Eigenthümliche, dafs die Spannung der Schnur oder Kette in irgend einem Puncte M eine (constante) horizontale Seitenkraft Ea hat, welche der Spannung des tiefsten Punctes N, und eine verticale Seitenkraft Eb besitzt, welche dem Gewichte des Seil- oder Kettenstückes MN, vom tiefsten Punct N bis zum betreffenden Punct M gezählt, gleich ist.

Aus diesem Grunde erleiden die höher liegenden Puncte eine grössere Verticale Spannung als die tiefer liegenden.

Liegen die beiden Aufhängpuncte A, A' in einer horizontalen Linie (in einerlei Horizont), so liegt der tiefste Punct N der Curve in der halben Länge der Kette und die verticale Spannung in jedem Aufhängpuncte ist daher dem halben Gewichte der Kette gleich, während, wie schon bemerkt, die horizontalen Spannungen einander gleich und so grofs sind, wie die Spannung im tiefsten Puncte N.

Anmerkung. Eine der vorzüglichsten Anwendungen findet die Kettenlinie auf die in der neuern Zeit häufig ausgeführten Häng- oder Kettenbrücken, obschon dabei, wenn die horizontale an den Ketten aufgehängte Fahrbahn der ganzen Länge nach gleichförmig so bedeutend belastet wird, dafs dagegen das Gewicht der Ketten selbst vernachläfsigt werden kann, diese Curve in eine gemeine Parabel übergeht.

Denkt man sich an der Kettenlinie ANA' kleine feste Kugeln angereiht, welche sich der Reihe nach berühren und die Schwerkraft nach gerad entgegengesetzter Richtung wirkend, wodurch, weil (§. 23) der Mittelpunct der parallelen Kräfte oder der Schwerpunct dadurch nicht geändert wird, das Gleichgewicht bestehen bleibt; so kann man den Bogen auch so umkehren, dafs er in derselben verticalen Ebene in die Lage $AN'A'$ (Fig. 45) kommt, folglich die Kugeln durch ihre blofse Berührung diesen Bogen als ein freies oder selbst tragendes Gewölb bilden, die Spannungen in den einzelnen Gliedern der Kette gehen hier in Pressungen der Kugeln über.

Wird ein Seil zum Fortziehen einer Last, z. B. eines Schiffes mit einem Ende B (Fig. 47) an die Last Q befestigt, und wirkt am andern Ende A eine Zugkraft P; so bildet das Seil eine Kettenlinie ANB. Zieht man in A und B die Tangenten AD, BD und durch ihren Durchschnittspunct D die verticale Linie CD, so ist, wenn G das Gewicht des Seils bezeichnet, da P die Spannung des Seils in A ist:

$$P : G = \sin CDB : \sin ADB.$$

Soll das Seil nach der geraden Linie BA ausgespannt werden, so mufs der Winkel CDB in einen rechten Winkel übergehen oder $= 90$, und jener $ADB = 180$ Grad werden; dafür wird $\sin CDB = 1$ und $\sin ADB = 0$, folglich ist $P : G = 1 : 0$, und daraus $P = \frac{G}{0} = \infty$, d. h. entweder müfste das Seil kein Gewicht haben, oder die Kraft P müfste unendlich grofs seyn; da nun in der Wirklichkeit keines von beiden Statt findet, so läfst sich auch, wenn die Zugkraft horizontal wirkt, das Seil niemals in eine mit dieser Richtung zusammen fallende gerade Linie ausspannen. Eben so wenig ist diefs auch für eine nicht horizontale Gerade möglich, weil dabei immer wieder $\sin ADB = 0$ werden müfste, während $\sin CDB$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt; nur für eine verticale Linie ist dieses anders.

Fünftes Kapitel.

Von dem Gleichgewichte bei Maschinen, Satz der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. 71. Erklärungen. Jede Vorrichtung, mittelst welcher eine Kraft auf einen aufserhalb ihrer Richtung liegenden Punct fortgepflanzt oder wirksam gemacht wird, um dort einen gewissen Widerstand zu überwinden oder überhaupt irgend eine Arbeit zu verrichten, welches der Kraft, wenn sie unmittelbar auf diesen Punct wirken müfste, schwer oder gar nicht möglich wäre, pflegt man eine Maschine zu nennen. Dabei ist eine scharfe Gränzlinie zwischen Werkzeugen, Instrumenten und Maschinen weder möglich noch auch nothwendig, und man richtet sich in der Benennung derselben gewöhnlich nach dem Sprachgebrauche.

Der mit einer Maschine zu überwindende Widerstand heifst gewöhnlich die Last; da aber auch diese, z. B. wenn sie in einem zu hebenden Gewichte besteht, als Kraft dienen kann, so sind Kraft und Last bei einer Maschine mehr in ihrer Benennung und ihrer relativen Beziehung als in ihrem Wesen verschieden, daher nennt man die Last auch manchmal die Gegenkraft. Diese mufs für das statische Gleichgewicht der Maschine, welches wir hier zu untersuchen haben, mit der Kraft in einem bestimmten Verhältnifs stehen, und wenn dieses auch, wie wir weiter unten sehen werden, von jenem Verhältnifs in etwas verschieden ist, welches bei der Bewegung der Maschine oder dem sogenannten dynamischen Gleichgewichte eintritt, wo auch die Nebenhindernisse, wie die Reibung u. s. w. in Betracht kommen, so bildet es gleichwohl die Grundlage auch für das Verhältnifs zwischen Kraft und Last beim dynamischen Gleichgewichte.

Je nach dem Zwecke der zu verrichtenden Arbeit gibt es auch unzählig verschiedene Maschinen; bei den meisten derselben kommen einzelne Bestandtheile vor, die selbst wieder als Maschinen angesehen werden können, und eine derartige Maschine heifst eine zusammengesetzte Maschine, im Gegensatze von den einfachen Maschinen, wo keine solchen Bestandtheile vorkommen.

Obschon sich streng genommen alle einfachen Maschinen zuletzt auf den Hebel und die schiefe Ebene zurückführen lassen, so nimmt man doch gewöhnlich sechs einfache Maschinen an, nämlich den Hebel, die Rolle, das Rad an der Welle, die schiefe Ebene, den Keil und die Schraube (wozu noch manchmal eine siebente: die Seilmaschine gerechnet wird), von diesen reducirt sich die zweite und dritte auf den Hebel, und die fünfte und sechste auf die schiefe Ebene.

Im Nachstehenden sollen sowohl diese sechs einfachen, als auch einige der damit in Verbindung stehenden wichtigsten zusammengesetzten Maschinen behandelt werden.

Der Hebel.

§. 72. Mathematischer und physischer Hebel. Unter einem mathematischen Hebel versteht man eine gewichtlose, unbiegsame krumme, gerade oder gebrochene Linie, welche sich um einen ihrer Puncte (Stütz-, Drehungspunct oder Hypomochlion) drehen läfst, und auf welche zwei oder mehrere Kräfte in der Art wirken, dafs sie eine Drehung derselben um diesen festen Punct zu bewirken suchen.

Vertauscht man die mathematische Linie mit einer physischen schweren Linie (welche zugleich recht gut jede Stange, woraus ein wirklicher Hebel besteht, darstellen kann), so erhält man den physischen oder materiellen Hebel. Da die Gesetze für den mathematischen Hebel einfacher zu entwickeln, und sodann sehr leicht mit geringen Hinzufügungen auf den physischen Hebel zu übertragen sind; so wird bei den folgenden Untersuchungen immer der erstere vorausgesetzt.

§. 73. Gleichgewichtsbedingungen für den mathematischen Hebel. Es sey ACB (Fig. 48) ein Hebel, dessen Drehungspunct C ist, und auf welchen in den Puncten A und B die beiden Kräfte P und Q in den angedeuteten Richtungen wirken; so mufs, weil für das Gleichgewicht die Resultirende aus beiden Kräften aufgehoben oder unwirksam gemacht werden mufs, diese nothwendig durch den festen Drehungs- oder Stützpunct C gehen. Damit aber dieses Satt finden kann, müssen der Punct C und die beiden Kräfte (d. h. ihre Richtungen) in einer und derselben Ebene liegen.

Verlängert man daher, wenn die Kräfte nicht parallel sind, ihre Richtungen bis zum Durchschnitt D, so mufs die Resultirende durch die Puncte D und C gehen, wodurch sofort ihre Lage bestimmt ist. Nach §. 19 (Gl. 1) ist aber, wenn man aus dem Puncte C auf die Richtungen der Kräfte P und Q die Perpendikel Ca und Cb fällt, $P:Q = Cb:Ca$, oder wenn man $Ca = p$ und $Cb = q$ setzt, auch

$$P : Q = q : p, \text{ oder } Pp = Qq \quad . \; . \; . \; (1$$

die Perpendikel p und q heifsen die Hebelsarme der Kräfte P und Q. (Häufig nennt man auch die Theile AC, BC des Hebels selbst so.)

Diese Relation folgt noch einfacher aus §. 30, wenn man C als Mittelpunct der statischen Momente nimmt, und aus diesem Puncte die Perpendikel p und q auf die Richtungen der Kräfte P und Q fällt, indem dann, weil die Kräfte den Hebel um C nach entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben, die statischen Momente derselben (Gl. 2, wo $r = o$ ist) einander gleich seyn müssen.

Anmerkung. Sind die Kräfte parallel, so dafs sich also ihre Richtungen nicht durchschneiden, so bezieht man sich auf die mit jener zweiten im §. 30 ganz analogen Gleichung (2 im §. 33, um die Giltigkeit der obigen Relation (1 auch für diesen Fall zu erweisen.

§. 74. Sollen also zwei Kräfte auf einen Hebel im Gleichgewichte stehen, so müssen ihre Richtungen mit dem Drehungspuncte des Hebels in derselben Ebene liegen, diese sich verkehrt wie ihre Hebelsarme verhalten, oder was dasselbe ist, gleiche statische Momente in Beziehung auf den Drehungspunct besitzen und zugleich den Hebel nach entgegen gesetzten Richtungen zu drehen suchen.

Ist Q der durch die Kraft P zu überwindende Widerstand, so wird Q gewöhnlich die Last genannt, und man findet die hierzu nöthige Kraft aus der Gleichung $P = \frac{Qq}{p}$, wobei eine Kraftersparung nur dann eintritt, wenn $\frac{q}{p} < 1$, also $q < p$ ist.

Der auf den Stütz- oder Drehungspunct C Statt findende Druck wird durch die Gerade CD ausgedrückt, wenn Cn, Cm mit den Richtungen der Kräfte parallel gezogen werden, und Dm und Dn die Kräfte P und Q darstellen.

§. 75. Eintheilung des Hebels in drei Arten. Je nach der Lage des Stütz- oder Drehungspunctes theilt man den Hebel in einen Hebel der ersten Art, wenn der Drehungspunct C, wie in Fig. 49, zwischen dem Angriffspunct der Kraft P, und jenem der Last Q liegt; in den Hebel der zweiten Art, wenn der Angriffspunct der Last, wie in Fig. 50, zwischen dem Drehungspuncte und dem Angriffspuncte der Kraft, und endlich in den Hebel der dritten Art, wenn, wie in Fig. 51, der Angriffspunct der Kraft zwischen jenem der Last und dem Drehungspuncte liegt. Der Hebel der ersten Art wird auch ein zweiarmiger, jener der zweiten und dritten Art dagegen ein einarmiger Hebel genannt. Ein Hebel von der in Fig. 52 oder 53 dargestellten Form heifst ein Winkelhebel.

Aus der Ableitungsart der Relation (1 in §. 73 folgt von selbst, dafs diese Relation in allen hier angeführten Fällen oder Modificationen des Hebels gilt und richtig ist, so, dafs, wenn man in allen diesen Fällen aus dem Drehungspuncte C auf die Richtungen der Kräfte P und Q perpendikuläre Linien zieht, und ihre Längen beziehungsweise durch p und q bezeichnet, allgemein 1) . . . $Pp = Qq$, oder $P : Q = q : p$ Statt findet.

Anmerkung. Beim Hebel der zweiten Art ist in der Regel $Q > P$, also eine Kraftersparung, beim Hebel der dritten Art, $Q < P$, also ein Kraftverlust (dagegen ein Gewinn an Geschwindigkeit bei der wirklichen Bewegung) vorhanden.

Denkt man sich den Hebel in Bewegung, so beschreibt der Angriffspunct der kleinern Kraft in demselben Verhältnifs den gröfsern, und jener der gröfsern Kraft den kleinern Weg; will man also an Kraft ersparen, so mufs man ihr den gröfsern Weg zurücklegen lassen; will man dagegen durch eine vorhandene hinreichend grofse Kraft der geringern Last einen grofsen Weg in derselben Zeit zurücklegen lassen, so mufs man die Kraft nahe an dem Drehungspunct anbringen, wie diefs z. B. sehr weise bei der Bewegung des menschlichen Vorderarms durch die Muskelkraft der Fall ist.

Der Hebel kommt sowohl im gemeinen Leben als in den Künsten und Gewerben unter tausenderlei Formen und Anwendungen vor; um nur einige Fälle aufzuzählen, so gehören der Hebbaum, die Brechstange, der Geisfuſs, die Wage, Schere, Zange, der Lochbeutel der Tischler (ein Stemmeisen), der Schwengel bei Pumpen u. s. w. zu dem Hebel der ersten Art; der Schubkarren, zweiräderige Wagen, die Blechschere, das Ruder, der Limonienpresser, der Hebel bei einer Handfeuerspritze oder Druckpumpe u. s. w. zum Hebel zweiter Art, wozu auch noch der Schlüssel und Handgriff am Bohrer gezählt werden können; so wie endlich die Schaufel, Sense, Schafschere, Zuckerzange, Feuerzange, der Tritt am Spinnrade, der Vorderarm des Menschen u. s. w. zum Hebel der dritten Art.

§. 76. Aufgaben u. Beispiele über den Hebel.

1. Wenn bei einem Winkelhebel (Fig. 53), z. B. an einem Glockenzuge, der zu überwindende Widerstand $Q = 10$ Pfund ist, wie groſs muſs die damit im Gleichgewichte stehende Kraft P seyn?

Fällt man aus dem Drehungspuncte C auf die Richtungen der Kräfte P und Q die Perpendikel Ca und Cb, und findet man z. B. durch Abmessung $Ca = 4$ und $Cb = 6$ Zoll (oder einer andern beliebigen Einheit), so ist §. 73, Gl. 1. $P : Q = 6 : 4 = 3 : 2$, oder $2P = 3Q = 3 \cdot 10 = 30$, also $P = \frac{30}{2} = 15$ Pfund.

Obschon hier die Kraft gröſser als der Widerstand seyn muſs, so kann man vielleicht dennoch diese Einrichtung wählen wollen, um dem Angriffspuncte der Last eine gröſsere Bewegung mitzutheilen; denn wird z. B. der Punct A um 10 Zoll herabgezogen, so bewegt sich der Punct B nahe in seiner Richtung schon um 15 Zoll. (Dabei ist $P \cdot 10 = Q \cdot 15$, nämlich das Product aus der Kraft in ihrem Wege ist gleich dem Producte aus der Last in ihrem Wege.)

2. Für den Hebel AB (Fig. 54), an welchem zwei parallele Kräfte P und Q nach einerlei Richtung wirken, den Stütz- oder Drehungspunct zu finden.

Ist die gegebene Entfernung $AB = a$, so ist (§. 73, Anmerk.) $P : Q = BC : AC$, also auch $P : P + Q = BC : AB$, woraus $BC = a \frac{P}{P + Q}$ (1 folgt. Eben so findet man $AC = a \frac{Q}{P + Q}$ . . (1'.

Wirken die parallelen Kräfte P und Q (Fig. 55) nach entgegengesetzten Richtungen und ist $Q > P$, so liegt der Drehungspunct C in der Verlängerung von AB gegen B hin, und man hat wieder $P : Q = BC : AC$, oder auch $P : Q - P = BC : AB$, woraus $BC = a \frac{P}{Q - P}$ folgt. Wäre dagegen $P > Q$, so müſste der Drehungspunct C' in der Verlängerung von BA gegen A hin liegen, und man hätte $P : Q = BC' : AC'$, also auch $P : P - Q = BC' : AB$, woraus $BC = a \dfrac{P}{P - Q}$ wäre. Für alle diese Fälle erhält man jedoch BC weit einfacher aus der vorigen Formel (1, in welcher man nur Q gegen P negativ oder mit dem Zeichen Minus nehmen darf; denn damit folgt aus (1 $BC = a \dfrac{P}{P - Q}$. Ist nun $P > Q$, so fällt BC positiv aus, und der Punct C (oder in der Figur C') liegt eben so von rechts gegen links, wie es für die obige Formel (1 der Fall ist. Ist dagegen $P < Q$, so wird $BC = - a \dfrac{P}{Q - P}$ negativ, zum Zeichen, dafs jetzt der Punct C die entgegengesetzte Lage hat, und von links gegen rechts liegt.

Für den besonderen Fall von $P = Q$ wird $BC = \infty$, d. i. unendlich grofs, zum Zeichen, dafs hier durch gar keinen Stützpunct (übereinstimmend mit §. 21, Anmerk.) ein Gleichgewicht hergestellt werden kann.

3. Auf einem horizontal auf seinen Endpuncten A und B (Fig. 56) aufliegenden Hebel AB ruht eine Last Q, deren Schwerpunct in O ist; welchen Druck erleiden dabei die Stützen in A und B?

Schneidet die aus O gezogene lothrechte Linie, die hier zugleich auf AB perpendikulär ist, AB im Puncte C, und bezeichnet man die gesuchten Pressungen in A und B durch P und P'; so ist (wenn man B als Drehungspunct ansieht) $P : Q = BC : AB$, und daraus $P = Q \dfrac{BC}{AB}$ . . . (3. Eben so ist (wenn man A als Drehungspunct nimmt) $P' = Q \cdot \dfrac{AC}{AB}$ . . . (3', beide Drücke zusammen geben, wie es seyn soll $P + P' = Q$.

Liegt der Hebel schief, wie es z. B. der Fall ist, wenn mittelst desselben eine Last über eine Anhöhe hinauf oder herabgetragen wird; so schneidet die durch den Schwerpunct O der Last gezogene lothrechte Linie den Hebel AB (Fig. 57) in einem Puncte C zwischen dem Fufspuncte c des Perpendikels Oc und dem Puncte A (während vorhin C mit c zusammenfiel), wodurch nun in den vorigen Formeln 3) und 3') BC, also auch P gröfser, und AC, daher auch P' kleiner ausfällt, als wenn der Hebel horizontal liegt, so, dafs also durch diese schiefe Lage der tiefer stehende Träger in Nachtheil kommt.

§. 77. Gleichgewicht am Hebel, wenn auf diesen mehr als zwei Kräfte wirken. Wirken auf den Hebel AB (Fig. 58), dessen Drehungspunct C ist, die drei Kräfte S, S', S'' nach beliebigen Richtungen (übrigens mit C in einerlei Ebene), und fällt man aus dem Drehungspuncte C auf ihre Richtungen die Perpendikel s, s', s''; so kann man sich die Kraft S'', welche den beiden übrigen, die den Hebel nach einerlei Richtung zu drehen suchen, das Gleichgewicht halten mufs, in zwei parallele (an demselben Puncte B wirksame) Kräfte p und q zerlegt denken, so, dafs also $S'' = p + q$ ist, wovon die eine z. B. p, mit S und die andere q mit S' im Gleichgewichte steht.

Nun ist aber nach dem Satze des Hebels für zwei Kräfte (§. 74) $Ss = ps''$ und $S's' = qs''$, also wenn man diese Gleichungen addirt,

$$Ss + S's' = (p+q)\, s'' = S''s''.$$

Durch Wiederholung dieser Schlüsse erhält man für das Gleichgewicht von jeder beliebigen Anzahl von Kräften, welche auf den Hebel wirken, den allgemeinen Satz, dafs die Summe der statischen Momente (diese auf den Drehungspunct des Hebels bezogen) jener Kräfte, welche den Hebel nach einer Richtung drehen wollen, gleich seyn mufs der Summe der statischen Momente der übrigen Kräfte, welche ihn also nach der entgegengesetzten Richtung zu drehen suchen.

Beispiel. Wirken auf den geradlinigen Hebel AB (Fig. 59) in den Puncten A, D, F, B die Kräfte von 20, 5, 10 und 8 Pfund senkrecht nach den angedeuteten Richtungen, und soll für das Gleichgewicht der Drehungspunct desselben gefunden werden, wenn die Abstände $AD = 4$, $DE = 6$ und $EB = 2$ Fufs betragen; so setze man den Abstand des gesuchten Punctes C von A, d. i. $AC = x$; so wird $CD = x - 4$, $CE = 10 - x$, $BC = 12 - x$, und daher nach dem eben entwickelten Satze

$$20x = 5(x-4) + 10(10-x) + 8(12-x),$$

aus welcher Gleichung $x = 5\frac{1}{3}$ Fufs folgt, so, dafs also der Punct wirklich, wie man vorläufig angenommen hat, zwischen D und E liegt. Hätte man diesen Punct C zwischen E und B angenommen, so wäre $CD = x - 4$, $CE = x - 10$, $CB = 12 - x$, und die Bedingungsgleichung für's Gleichgewicht:

$$20x + 10(x-10) = 5(x-4) + 8(12-x)$$

(weil jetzt die beiden Kräfte von 20 und 10 den Hebel um C nach der einen, jene 5 und 8 aber nach der andern zu drehen suchen), woraus man nichts desto weniger wieder $x = 5\frac{1}{3}$ Fufs, wie vorhin findet; es ist also völlig gleichgiltig, in welchem Puncte der Geraden AB man vorläufig den gesuchten Drehungspunct annimmt.

2. Art. Nimmt man nicht den Drehungspunct C selbst, sondern irgend einen in der Geraden AB oder ihrer Verlängerung liegenden Punct O als Mittelpunct der statischen Momente, und denkt sich den gesuchten Drehungspunct als Angriffspunct der Resultirenden R der gegebenen parallelen Kräfte, also $R = 20 + 10 + 8 - 5 = 33$; so hat man, wenn z. B. $AO = 3$,

also $DO = 7$, $EO = 13$, $BO = 15$ ist, und wenn man $OC = x$ setzt (§. 33):

$$33x = 3.20 + 13.10 + 15.8 - 7.5 = 60 + 130 + 120 - 35 = 275,$$

u. daraus $x = 8\frac{1}{3} = 3 + 5\frac{1}{3}$, wodurch der Punct C genau wieder der vorige ist.

§. 78. Gleichgewicht beim physischen oder materiellen Hebel.

Mit Hilfe des Satzes im vorigen Paragraphe ist es nun auch leicht, die für den mathematischen Hebel abgeleiteten Relationen auf den wirklichen oder materiellen zu übertragen; denn sieht man das Gewicht des Hebels als eine in seinem Schwerpuncte (den man nach dem Kapitel III bestimmen wird) nach lothrechter Richtung wirkende Kraft an, und bringt diese mit den übrigen auf den Hebel wirkenden Kräften in Verbindung, so kann man diesen als einen mathematischen Hebel ansehen und behandeln.

Beispiel. Um z. B. den Druck zu bestimmen, welchen der um einen in C angebrachten runden Bolzen drehbare horizontale Hebel AC (Fig. 60) auf das Sicherheitsventil V eines Dampfkessels ausübt, wenn der Druck auf das Ventil vom Puncte B des Hebels ausgeht, und im Puncte A desselben ein Gewicht $= P$ aufgehängt ist; ziehe man die Gerade AC, wo C der Mittelpunct des Kreises ist, welcher dem Querschnitt des Bolzens gleich ist, durchschneide diese in B durch die lothrechte Linie, welche durch den Mittelpunct des Ventils geht (wenn dieser Punct B nicht schon am Hebel selbst gegeben seyn sollte) und bestimme auch noch das Gewicht des Hebels $= G$, und dessen Schwerpunct O. Bezeichnet man den gesuchten Druck auf das Ventil durch Q, so ist dieser eben so grofs, als eine in B angebrachte, nach entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft Q zur Herstellung des Gleichgewichtes seyn müfste, wofür aber (vor. Paragraph) $Q . CB = P . AC + G . OC$ Statt finden mufs, aus welcher Gleichung sofort der gesuchte Druck Q sehr leicht bestimmt wird.

Wäre z. B. $P = 10$ und $G = 2$ Pfund, $CB = 2$, $CA = 18$ (also der Hebel, wie man sagt $\frac{18}{2} = 9$ Mal übersetzt), und $OC = 8$ Zoll; so wäre nach der vorigen Gleichung $2Q = 18 . 10 + 8 . 2 = 196$, also der Druck auf das Ventil $Q = 98$ Pfund.

Hätte man früher das Gewicht G des Hebels auf den Aufhängpunct A reducirt, so würde dieser mit der Gröfse

$$(x . AC = G . OC)\; x = G\frac{OC}{AC} = \tfrac{4}{9}\, G = \tfrac{8}{9} \text{ Pfund}$$

auf diesen Punct gewirkt, und das Aufhänggewicht P um eben so viel vergröfsert, also auf $10\frac{8}{9}$ Pfund gebracht haben; dadurch wäre, den Hebel nun als einen mathematischen angesehen, $2Q = 18 \times 10\frac{8}{9} = 180 + 16 = 196$, und daraus wie zuvor $Q = 98$ Pfund gefunden worden.

Anmerkung. In der Anwendung wird man also, anstatt den Hebel abzuwägen, und dessen Schwerpunct zu suchen, einfacher den Druck bestimmen, welchen der leere Hebel, wenn er in C eingehängt und horizontal gehalten wird, im Puncte A auf eine Wage (der im vorigen Beispiele zu $\frac{8}{9}$ Pfund wäre gefunden worden) ausübt, und diesen noch zu dem Aufhängpuncte P hinzu addiren.

§. 79. Zusammengesetzter Hebel. Werden zwei oder mehrere Hebel so mit einander verbunden, dafs die Kraft für den einen, als Last für den andern Hebel erscheint; so heifst eine solche Verbindung, die man gewöhnlich dann anbringt, wo ein einfacher Hebel zu lang seyn müfste — ein zusammengesetzter Hebel; dabei sind die Gesetze für das Gleichgewicht dieselben, wie für den einfachen Hebel, welche man nur wiederholt anwenden darf.

Ist bei dem zusammengesetzten Hebel in Fig. 61 $AC = a$, $BC = b$, $ac = a'$ und $bc = b'$, und wirkt am ersten Hebel im Puncte B die Last Q, und am zweiten in a die Kraft P; so ist, wenn die am ersten Hebel in A für das Gleichgewicht nöthige Kraft P' heifst:

am ersten Hebel $P' : Q = b : a$
„ zweiten „ $P : P' = b' : a'$

und durch Zusammensetzung $P : Q = bb' : aa'$,

also verhält sich bei dieser (auf Kraftersparung abgesehenen) Einrichtung die Kraft zur Last, wie das Product der kürzern, zu dem Producte der längern Hebelsarme, ein Satz, welcher sofort für jede beliebige Anzahl von in dieser Art mit einander verbundenen einfachen Hebeln seine Giltigkeit behält.

Ist z. B. im vorliegenden Falle $a = 10$, $b = 2$, $a' = 8$ und $b' = 1$, so ist $P : Q = 2 : 80 = 1 : 40$; es kann also eine Kraft von 1 Pfund einer Last von 40 Pfund das Gleichgewicht halten. Handelt es sich aber um wirkliche Bewegung, so mufs, wie leicht zu sehen, die Kraft schon einen Weg von z. B. 40 Zoll beschreiben, bis die Last einen Weg von 1 Zoll zurücklegt (analog mit der Bemerk. in §. 75 und 76).

Bei dem in Fig. 61, a dargestellten Wagenheber, welcher beim Schmieren der Radachsen zum Lüften der Räder gebraucht wird, und aus einem zusammengesetzten Hebel AD, DB besteht, wovon der erstere als Hebel der ersten Art seinen Drehungspunct in C, Angriffspunct der Kraft in A und der Last in D, der letztere, als Hebel der zweiten Art, seinen Stützpunct in B, Angriffspunct der Kraft in D und der Last in E hat (auf welchen Punct sich der Achsenstock des Wagens stützt), ist, wenn $\frac{DE}{DB} = \frac{1}{3}$ und $\frac{CD}{AC} = \frac{9}{60}$ ist, sofort $P : Q = 9 : 180 = 1 : 20$.

Es kann also, wenn die zu hebende Last etwa 4 Centner beträgt, ein Mensch mit einer Kraft von $\frac{400}{20} = 20$ Pfund, indem er den Hebel AD in A niederdrückt, diese Last bequem aufheben oder lüften.

Einige besondere Anwendungen des Hebels.

§. **80.** Von den unzähligen Anwendungen, welche der Hebel, wie wir bereits im §. 75 bemerkt haben, im practischen Leben findet, sollen noch einige der vorzüglichsten und wichtigsten in den nächstfolgenden Paragraphen in Kürze behandelt werden.

Die Krämerwage.

§. **81. Erklärung.** Die Krämerwage, mittelst welcher das Gewicht einer Waare durch ein gleich grofses Gegengewicht gefunden wird, besteht im Wesentlichen aus einem gleicharmigen Hebel AB (Fig. 62), dem Wagbalken, an dessen Endpuncten A und B die Schalen, wovon die eine zur Aufnahme der abzuwägenden Waare, und die andere zu jener der Gewichte bestimmt ist, aufgehängt sind, und welcher sonach in der halben Länge, d. i. in C unterstützt ist, oder hier seinen Drehungspunct hat. Senkrecht auf die Verbindungslinie AB wird an der halben Länge die Zunge angebracht, welche sich bei den Schwingungen des Wagbalkens in einer verticalen Ebene bewegt, und den horizontalen Stand des Balkens entweder an einem Gradbogen, oder wenn die Wage anstatt auf einem Stativ N in einer Schere aufgehängt wird, durch das Absehen daran anzeigt.

§. **82. Bedingungen, welche eine solche Wage erfüllen soll.** Man fordert von einer guten Krämerwage, erstens, dafs für gleiche Aufhänggewichte das Gleichgewicht bestehe; zweitens, dafs der Wagbalken dabei eine horizontale Lage annehme; drittens, dafs sich dieser Stand sogleich merklich ändere, wenn in die eine Schale ein kleines Gewicht zugelegt, also dadurch das Gleichgewicht gestört wird; und viertens, dafs die Wage im Stande des Gleichgewichtes ihre ursprüngliche horizontale Lage nach einigen Schwingungen wieder einnehme, wenn man sie daraus gebracht hat.

§. **83.** *Die* **erste** *Bedingung:* **Gleichheit der Gewichte,** fordert eine vollkommen gleiche Länge der beiden Arme des Balkens (die überdiefs auch noch genau symmetrisch seyn müssen);

denn ist W das eine Gewicht, z. B. jenes der Waare in S und P das andere oder Gegengewicht in S', ferner $AC = a$ und $BC = b$, so mufs für das Gleichgewicht $Wa = Pb$ Statt finden; soll nun $W = P$ werden, so mufs auch $a = b$ seyn.

Man prüft eine Wage auf diese Eigenschaft leicht durch Verwechslung der Gewichte W und P, indem man jetzt W in die Schale S', und P in jene S legt; sind die Arme gleich lang, so wird die Wage auch nach dieser Verwechslung einspielen, d. i. das Gleichgewicht anzeigen. Sind diese nicht gleich, so erhält man das wahre Gewicht der Waare W dadurch, dafs man dieselbe in die eine Schale, z. B. S legt, und diese gleichsam nur tarirt, indem man bis zur Herstellung des Gleichgewichts in die andere Schale S' beliebige Massen, wie Schrot u. dgl., legt. Hierauf nimmt man W aus S heraus, und legt dafür so lange bekannte Gewichte hinein, bis das Gleichgewicht abermals hergestellt ist; dieses letztere Gewicht gibt offenbar das genaue Gewicht der Waare an.

§. **84.** *Die* **zweite** *Bedingung:* **Horizontalstellung** *des Wagbalkens* im Stande des Gleichgewichtes, wird erreicht, wenn der Drehungspunct c (Fig. 63) über dem Schwerpuncte o der beiden Gewichte P und W (jenes der Schalen mit inbegriffen), nämlich über der Verbindungslinie AB, oder wenigstens über dem Schwerpuncte des Wagbalkens liegt; denn wird der Wagbalken aus seiner Gleichgewichts-, d. i. horizontalen Lage gebracht, so wirkt im ersten Falle das im Schwerpuncte o wirkende Gewicht $P + W$ mit dem Momente $(P + W)\, cn$ zur Zurückdrehung desselben, und er ruht nur dann, wenn co vertical, also AB horizontal steht. Dasselbe gilt auch, wenn zwar c in o, oder sogar noch unter diesem Puncte, dagegen aber der Schwerpunct des Wagbalkens noch tiefer liegt, und dessen Umdrehungsmoment überwiegend ist. (Wäre dagegen bei dieser Lage, wo nämlich o über c liegt, nicht das Moment des Balkens, sonders jenes von $P + W$ das gröfsere oder überwiegend, so würde der Wagbalken bei der geringsten Verrückung aus seiner jetzt labilen (§. 64) Gleichgewichtslage sogleich umschlagen.)

§. **85.** *Die* **dritte** *Bedingung:* **Empfindlichkeit** *der Wage*, wird erreicht, wenn erstens die Arme lang sind, zweitens das Gewicht des Wagbalkens gering ist (dabei mufs man ihm aber eine solche Form geben, dafs er nicht gebogen wird), drittens die aufgelegten Gewichte klein sind, viertens die Entfernung des Drehungspunctes von der Verbindungslinie AB klein, am besten gleich Null ist (in welchem

Falle der vorhin erwähnte dritte Punct keinen Einfluſs hat, und die Wage am empfindlichsten wird), und wenn fünftens auch die Entfernung des Schwerpunctes des Wagbalkens nur sehr wenig unter diesem Drehungspuncte liegt. (Dieser darf jedoch, wenn der Drehungspunct, wie es wünschenswerth ist, in der Geraden *AB* liegt, nicht auch zugleich in diese Linie hineinfallen, weil sonst das ganze System im Schwerpuncte aufgehängt, und dadurch die Bedingung in §. 84 nicht erfüllt wäre; eben so wenig darf er über dieser Linie liegen, weil der Wagbalken sonst umschlagen würde.)

§. 86. *Die* **vierte** *Bedingung:* **Beseitigung der Trägheit** *der Wage*, wird durch die möglichste Verminderung der Reibung am Zapfen *c* erreicht. Zu diesem Ende verfertigt man diesen aus Stahl, gibt ihm die Form einer Schneide, härtet diese und läſst sie abermals auf einer gehärteten Stahlplatte oder auch auf einem Edelsteine spielen; eine ähnliche Vorsicht gebraucht man auch bei den Aufhängepuncten der Schalen.

Vertauscht man bei einer sehr genau gearbeiteten, empfindlichen Wage die eine Schale mit einer kürzern, oft auch kleinern Schale, die unten mit einem Häkchen zur Aufnahme eines Platindrahtes oder Pferdehaares versehen ist; so hat man eine sogenannte hydrostatische Wage, welche sich besonders zur Bestimmung der specifischen Gewichte der Körper eignet.

§. 87. Die Schnellwage (römische Wage). Diese Wage besteht aus einem ungleicharmigen Hebel *AB* (Fig 64) der ersten Art, an dessen kürzern Arm ein Haken oder eine Schale zur Aufnahme der Waare *W*, auf dem längern Arm dagegen ein constantes Gewicht *P*, das Laufgewicht angebracht ist, welches durch bloſses Verschieben mit der Waare in's Gleichgewicht gesetzt wird; da also die Bestimmung des Gewichtes einer Waare nur durch ein geringeres oder weiteres Hinausschieben des Laufgewichtes bewirkt wird, so handelt es sich bei dieser Wage, welche in der Regel nur für gröſsere Lasten oder dort angewendet wird, wo nicht die gröſste Schärfe, sondern mehr ein schnelles Abwägen verlangt wird, vorzüglich um die Eintheilung des längern Armes *CA*.

§. 88. Eintheilung des Wagbalkens. Ist *O* der Schwerpunct des Wagbalkens, *G* dessen Gewicht, *G'* das Gewicht der Ketten und Wagschale, im Falle eine solche vorhanden (sonst wird der dafür angebrachte Haken zum Wagbalken gerechnet), und *P* das constante Laufgewicht; so ist, wenn dieses letztere auf den Punct m geschoben, mit der leeren Schale (oder sonst mit dem blofsen Haken) im Gleichgewichte steht, sofort (§. 77)

$$G'.BC = P.Cm + G.CO.$$

Wird jetzt in die Schale die Waare W gelegt, und zur Herstellung des Gleichgewichtes das Gewicht P nach M geschoben, so ist eben so

$$(W + G')\,BC = P.CM + G.CO;$$

wird von dieser Gleichung die vorige abgezogen, so entsteht

$$W.BC = P.mM \;.\;.\;.\;(1.$$

Mufs für die Waare W' das Laufgewicht nach M' geschoben werden, so ist eben so $W'.BC = P.mM'$, folglich $W : W' = mM : mM'$, d. i. die vom Anfangs- oder Nullpuncte m an gezählten Entfernungen des Laufgewichtes verhalten sich wie die Gewichte der Waaren.

Soll also z. B. die Theilung von Pfund zu Pfund vorgenommen werden, so theile man den kürzern Arm BC in eben so viele gleiche Theile, als das Laufgewicht P Pfunde enthält; sey diese Zahl $= n$ und $\frac{1}{n}\,BC = a$, oder $BC = na$, folglich aus der Gleichung (1 $W.na = n.1\,\text{Pf.} \times mM$, oder $mM = a\,\frac{W\text{Pf.}}{1\,\text{Pf.}} = a\,W$. Setzt man also, da von Pfund zu Pfund gewogen werden soll, W der Reihe nach $= 1, 2, 3\ldots$; so wird aus dieser Gleichung eben so $mM = 1a, 2a, 3a \ldots$, so, dafs man also nur, nachdem man BC in n gleiche Theile getheilt hat, einen solchen Theil auf den längern Arm von m aus so oft, als es angeht, gegen A zu auftragen, und diese Puncte, wenn m der Nullpunct ist, mit $1, 2, 3\ldots$ Pfunde bezeichnen darf. Ist die leere Schale (oder der Haken) nicht schwer genug, um mit dem Laufgewichte in m (was der nächste Punct an C seyn soll) im Gleichgewichte zu stehen, sondern mufs man dazu noch ein Gewicht von p Pfunden auflegen; so erhält der Punct m die Zahl p, die übrigen Theilungspuncte aber werden mit $p + 1, p + 2\ldots$ Pfunde bezeichnet. Halbirt man die Intervalle der Theilung, so erhält man halbe Pfunde u. s. w.

Wird für dasselbe Laufgewicht der Arm BC 2, 3... n Mal kürzer, so fallen auch die Theilungen a 2, 3... n Mal kleiner aus, und umgekehrt. Bei kleinern Wagen werden defshalb zwei gegenüber liegende Seiten des Wagbalkens (und zwar zwei diagonal gegenüber liegende Kanten) eingetheilt, und da man der Wage zwei Aufhängpuncte in der Art gibt, dafs der Arm BC für die eine Seite kürzer, als für die andere (gewöhnlich ist er nur $\frac{1}{4}$ so lang) ist, so sind auch die Intervalle der Theilung in demselben Verhältnifs kleiner, und es können davon mehr Theilstriche aufgetragen, also auch auf dieser Seite schwerere Lasten abgewogen werden, wefshalb man diese für gewöhnlich die schwere, die gegenüber liegende aber die leichte Seite nennt.

Bei den meisten dieser Wagen, bei welchen es sich überhaupt nur um die nächsten Grenzen (die z. B. um 1 oder $\frac{1}{2}$ Pfund aus einander liegen können) handelt, zwischen welche das Gewicht der Waare fällt, legt man den Drehungspunct nicht über, sondern etwas unter den Schwerpunct des Ganzen, wodurch also nur ein labiles Gleichgewicht eintreten kann, und ein Umschlagen des Wagbalkens nach der einen oder andern Seite vorherrschend, und dadurch eben die eine oder andere dieser beiden Grenzen angezeigt wird.

Soll dagegen diese Wage, wie die Krämerwage, im Stande des Gleichgewichtes ruhig einspielen — was aber eine längere Abwägungszeit erfordert — und diese bei einem geringen Hinausschieben des Laufgewichtes schon einen bedeutenden Ausschlag geben: so müssen im Wesentlichen dieselben Bedingungen vorhanden seyn, wie sie vorhin für die Krämerwage angegeben wurden.

§. 89. Die Zeigerwage. Zu den Wagen, welche sich auf den einfachen Hebel gründen, gehört besonders noch die Zeigerwage, bei welcher das Gewicht der Waare unmittelbar an einer kreisförmigen Scala BED (Fig. 65) durch einen Zeiger E des Hebels AC, an dessen anderm Ende A sich eine Schale S oder ein hakenförmiges Gehänge befindet, angegeben wird.

Nimmt man für die Rechnung eine gerade Scala in einer Verticallinie BN an, und sind darauf N der Nullpunct, d. h. die Stelle des Zeigers für die leere Wagschale, dagegen a und a' die den Gewichten der Waaren W und W' entsprechenden Theilstriche; so findet man, dafs

$$Na : Na' = W : W' \text{ sey.}$$

Hat man also diese verticale Scala nach gewissen gegebenen Bedingungen bezüglich des Umfanges und der Genauigkeit der zu construirenden Wage bestimmt (wofür die Rechnung einfacher als für die Kreisscala wird), so kann man durch Verbindung dieser Puncte $a, a' \ldots$ mit dem Drehungspuncte C, welcher zugleich den Mittelpunct des Kreisbogens BED bildet, darauf die entsprechenden Theilstriche abschneiden und gehörig bezeichnen.

Am einfachsten und sichersten wird diese Scala auf dem Kreisbogen auf empirischem Wege zu Stande gebracht, indem man in die Schale nach und nach bekannte Gewichte legt, und dabei den jedesmaligen Stand des Zeigers markirt; beim Gebrauche mufs jedoch die Wage wieder genau so (was durch ein Senkblei angezeigt wird) gestellt werden, wie sie bei der Eintheilung der Scala stand.

Eine häufige und besondere Anwendung finden diese Wagen in den Spinnfabriken, beim Sortiren der Wollen- und Baumwollgarne, wo sie sogleich die Nummer der Feinheit anstatt dem Gewichte angeben, und dann Garn- oder Sortirwagen heifsen.

Auch die Federwagen, welche sich auf die Elasticität einer Stahlfeder gründen, und wovon in Fig. 65 *a* eine nach unserer Angabe dargestellt ist, gehören unter die Zeigerwagen.

§. 90. Die tragbare Brücken- oder Decimalwage. Diese in neuerer Zeit immer mehr zur Anwendung kommende Wage, bei welcher das Gewicht der Waare durch ein kleineres, gewöhnlich nur den zehnten Theil betragendes Gegengewicht (verjüngtes Gewicht) bestimmt wird, beruht auf den Gesetzen des zusammengesetzten Hebels, indem dabei mehrere Hebel, und zwar erstens der um C (Fig. 66) drehbare ungleicharmige Hebel (Schwanenhals) AB, an dessen längern Arm in A die Schale S zur Aufnahme der Gewichte, und an dem kürzern Arme zwei verticale Zugstangen Dd, Ba beweglich eingehängt sind; zweitens der um c drehbare einarmige Hebel (die Gabel) ac, dessen Endpunct a in die Stange Ba eingehängt ist, so wie endlich eine Brücke db zur Aufnahme der Waare W in Verbindung gebracht sind, wobei die Brücke von oben gesehen ein gleichschenkliches Dreieck bildet, dessen Spitze in d in die Zugstange Dd eingehängt ist, deren Basis dagegen mit zwei Schneiden f, f' (Fig. 66, a) auf den Hebel ac, der eigentlich auch nur die Seite eines ähnlichen Dreieckes acc', so wie der Punct c den Endpunct einer der beiden Schneiden c, c' bildet, aufliegt, in der Rechnung aber eben so, wie bd als ein einfacher Hebel angesehen werden kann. Zur Verminderung der Reibung sind alle Stütz- oder Drehungsachsen in Form von Schneiden aus gehärtetem Stahl verfertigt, und liegen auf flachen (nach einer Richtung beweglichen) gehärteten Stahlplatten auf.

Die Theorie dieser für den Handelsstand so wichtigen und bequemen Wage beruht in Folgendem:

Ist O (Fig. 66) der Schwerpunct der Brücke, und G ihr Gewicht, ferner o der Schwerpunct der Waare und W ihr Gewicht, so vertheilt sich das Gewicht G auf die beiden Puncte d und b in der Art, dafs (§. 76, Aufgabe 3, Gl. 3 u. 3′) auf d der Theil $x = G\,\dfrac{Ob}{bd}$ und auf b jener $x' = G\,\dfrac{Od}{bd}$ kommt; eben so kommt von der Waare W auf den erstern Punct d der Antheil $y = W\,\dfrac{ob}{bd}$, und auf den letztern jener $y' = W\,\dfrac{od}{bd}$.

Da nun auf dem Punct f die Last $x' + y'$ ruht, so wird der Punct a, also auch jener B mit einer Kraft von $(x' + y')\,\frac{cf}{ac}$, ferner der Punct d, also auch D mit einer Kraft $= x + y$ herabgezogen. Mufs daher zur Herstellung des Gleichgewichtes in die Schale S das Gewicht P gelegt werden, so ist für das Gleichgewicht am Hebel AB, wenn G' das Gewicht der Schale ist, sofort

$$(P + G')\,AC = (x + y)\,CD + (x' + y')\,\frac{cf}{ac}\,CB.$$

Bestimmt man das Verhältnifs der Hebelsarme der beiden Hebel AB und ac auf eine solche Art, dafs $CD : CB = cf : ca \ldots$ (1 Statt findet, so wird $\frac{cf}{ac}\,CB = CD$, wodurch die vorige Gleichung vereinfacht wird, und in $(P + G')\,AC = (x + x' + y + y')\,CD$, oder, wenn man für x, x', y, y' die obigen Werthe setzt, in

$$(P + G')\,AC = (G + W)\,CD \text{ übergeht.}$$

Wird bei der Construction der Wage das Gewicht der Hebeln und Brücke so ausgeglichen, dafs diese mit der leeren Wagschale im Gleichgewichte stehen, so wird (in der vorigen Gleichung P und $W = o$ gesetzt) 2)... $G'.AC = G.CD$, und wenn man diese Gleichung von der vorigen abzieht, endlich $P.AC = W.CD \ldots I$, woraus $P : W = CD : AC$ folgt. Soll nun, wie es bei diesen Wagen gewöhnlich ist, $P = \frac{1}{10}W$ seyn, so mufs auch $CD = \frac{1}{10}AC$ seyn. Von den beiden Bedingungsgleichungen 1) und 2), welche die Construction erfüllen mufs, ist die erstere um so wichtiger, weil von ihrer Erfüllung der wesentliche Umstand abhängt, dafs der Punct der Brücke, auf welchen die Waare gelegt wird, bei der Abwägung keinen Einflufs hat, die Waare also wo immer auf die Brücke hin gelegt werden kann.

§. 91. Die Strafsen- oder Mauthwage. So wie die tragbare Brückenwage in der Regel eine im Verhältnifs von $\frac{1}{10}$ verjüngte Wage ist, so werden die zum Abwägen ganzer Wägen mit ihren Ladungen, deren Construction auf einer ähnlichen, nur noch wirksameren Hebelverbindung beruht, gewöhnlich im Verhältnifs von $\frac{1}{100}$ verjüngt, so dafs 1 Pfund Gewicht den Werth von einem Centner hat.

Eine der besten Einrichtungen ist nach Schwilgue's Construction in Fig. 67 dargestellt. In dieser sind zwei gleichschenklige Dreiecke oder Gabelhebel EFF in der Art, wie bei der vorigen Wage nur einer vorkommt, jedoch in gröfsern Dimensionen (Ef hat nahe 6 Fufs und die Breite beträgt $4\frac{3}{4}$ Fufs) vorhanden, welche sich um die Schneiden oder dreiseitigen Prismen a, a, a, a auf beweglichen ebenen Platten drehen, auf den vier Schneiden c die Brücke N tragen, und sich in E mit der verticalen Zugstange oder dem Zaume vereinigen, welcher in den um

O drehbaren horizontalen Communicationshebel *DO* bei *J* eingehängt ist. Der Endpunct *D* dieses Hebels steht mittelst der verticalen Zugstange *BD* mit dem Endpuncte *B* des um *C* drehbaren Wagbalkens („Schwanenhalses“) *AB* in Verbindung, an dessen Endpunct *A* wieder die Wagschale *S* eingehängt ist.

Sobald sich nun die Waare *W* auf der Brücke *N* befindet, nehmen die Endpuncte *E* der Gabelhebel eine Bewegung nach abwärts an, wodurch der Endpunct *D* des Hebels *OD*, also auch die Zugstange *BD* mit dem Puncte *B* des Balkens *AB* nach abwärts, folglich der Punct *A* mit der Schale *S* nach aufwärts gezogen, und sofort durch aufgelegte Gewichte mit der Waare in's Gleichgewicht gebracht werden kann.

Da jedoch die acht Messerschneiden *a* und *c* beim Auffahren eines abzuwägenden Wagens durch die Erschütterung Schaden leiden würden, so ruht die Brücke anfangs, und zwar dadurch, dafs das Lager der Messerschneide *C*, welches in einem Gestelle *L* angebracht ist, das sich in dem Windenstocke *Z* vertical auf- und abschieben läfst, ganz herabgelassen ist, in den vier Ecken auf vier kegelförmigen gufseisernen Stützen *m* auf, und die Wage wird erst dann, durch Aufwinden des Trägers *L* (mittelst zweier Kegelräder, welche eine Schraubenspindel umdrehen) bis auf eine bestimmte Höhe, die sich von selbst markirt, wodurch der Hebel *AB*, der Punct *D*, also auch jener *E*, so wie endlich die vier Schneiden *c* in die Höhe steigen, und letztere die Brücke von unten fassen und heben, gelüftet, und zum Abwägen vorgerichtet. Ist dieses vorüber, so wird die Brücke wieder auf die vier Stützen *m* niedergelassen, und erst dann die Waare von der Brücke weggenommen.

Die Hebelverhältnisse bei dieser Brückenwage anlangend, so ist $\frac{gf}{Ef} = \frac{1}{10}$, $\frac{JO}{DO} = \frac{1}{5}$, und $\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$, folglich hat man, wenn die Wage so construirt worden, dafs die leere Brücke *N* mit der leeren Wagschale *S* im Gleichgewichte steht (was dabei immer beobachtet wird), sofort $\frac{P}{W} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{100}$, so, dafs also ein in die Schale *S* gelegtes Gewicht von 1 Pfund mit einer auf der Brücke *N* liegenden Waare von 1 Centner im Gleichgewichte steht.

Hebladen.

§. 92. Die deutsche und französische Heblade. Soll eine Last mittelst des Hebels, unter Ersparung an Kraft (also Verlust an Geschwindigkeit) auf eine etwas bedeutendere Höhe gehoben werden, als es durch eine einmalige Bewegung des Hebels möglich ist, wie z. B. um einen gefällten Baum auf einen Wagen zu bringen; so mufs man, da der Weg der Last am Hebel unter dieser Bedingung nur sehr klein ist, den Stütz- oder Drehungspunct desselben selbst nach und nach höher bringen. Diefs geschieht bei der deutschen Heblade, welche (Fig. 68) aus zwei Pfosten *mm* besteht, die durch zwischen gelegte Backen *n*, *n* um einige Zolle von einander abstehen, um eine Culisse zur Aufnahme des Hebels *AB* zu bilden, und mit zwei Reihen von Löchern versehen sind, dadurch, dafs man den doppelarmigen Hebel, an dessen Endpuncten *A* und *B* die Kraft *P* und Last *Q* wirken, aus der Lage *AB*, in welcher er auf einem durch *a* gesteckten eisernen Bolzen ruht, in die Lage $A'D$ bringt, den zweiten Bolzen aus *b* um ein Loch höher, nämlich nach b' steckt, und darauf den Hebel niederdrückend, bis er die Lage $A''E$ annimmt, die Last um die Höhe *DE* hebt, hierauf auch den Bolzen *a* in das nächst höhere Loch a' steckt, und in dieser Art so lange fortfährt, bis die Last *Q* auf die verlangte Höhe, die niemals bedeutend seyn kann, gehoben ist.

Bei der französischen Heblade (Fig. 69), welche aus einer starken eisernen, auf einem soliden Kreuzfufs aufrecht stehenden Stange besteht, die an zwei Seiten mit sägartigen Einschnitten versehen ist, legen sich von den beiden, mit dem Hebel verbundenen eisernen Biegeln *a*, a', welche diesem als Stützpuncte dienen, durch das Auf- und Abwiegen des Hebels immer einer nach dem andern in diese Zahnlücken, und zwar immer um einen Zahn höher ein, so, dafs dadurch das bei der deutschen Heblade nothwendige Höherstecken des Bolzens erspart wird.

Sowohl die Löcher bei der erstern, als die sägförmigen Zähne bei der letztern Heblade müssen eine, der Länge des Hebels und der Bewegung des menschlichen Arms beim Auf- und Abwiegen des Hebels entsprechende Entfernung von einander haben, die man am sichersten und einfachsten durch eine wirkliche Construction findet.

§. 93. Die schwedische Heblade. Noch wirksamer, dafür aber auch für noch kleinere Bewegungen der Last bestimmt, ist die aus einem zusammengesetzten Hebel bestehende schwedische Heblade, deren Einrichtung leicht aus der Zeichnung in Fig. 70 zu ersehen ist.

Um die Wirksamkeit dieser Hebvorrichtung beim Ausziehen der Baumstöcke mit den Wurzeln zu zeigen, sey *AC* der auf dem Stock aufliegende, und in B damit mittelst einer Kette oder eines Seiles verbundene Hebel, dessen vorderes Ende A auf den durch die Heblade gehenden, und wie bei der deutschen Heblade abwechselnd auf einen der beiden Bolzen, die nach und nach in die beiden Löcherreihen immer um ein Loch höher gesteckt werden, ruhenden Hebel DE, an welchen in D und E die Kraft wirkt, aufliegt. Wird nun der Hebel AC im Puncte A mit einer Kraft P aufwärts bewegt, so bildet C den Stütz- und B den Angriffspunct der Last oder des Widerstandes Q, und es ist $P = Q \frac{BC}{AC}$. Diese Kraft P bildet aber für den zweiten Hebel DE, welcher bei seiner jetzigen Lage auf dem Bolzen b aufliegen, und an welchen in D sowohl, als in E eine Kraft K, erstere auf-, letzere abwärts wirkend angebracht seyn soll, die Last, folglich ist $P . \frac{1}{2} ab = K . Db + K . Eb = K(Db + Eb) = K . DE$, oder für P substituirt: $Q \cdot \frac{1}{2} ab \frac{BC}{AC} = K . DE$, woraus

$$K : Q = \tfrac{1}{2} ab . BC = DE . AC \text{ folgt,}$$

welche Proportion auch für die folgenden Lagen des Hebels DE gilt.

Ist z. B. $AC = 10$, $BC = 2$, $DE = 8$ und $\frac{1}{2} ab = \frac{1}{3}$ Fufs, so ist

$$K : Q = \tfrac{1}{3} . 2 : 8 . 10 = \tfrac{2}{3} : 80 = 1 : 120.$$

Wäre also $K = 30$ Pfund, so könnte durch diese Hebvorrichtung ein Widerstand $Q = 3600$ Pf. $= 36$ Centner, und zwar von zwei Menschen leicht überwunden werden. Um jedoch diesen Widerstand auch nur um Einen Zoll zu heben, müssen die beiden Angriffspuncte D, E zusammen schon einen Weg aufwärts von 120 Zoll oder 10 Fufs zurücklegen.

Die Rolle.

§. 94. Feste und bewegliche Rolle. Unter einer Rolle versteht man eine kreisrunde Scheibe m (Fig. 71), welche an ihrem Umfange zur Aufnahme einer Schnur oder Kette mit einer Hohlkehle, dem sogenannten Schnurlauf, und im Mittelpuncte (eigentlich der Achse) mit einem runden, gewöhnlich eisernen oder stählernen Zapfen versehen ist, welcher ihre Umdrehungsachse bildet. Diese Achse ist entweder an der Scheibe befestigt, und wird in eine Schere oder einen Bügel a in runde Löcher als Zapfenlager eingelegt, oder es ist umgekehrt dieser cylinderische, die Achse bildende Bolzen in den Bügel befestigt, und es dreht sich die Scheibe, welche in ihrem Centrum kreisrund nach der Dicke des Bolzens ausgebohrt ist, um diesen Zapfen oder Bolzen. Der genannte Bügel a erhält die Form eines Hakens, und dieser wird entweder, wie in 1. oberhalb an einem Balken befestigt, oder er dient wie in 2. zur Aufnahme der Last Q, in welchem Falle dann das eine Ende A des Seils oberhalb befestigt, durch das Anziehen des andern Endes, woran die Kraft P wirkt, die Rolle sammt der Last gehoben wird; im erstern Falle wird die Rolle eine feste, im letztern eine bewegliche genannt.

§. 95. Gleichgewichtsbedingung bei der festen Rolle. Wirken an der um C drehbaren Rolle vom Halbmesser $CA = CB = r$ (Fig. 72) nach den Tangenten AP, BQ die Kräfte P und Q, oder die Kraft P und Last Q, so verlängere man ihre Richtungen bis sie sich schneiden; ist D der Durchschnittspunct, so mufs für das Gleichgewicht die Resultirende aus P und Q nothwendig durch den festen Punct C gehen. Zieht man die Halbmesser CA und CB, so kann man das Ganze als einen um C drehbaren Winkelhebel ACB ansehen, an welchen in A und B die Kräfte P und Q nach den gegebenen Richtungen wirken, also ist für's Gleichgewicht (§. 75) $P \,.\, AC = Q \,.\, BC$, mithin wegen $AC = BC$, sofort auch $P = Q$, d. h. die Kraft gleich der Last.

Um den Druck p auf den Zapfen zu bestimmen, mufs man die Resultirende R aus den beiden Kräften P und Q suchen.

Schneidet man also von D aus die gleichen Stücke Dn und Dm auf den Richtungen der Kräfte ab und construirt das Parallelogramm mn, so ist $Da = R$, wenn $Dn = Dm$ die gleichen Kräfte P und Q darstellen; da aber die Dreiecke Dan und ABC (indem ihre Seiten auf einander senkrecht stehen) ähnlich sind, also $Dn : Da = BC : AB$, d. i. $P : R = r : AB$ ist, so ist auch, wenn man die Sehne $AB = a$ setzt, der gesuchte Druck auf den Zapfen R oder

$$p = \frac{a}{r} P \;.\;.\;. (1.$$

Für $a = 2r$ sind die Kräfte P und Q parallel, und der Druck p am gröfsten, und zwar $p = 2P = P + Q$, wie am gleicharmigen Hebel, auf welchen die Kräfte senkrecht wirken.

§. 96. Gleichgewicht an der beweglichen Rolle. Ist das eine Ende E der Schnur, welche von der Rolle C (Fig. 73) den Bogen BaA umfafst, befestigt, und wirkt am andern Ende nach der Richtung der Tangente AP die Kraft P, während an dem Zapfen C mittelst des Bügels a (Fig. 71, a) die Last (das Gewicht der Rolle mit inbegriffen) Q lothrecht wirkt; so kann man sich, da die Spannung in E der Kraft P gleich seyn mufs, diese Spannung durch eine eben so grofse, in der Richtung BE wirkende Kraft ersetzt denken, dadurch entstehen aber dieselben Bedingungen, wie bei der festen Rolle, so, dafs also die Resultirende aus diesen beiden Kräften in die

Richtung DC fallen, und der Last Q gleich seyn mufs. Ist nämlich wieder $CA = r$ und $AB = a$, so ist $P : Q = r : a$ . . . (2, also die Kraft zur Last, wie der Halbmesser zu der Sehne des vom Seil umspannten Bogens.

Für $a = r$ (wofür W. $ACB = 60^0$) ist $P = Q$. Für $a > r$ ist auch $Q > P$, und für $a = 2r$ am gröfsten, nämlich $Q = 2P$, so, dafs also, wenn die Schnüre parallel sind, die Kraft P am vortheilhaftesten wirkt.

Dieser letztere Fall, in welchem $P = \frac{1}{2}Q$ ist, erklärt sich auch schon dadurch, dafs von den beiden parallelen Schnüren jede die halbe Last zu tragen hat, weil sie sonst nicht gleich gespannt seyn könnten.

Anmerkung. Was die Anwendung der Rollen betrifft, so benützt man die feste Rolle überall dort, wo man die Richtung der Kraft ohne ihre Gröfse verändern will. Soll z. B. eine Last aus einem Brunnen oder Schacht mittelst Pferden heraufgezogen werden, so verwandelt man durch eine solche Rolle die verticale Richtung des Zugseils in eine horizontale.

Die bewegliche Rolle m (Fig. 74), welche gewöhnlich noch mit einer festen Rolle n verbunden wird, dient, um eine Last Q mit der halben Kraft P zu heben. Tritt aber wirkliche Bewegung ein, so fällt, wie leicht zu sehen, der Weg der Kraft P doppelt so grofs, als jener der Last Q aus, so, dafs auch hier wieder an Geschwindigkeit verloren geht, was an Kraft gewonnen wird.

§. 97. Gleichgewicht an einem Rollensysteme. Man verbindet oft (auf ähnliche Weise, wie beim zusammengesetzten Hebel) mehrere bewegliche Rollen so mit einander, dafs die Kraft für die eine zur Last der andern wird, wie z. B. in Fig. 75 in der Combination 1 von drei beweglichen und einer festen Rolle. Sind die Halbmesser der Rollen $m, m' \ldots$ der Reihe nach r, r', r'', und die Sehnen der von den Schnüren umfafsten Bögen eben so a, a', a''; so ist die an der ersten Rolle m nöthige Kraft p für das Gleichgewicht (§. 96), wenn man das Gewicht der Rolle gegen die Last Q als unbedeutend auslassen darf (oder dieses schon unter Q versteht) $p = \frac{r}{a} Q$. Für die zweite Rolle erscheint p als Last, und es ist die nöthige Kraft eben so $p' = \frac{pr'}{a'} = \frac{r}{a} \cdot \frac{r'}{a'} Q$. Eben so ist für die dritte Rolle

$$p'' = p' \frac{r''}{a''} = \frac{r}{a} \cdot \frac{r'}{a'} \cdot \frac{r''}{a''} Q;$$

und da endlich durch die feste Rolle n (§. 95) blofs die Richtung der Kraft verändert wird, also $P = p''$ ist, so hat man $\frac{P}{Q} = \frac{rr'r''}{aa'a''}$, oder in einer andern Form $P : Q = r r' r'' : a a' a'' \ldots$ (1, und da diese Relation für jede beliebige Anzahl von beweglichen Rollen gilt, so verhält sich in einem solchen Systeme im Stande des Gleichgewichtes die Kraft zur Last, wie das Product aus den Halbmessern der beweglichen Rollen zu dem Producte aus den Sehnen der von den Schnüren umspannten Bögen dieser Rollen.

Laufen die Schnüre wie in Fig. 75, 2. mit einander parallel, so gehen die Sehnen in die Durchmesser über, und es tritt dann die gröſste Kraftersparung ein, indem man aus Gl. (1 hat $P : Q = 1 : 2 . 2 . 2$, oder für n bewegliche Rollen:

$$P : Q = 1 : 2^n, \text{ oder } P = \frac{1}{2^n} Q \ldots (2.$$

Für drei bewegliche Rollen ist also $P = \frac{1}{8} Q$, für vier Rollen $P = \frac{1}{16} Q$ u. s. w.

Sollen in diesem letztern Falle auch die Gewichte der beweglichen Rollen berücksichtigt werden, so sey G das Gewicht einer jeden einzelnen Rolle, folglich für die erste Rolle $p = \frac{1}{2}(Q + G)$, für die zweite Rolle

$$p' = \tfrac{1}{2}(p + G) = \tfrac{1}{4} Q + \tfrac{1}{4} G + \tfrac{1}{2} G = \tfrac{1}{4} Q + \tfrac{3}{4} G,$$

für die dritte Rolle

$$p'' = \tfrac{1}{2}(p' + G) = \tfrac{1}{8} Q + \tfrac{7}{8} G,$$

also für drei bewegliche Rollen, wegen $p'' = P$ sofort:

$$P = \frac{1}{2^3} Q + \frac{2^3 - 1}{2^3} G = \frac{1}{2^3} [Q + (2^3 - 1) G],$$

und eben so für n bewegliche Rollen

$$P = \frac{1}{2^n} [Q + (2^n - 1) G] \ldots (3,$$

$$\text{oder auch } P = \frac{Q - G}{2^n} + G \ldots (3'.$$

Ist z. B. $Q = 500$ Pfund und $G = 5$ Pfund, ferner $n = 5$; so ist $P = \frac{500 - 5}{32} + 5 = 20{\cdot}47$, d. i. nahe $20\frac{1}{2}$ Pfund.

Weiter unten werden wir sehen, daſs diese Kraft zur wirklichen Bewegung noch nicht hinreichend wäre, weil auch noch die Reibungen an den Zapfen der sämmtlichen Rollen und der Widerstand überwunden werden muſs, welchen die Schnüre wegen ihrer unvollkommenen Biegsamkeit darbieten. Auch findet man, daſs, wenn S und s die gleichzeitig von P und Q zurückgelegten Wege sind, sofort $S = 2^n s$ oder $S : s = Q' : P$ ist, wenn man die Gesammtlast, d. i. den eingeklammerten Theil in der Gleich. (3 mit Q' bezeichnet.

§. 98. Gleichgewicht am Flaschenzuge. Werden zwei oder mehrere Rollen in einem Gehäuse oder Kloben angebracht, so heifst man eine solche Verbindung (von ihrer Form) eine F l a s c h e. Werden dagegen zwei solche Flaschen durch ein einziges fortlaufendes Seil so mit einander verbunden, dafs das Seil oder die Schnur immer abwechselnd von der Rolle der einen über die Rolle der andern geht, so nennt man eine solche Verbindung einen F l a s c h e n z u g; dabei wird die obere Flasche gewöhnlich an einem Balken befestigt, wodurch die in ihr enthaltenen Rollen ein System von f e s t e n, die untere Flasche dagegen, an welcher die Last aufgehängt wird, ein System b e w e g l i c h e r Rollen bildet.

Bei allen den in Fig. 76 dargestellten Flaschenzügen wird die ganze Schnur in eine gewisse Anzahl gleich tragender Schnüre getheilt, weil das Gleichgewicht bei dieser Anordnung nur dann bestehen kann, wenn die Spannung der Schnüre durchaus dieselbe ist. In 1 sind also 2, in 2 sind 3 und in 3 sind 6 tragende Schnüre vorhanden, mithin ist in diesen Fällen ganz einfach beziehungsweise, wenn unter Q die gesammte Last, mit Einschlufs des Gewichtes der beweglichen Flasche verstanden wird, $P = \frac{1}{2} Q$, $P = \frac{1}{3} Q$ und $P = \frac{1}{6} Q$. Sind allgemein n tragende Schnüre, also bei dieser Anordnung auch eben so viele Rollen vorhanden, so ist $P = \frac{1}{n} Q$, oder $P : Q = 1 : n$ . . . (1, d. h. b e i e i n e m F l a s c h e n z u g e v e r h ä l t s i c h d i e K r a f t z u r L a s t, w i e d i e E i n h e i t z u r A n z a h l d e r R o l l e n o d e r t r a g e n d e n S c h n ü r e. (Die Schnur, woran die Kraft wirkt, kommt dabei nicht in Betracht, weil sie blofs die R i c h t u n g der Kraft ändert.)

Von dieser Flaschenform abweichend gibt es noch eine Menge Verbindungen von festen und beweglichen Rollen, die auf demselben Princip der gleichtragenden Schnüre beruhen, und immerhin noch Flaschenzüge genannt werden. So ist in Fig. 77 eine solche Verbindung dargestellt, bei welcher sich die Rollen in jedem der beiden Kloben nicht unter, sondern neben einander befinden, und sich in jedem derselben um eine gemeinschaftliche Achse drehen. Da dabei sechs tragende Schnüre angezeigt sind, so ist auch $P = \frac{1}{6} Q$. In Fig. 78 drehen sich ebenfalls sowohl die festen, als beweglichen Rollen, welche ungleiche Gröfse haben, und concentrisch auf einander befestigt sind, jedes System um eine gemeinschaftliche Achse; auch hier sind sechs tragende Schnüre angenommen, also ist für dieses Beispiel wieder $P = \frac{1}{6} Q$. In den in Fig. 79 und Fig. 80 dargestellten Combinationen ist, wie man leicht findet, bei der erstern $P = \frac{1}{7} Q$ (wegen $Q = x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} x = \frac{7}{4} x$ und $P = \frac{1}{4} x$), und bei der letztern $P = \frac{1}{14} Q$.

Wir können endlich wieder bemerken, daſs, wenn wirkliche Bewegung eintritt, und die Last Q z. B. um 1 Fuſs gehoben werden soll, dabei die Kraft P in den Anordnungen von 1, 2, 3, Fig. 76, beziehungsweise einen Weg von 2 Fuſs (weil jedes der beiden tragenden Seilstücke um 1, also beide zusammen um 2 Fuſs verkürzt werden müssen, was den Weg der Kraft P gibt), 3 Fuſs und 6 Fuſs zurücklegen, so, daſs durch den Weg ersetzt werden muſs, was an Kraft gewonnen werden soll, oder wieder, wie schon öfter bemerkt, an Geschwindigkeit eben so viel verloren geht, als an Kraft gewonnen wird. Dieselbe Bemerkung gilt, wie leicht zu sehen, auch für die übrigen in den Figuren 77 bis 80 dargestellten Combination, so, daſs wenn allgemein S und s die von P und Q gleichzeitig zurückgelegten Wege sind, sofort $S : s = Q : P$ Statt findet.

Beispiel. Um die Anzahl der Rollen bei einem Flaschenzuge zu finden, mittelst welchem eine Kraft von 50, mit einer Last von 400 Pfund im Gleichgewichte steht, ist $Q = nP$, und daraus $n = \frac{Q}{P} = \frac{400}{50} = 8$ Rollen. Zur Einleitung und Unterhaltung der Bewegung muſs diese Zahl, wie weiter unten gefunden wird, wegen den zu überwindenden Nebenhindernissen noch vergröſsert werden.

Das Rad an der Welle.

§. 99. Erklärung. Unter dem Rade an der Welle versteht man einen horizontal liegenden Cylinder oder eine Welle B (Fig. 81), welche sich um zwei an den Enden, in der Richtung ihrer Achse angebrachten Zapfen s, s, die gewöhnlich aus Eisen bestehen, und in dem sogenannten Zapfenlager e, e ruhen, wie um ihre eigene Achse umdrehen läſst, und zugleich mit einer kreisrunden Scheibe oder einem Rade b concentrisch und darauf senkrecht verbunden ist. Die Kraft wirkt dabei am Umfange des Rades nach der Tangente, während die Last gewöhnlich an einem Seile hängt, welches sich um die Welle aufwickelt.

Diese Maschine erscheint, ohne in ihren Gleichgewichtsbedingungen eine Aenderung zu erleiden, unter verschiedenen Formen in der Anwendung, und zwar als Hornhaspel (Fig. 82), Kreuzhaspel (Fig. 83), Spillenrad (Fig. 84) und Tummelbaum (Fig. 85), wobei die Welle aufrecht oder vertical steht.

§. 100. Gleichgewichtsbedingung für das Rad an der Welle. Vermöge der Steifheit der Welle und ihrer festen Verbindung mit dem Rade ist es gleichgiltig, in welchem Puncte B (Fig. 81, 1) ihrer Länge die Last Q hängt, so, daſs man diese für die Rechnung auch eben so gut in b, nämlich in der Radebene selbst annehmen kann, wodurch die in 2 dargestellte Wirkungsart zwischen der Kraft P und der Last Q, welche beide nach den Tangenten der in derselben Ebene liegenden concentrischen Kreisen BE und AF wirken. Setzt man den Halbmesser der Welle $BC = r$, und jenen des Rades $AC = R$; so erscheint BCA als ein Winkelhebel, an dessen Armen r und R die Kräfte P und Q senkrecht wirken, so, daſs also für das Gleichgewicht $P : Q = r : R$ . . . (1 Statt findet; am Rade an der Welle verhält sich also die Kraft zur Last, wie der Halbmesser der Welle zum Halbmesser des Rades.

Um den Druck und dessen Richtung auf die Zapfen der Welle zu finden, ziehe man durch C parallel mit den Richtungen von P und Q die Linien Ca, Cb, und schneide diese in a und b den Kräften P und Q proportional ab (wobei unter Q auch das Gewicht der Welle und des Rades mit begriffen seyn soll), so stellt die Diagonale Cd des daraus construirten Parallelogramms ab sowohl die Gröſse als Richtung dieses Druckes dar, welchen die beiden Zapfen zusammen auszuhalten haben.

Man kann die obige Bedingung für das Gleichgewicht auch noch, ohne den Angriffspunct der Last unmittelbar in die Ebene des Rades zu verstetzen, auf folgende Weise in Fig. 86 ableiten:

Denkt man sich durch die Welle im Aufhängpuncte B der Last, einen senkrechten oder normalen Querschnitt, und darin an dem Berührungspuncte B der Schnur den Halbmesser cB gezogen, welcher also horizontal liegt, und damit in der Radebene parallel, aber nach entgegengesetzter Richtung den Halbmesser Cb geführt, und in b auf Cb senkrecht, also hier in lothrehter Richtung zwei gleiche Kräfte Q', Q'', jede $= Q$ nach entgegengesetzten Richtungen angebracht (wodurch das Gleichgewicht zwischen P und Q nicht gestört wird); so wirken an den Endpuncten der Geraden Bb zwei parallele Kräfte Q und Q' $(= Q)$, deren Resultirende eine durch den Halbirungspunct D (welcher wegen Gleichheit der Dreiecke Bcd und bCD in die Achse der Welle fällt) gehende lothrechte Kraft $= 2\,Q$ ist, aber nichts weiter als einen Druck auf die Zapfen bewirkt, und von diesen aufgehoben wird. Dagegen hat man für die beiden noch übrigen Kräfte P und Q'', welche in der Ebene des Rades in den Entfernungen Cb und CA vom Drehungspuncte C wirken, für das Gleichgewicht $Q''.\,Cb = P.\,CA$, d. i. $Qr = PR$, wie zuvor.

Soll die Last um die Höhe s gehoben werden, so muſs die Kraft einen Weg von $S = \frac{R}{r}s$ zurücklegen, so, daſs mit Rücksicht auf die vorige Gleichung sofort $S : s = Q : P$, also auch hier wieder der mehr erwähnte Satz von dem Verluste an Geschwindigkeit, wenn an Kraft gewonnen wird, bestätigt ist.

§. 101. Winden oder stehende Haspel. Liegt beim Rad an der Welle diese letztere nicht horizontal, sondern hat sie eine verticale Stellung; so heifst eine solche Maschine gewöhnlich eine Winde oder ein stehender Haspel, und dient auch in dieser Form zum Aufziehen von Lasten aus einer Tiefe oder auf eine Höhe. In der in Fig. 85 dargestellten Form, in welcher diese Winde gewöhnlich zum Aufziehen von Werkstücken und Baumaterialien auf Gebäude benützt wird, und wobei die Umdrehung der Welle durch Menschen geschieht, welche an die horizontal durch die Welle geschobenen Stangen oder Hebel a, a angestellt werden, wird diese inbesonders Tummelbaum genannt, und ist, wie man sieht, streng genommen, schon eine Verbindung des Rades an der Welle mit der Rolle.

Ist die zu hebende oder fördernde Last bedeutend grofs, so läfst man die Welle nicht mehr durch Menschen, sondern durch Pferde umdrehen, und nennt dann diese Maschine (Fig. 87) einen Pferde-Göpel, den man auch überhaupt zum Betrieb vieler industrieller Maschinen anwendet, in welchem Falle gewöhnlich ein mit der Welle in Verbindung stehendes gezahntes Rad AB, an welchem jetzt, statt an einem Seile, der Widerstand wirkt, die Bewegung fortgepflanzt wird.

Wie schon bemerkt, bleiben bei allen diesen Maschinen, wohin auch noch die Erd- und Schiffswinde (Fig. 88) gehört, die für das Rad an der Welle abgeleitete Grundgleichung: $Qr = PR$ für das Gleichgewicht in Kraft, wenn man unter r den Abstand des Angriffspunctes der Last Q (also z. B. bei dem Göpel in Fig. 87, den Halbmesser CA des Rades AB, sonst, wenn sich die Last an einem, sich um die Welle aufwickelnden Seile befindet, den Halbmesser der Welle um die halbe Seildicke vermehrt), und unter R den Abstand des Angriffspunctes der Kraft P von der Achse der Welle versteht.

§. 102. Gleichgewicht für ein System von Wellrädern. Wirkt an dem Rade an der Welle M (Fig. 89), wobei wieder r und R die Halbmesser der Welle und des Rades seyn sollen, in A die Kraft P, dagegen an der Welle im Puncte b, anstatt der damit im Gleichgewichte stehenden Last (§. 100) $p \left(= \frac{R}{r} P\right)$ das Rad N einer zweiten Welle durch irgend eine Verbindung, z. B. (wenn es möglich) durch die blofse Reibung, auf eine solche Weise, dafs sich die erste Welle in M nicht umdrehen kann, ohne zugleich auch das Rad N um einen eben so grofsen Bogen mit umzudrehen; so erscheint p für dieses zweite Wellenrad als Kraft, und kann sonach mit der an dieser Welle wirkenden Last Q im Gleichgewichte stehen, wenn $pR' = Qr'$ ist, wobei r' und R' die Halbmesser der Welle und des Rades N bezeichnen. Wird der vorige Werth von p in diese Gleichung gesetzt, so erhält man

$$\frac{RR'}{r}P = Qr', \text{ oder } P : Q = rr' : RR',$$

und da man dieses Gesetz offenbar auf jede beliebige Zahl von solchen Rädern ausdehnen kann, so verhält sich im Stande des Gleichgewichtes die Kraft zur Last, wie das Product aus den Halbmessern der Wellen zu jenen aus den Halbmessern der Räder (eine Relation, welche jener beim zusammengesetzten Hebel ganz analog ist, mithin gilt auch hier von der Bewegung, was dort hierüber bemerkt wurde).

Bringt man die Verbindung, wie sie in Fig. 90 dargestellt ist, durch Schnüre oder Riemen ohne Ende hervor, so erscheint bei einem solchen Systeme die Spannung jeder Schnur für die Welle als Last, und für das darauffolgende Rad als Kraft. Ist also $CA = R$, $Ca = r$, und haben R', r', dann R'', r'' dieselbe Bedeutung in den folgenden Wellrädern, und sind t, t' die Spannungen der beiden Schnüre ohne Ende $A'a$ und $A''a'$, so hat man nach §. 100: $P : t = r : R$, $t : t' = r' : R'$, $t' : Q = r'' : R''$, folglich, wenn man diese Proportionen in derselben Ordnung zusammensetzt, auch: $P : Q = rr'r'' : RR'R''$ . . . (2, wobei es natürlich gleichgiltig ist, ob die Schnur, wie jene $A''a'$, gerade, oder wie jene $A'a$, gekreuzt über die Umfänge der Räder und Wellen gelegt ist, nur laufen im letztern Falle die Räder nach entgegengesetzter, im erstern nach einerlei Richtung um.

Sind S und s die von P und Q gleichzeitig zurückgelegten Wege, so wie s' und s'' jene der Puncte A' und A'', so ist, wie leicht zu sehen, da, wenn die Schnüre nicht gleiten, bestimmten Schnurlängen auch ganz gleiche Bogenlängen der Kreise, um welche sie gehen, entsprechen, und die Bogenlängen zweier fest mit einander verbundenen concentrischen Kreise, wenn sie sich um irgend einen Winkel drehen, sich wie ihre Halbmesser verhalten, sofort $S : s' = R : r$, $s' : s'' = R' : r'$, $s'' : s = R'' : r''$, folglich, wenn man diese Proportionen in dieser Ordnung zusammensetzt, auch $S : s = RR'R'' : rr'r''$, oder mit Rücksicht auf die vorige Relat. 2): $S : s = Q : P$ . . . (3, woraus wieder $PS = Qs$, oder der überall ausgesprochene Satz folgt.

§. 103. Verzahnte Räder. Da die im vorigen Paragraphe erwähnte Reibung der sich in ihrem Umfange unmittelbar berührenden Räder zur Fortbewegung derselben nicht hinreichend ist, so versieht man die Räder an ihrem Umfange (Fig. 91) mit gleich weit von einander abstehenden Zähnen, welche gehörig (wie im siebenten Kapitel des zweiten Abschnittes erörtert wird) in einander greifend, die Reibung oder die Schnüre im Systeme des vorigen Paragraphes ersetzen, so, dafs die Seilspannungen t, t dabei in Drücke oder Pressungen zwischen diesen Zähnen übergehen.

Die mit solchen Zähnen versehenen Wellen heifsen gewöhnlich Getriebe, und da auch hier die vorige Relation (2 gelten mufs, so kann man sagen, dafs sich bei einem Systeme von verzahnten Rädern im Stande des Gleichgewichtes, die Kraft zur Last wie das Product aus den Halbmesssern der Getriebe zu dem Producte aus den Halbmessern der Räder verhält. Eben so kann auch wieder die Relation (3 des vorigen Paragraphes hieher bezogen werden.

Da man durch ein solches Rädersystem jede beliebige Last Q mit einer gegebenen Kraft P auf sehr mannigfaltige Weise ins Gleichgewicht bringen kann, so darf man sich in einem gegebenen Falle nur zuerst über die Anzahl und Gröfse der Räder und Getriebe entscheiden, und dann die Verhältnifszahl aus Q durch P in passende Factoren zerlegen.

Soll z. B. eine Anordnung getroffen werden, durch welche eine Kraft $P = 20$ mit einer Last $Q = 7200$ Pfund im Gleichgewichte steht; so mufs (§. 102, Relat. 2) $\frac{R}{r} \cdot \frac{R'}{r'} \cdots = \frac{Q}{P} = 360$ seyn. Da nun die Aufgabe unbestimmt ist, so wollen wir zuerst die Anzahl der Räder und Getriebe auf vier festsetzen, folglich die Zahl 360 in vier Factoren in ganzen Zahlen zerlegen; da aber auch diese Aufgabe noch unbestimmt ist und mehrere Auflösungen zuläfst, so wollen wir noch die Bedingung hinzufügen, dafs diese möglichst einander gleich seyn sollen. Dadurch wird $360 = 3.3.5.8$ oder auch $= 3.4.5.6$; wählt man diese letztere Zerlegung, so hat man für die Verhältnifszahlen zwischen den Halbmessern der Räder und den Halbmessern der auf denselben Achsen befindlichen Getriebe, wenn man diese Halbmesser $= 1$ setzt:

$$\frac{R}{r} \cdot \frac{R'}{r'} \cdot \frac{R''}{r''} \cdot \frac{R'''}{r'''} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{6}{1}.$$

Man kann also unter andern Anordnungen vier gezahnte Räder und Getriebe nehmen, wovon das erste Rad 3 Mal so grofs als das auf derselben Achse befindliche Getrieb, die folgenden aber 4, 5 und 6 Mal so grofs sind. Die Halbmesser der Räder und Getriebe rechnet man dabei bis zu dem Puncte, wo sich die Zähne berühren, was gewöhnlich in der halben Länge der Zähne geschieht, und nennt diese die mittleren oder mechanischen Halbmesser.

Auf dieselbe Weise wird man auch verfahren, wenn statt dem Verhältnifs von $P : Q$ jenes der Wege $S : s$ gegeben ist, weil (§. 102, Relat. 3) $S : s = Q : P$ Statt findet.

§. 104. Die gemeine Wagenwinde. Zu den einfachsten Anwendungen der verzahnten Räder gehört die gewöhnliche Wagenwinde, welche in einer gezahnten Stange B (Fig. 92), die sich in einer Culisse des Gehäuses auf- und abschieben läſst, und in welche ein Getrieb oa, das mit einem gezahnten Rade ob auf derselben Achse o sitzt, eingreift, so wie aus einem zweiten Getrieb Cd, welches mit der Kurbel CA in Verbindung steht, d. i. auf derselben Achse C sitzt und in das Zahnrad ob eingreift, besteht. Sind also die Halbmesser $oa = r$, $ob = R$, $Cd = r'$, $CA = R'$ und ist P die im Puncte A an dem Kurbelarm CA wirkende Kraft (senkrecht auf CA), so wie Q die in der Richtung BE der Zahnstange wirkende Last; so ist eben so wie in den vorhergehenden Paragraphen $P : Q = rr' : RR'$, und wenn S und s die gleichzeitig von der Kraft P und Last Q zurückgelegten Wege sind, auch $S : s = Q : P = RR' : rr'$.

Das Getrieb Cd und das Rad ob bilden zusammen ein sogenanntes Vorgelege; bleibt dieses weg und bringt man die Kurbel unmittelbar an der Achse o an, so hat man die Wagenwinde ohne Vorgelege, jedoch von geringer Wirksamkeit, indem dabei $P : Q = r' : R'$ Statt findet.

Ist z. B. bei der erstern Winde $r = r' = 1$, $R = 4$ und $R' = 10$ Zoll; so ist $P : Q = 1 : 40$, so daſs, wenn $P = 25$ Pfund ist, sofort $Q = 1000$ Pfund oder 10 Centner betragen kann. Soll aber diese Last selbst nur um einen Zoll gehoben werden, so muſs der Punct A der Kurbel, wo die Kraft wirkt, schon einen Weg von 40 Zoll in der Kreisperipherie beschreiben.

§. 105. Aufzugmaschinen. Unter den verschiedenen Hebzeugen, Winden und Aufzugmaschinen wird die in Fig. 93 dargestellte, ganz aus Guſs- und Schmiedeisen bestehende Winde sehr häufig, besonders auch in mechanischen Werkstätten benützt. Da ihre Einrichtung, so weit es hier nothwendig, schon aus der bloſsen Zeichnung erhellet; so soll hier nur das für den Stand des Gleichgewichtes nöthige Verhältniſs zwischen Kraft und Last bestimmt werden.

Ist R der Halbmesser des auf der Achse der Seilwelle B befestigten Rades a, r jener des in dasselbe eingreifenden Getriebes b, welches sich auf der Kurbelachse befindet, und $cd = R'$ jener der Kurbel A, woran die Kraft P wirkt, während die Last Q mittelst eines Seiles, welches entweder, wenn die Last auf einen höher liegenden Punct aufzuziehen ist, über eine an diesem Orte angebrachte feste Rolle, oder wenn die Last aus der Tiefe zu heben ist, vertical abwärts geht, auf die Welle B, deren Halbmesser $= r'$ seyn soll, wirkt; so ist ganz einfach für das Gleichgewicht $P : Q = rr' : RR'$, und wenn, wie in den vorhergehenden Paragraphen, S und s die gleichzeitig von der Kraft P und Last Q zurückgelegten Wege sind,

$$S : s = Q : P = RR' : rr'.$$

Ist z. B. $R = 12$, $r = 1^1/_2$, $R' = 15$ und $r' = 6$ Zoll, so ist $P : Q = 1 : 20$, so dafs, wenn z. B. für zwei Menschen, welche an dieser Maschine an zwei Kurbeln arbeiten, $P = 50$ Pfund ist, sofort $Q = 1000$ Pfund oder 10 Centner seyn kann (immer mit Uebergehung der Nebenhindernisse), welche Last jedoch wieder 20 Mal langsamer gehoben wird, als die Angriffspuncte A der Kraft an den Kurbeln bewegt werden.

§. 106. Kraniche. Diese äufserst nützlichen Aufzugmaschinen, welche je nach dem verschiedenen Zwecke, dem sie zu entsprechen haben, auch verschieden construirt werden, bestehen jedoch alle der Hauptsache nach, wie der in Fig. 94, gewöhnlich in Giefsereien vorkommende einfache Kranich, aus einer um ihre Achse FE drehbaren aufrecht stehenden Säule M, mit welcher ein horizontal oder schief hinaus laufender Balken N, der Schnabel (woher auch die Benennung) durch Streben T fest und solid verbunden, und an welchem die feste Rolle c angebracht ist, über welche das zur Hebung der Last Q vorhandene Seil oder die Kette $Jdta$ geht, um auf einer horizontalen Seilwelle Ca, an deren Achse zugleich ein gezahntes Rad CB befestigt ist, in welches das mit der Kurbel OA auf derselben Achse O befindliche Getrieb OB eingreift, aufgewunden zu werden. Ist die Last bis auf eine bestimmte Höhe gehoben, so wird diese gewöhnlich durch Umdrehung der Säule M an einem andern, jedoch noch im Bereiche des Schnabels N liegenden Punct niedergelassen.

Ist nun bei diesem hier dargestellten Kranich $AO = R$, $OB = r$, $CB = R'$ und $Ca = r'$; so hat man, da die Spannung des Seiles, indem die Last Q an der beweglichen Rolle $c'd$ hängt (§. 96), $t = \frac{1}{2} Q$ ist (wobei unter Q das Gewicht der beweglichen Rolle mitbegriffen ist), und wenn P die an der Kurbel in A (senkrecht auf OA) wirkende Kraft ist, wegen $P : t = rr' : RR'$ (§§. 102, 103), sofort $P : Q = rr' : 2RR'$. Auch ist für die gleichzeitigen Wege S und s der Kraft P und Last Q, wieder $S : s = Q : P = 2RR' : rr'$.

Wäre z. B. $R = 12$, $R' = 24$, $r = 2$ und $r' = 6$ Zoll; so wäre $P : Q = 2.6 : 2.12.24 = 1 : 48$, dagegen auch $S : s = 48 : 1$.

Bei gröfsern Kranichen, wie sie z. B. zum Aus- und Einladen von Waaren in Schiffe angewendet werden, bringt man doppelte Räder und Getriebe zu beiden Seiten der Seilwelle von verschiedener Gröfse so in Verbindung, dafs man nach Verschiedenheit der Gröfse der Last entweder das gröfsere Getrieb in das kleinere Rad oder das kleinere Getrieb in das grössere Rad (durch eine leichte Aus- und Einrückung) eingreifen lassen, und dadurch die Kraft (jedoch nur auf Kosten der Geschwindigkeit) vergröfsern kann, ohne dafs die Zahl der Arbeiter an den Kurbeln vermehrt werden darf. So wird bei dem in Fig. 95 skizzirten, sehr zweckmäfsig construirten Schiffskranich (welcher in Liverpool auf einem der Quais aufgestellt ist) im letztern Falle die Wirksamkeit der Kraft auf das Doppelte gesteigert.

Ist die Last nicht hoch zu heben, so bringt man oft auch zur Vergrösserung der Kraft, anstatt der angegebenen beweglichen Rolle $c'd$ einen Flaschenzug mit in Verbindung.

Bei manchen Kranichen läfst sich die aufgezogene Last auch noch längs des Schnabels N verschieben, um für die Puncte, wo die Last aufgezogen und wieder niedergelassen wird, einen gröfsern Spielraum zu haben. Ja es gibt sogar, um darin noch weniger beengt zu seyn, wie auf Eisenbahnen, in Maschinenwerkstätten u. s. w. auf Räder stehende transportable Kraniche, welche sich sammt der aufgezogenen Last an einen beliebigen Punct zum Abladen derselben bringen lassen.

Die schiefe Ebene.

§. 107. Erklärung. Eine gegen den Horizont oder eine horizontale Ebene MN (Fig. 96) unter irgend einem Winkel geneigte Ebene MP heifst eine schiefe Ebene. Fällt man dabei von einem ihrer Puncte B das Perpendikel BC auf die horizontale Ebene, zieht in dieser Ebene MN von C aus auf die Durchschnittslinie MO beider Ebenen eine Senkrechte CA, so wie auch aus diesem sich ergebenden Puncte A auf dieselbe Gerade MO in der Ebene MP die Senkrechte AB (welche sofort durch den ursprünglichen Punct B gehen mufs), so bildet der Winkel $BAC = \alpha$ des rechtwinklichten Dreieckes ACB, in welchem also AC eine horizontale und BC eine verticale Linie ist, den Neigungswinkel der schiefen Ebene. In der Regel wird immer nur dieses rechtwinkliche Dreieck ACB gezeichnet und unter AB die Länge, BC die Höhe und AC die Grundlinie der schiefen Ebene verstanden.

§. 108. Gleichgewichtsbedingung für einen auf einer schiefen Ebene liegenden schweren Körper. Wirken überhaupt auf einen, auf einer schiefen Ebene befindlichen Körper mehrere Kräfte, so kann das Gleichgewicht nur dann bestehen, wenn diese eine Resultirende haben, welche normal auf der schiefen Ebene steht und zugleich (§§. 61 — 63) durch den Stützpunct oder einen Punct der Berührungsfläche geht.

Liegt also ein Körper, dessen Schwerpunct in O (Fig. 97) und Gewicht $= Q$ seyn soll, auf der schiefen Ebene AB und wirkt in der Ebene ABC, welche verlängert durch den Schwerpunct O gehen soll, durch diesen Punct eine Kraft P in der Richtung OE; so mufs die Resultirende aus dieser Kraft P und der durch O lothrecht von O nach F wirkenden Kraft Q in der auf AB senkrechten Linie OD liegen. Nimmt man daher in dieser Geraden einen Punct d an und construirt das Kräftenparallelogramm, so mufs für das Gleichgewicht 1)..$P : Q = Oa : Ob$, und wenn R die Resultirende aus P und Q ist, 2)..$R : Q = Od : Ob$ seyn, wobei R zugleich den auf die schiefe Ebene Statt findenden Normaldruck bezeichnet.

§. 109. Besondere Fälle. 1. Ist die Kraft P parallel mit der schiefen Ebene AB (Fig. 97, *a*), so ist wegen Ähnlichkeit der Dreiecke Obd und ABC sofort $P : Q : R = BC : AB : AC$,

also $P = \frac{BC}{AB} Q$ . . . (1 und $R = \frac{AC}{AB} Q$ . . . (2,

d. h. es verhält sich dabei die Kraft zu dem Gewichte des Körpers, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

2. Ist dagegen die Kraft mit der Grundlinie AC (Fig. 97, *b*) parallel, so ist (wegen Ähnlichkeit der Dreiecke Oad mit ABC) eben so $P : Q : R = BC : AC : AB$,

woraus $P = \frac{BC}{AC} Q$ . . . (3 und $R = \frac{AB}{AC} Q$ . . . (4

folgt, oder es verhält sich für das Gleichgewicht die Kraft zum Gewichte des Körpers, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Grundlinie.

Anmerkung 1. Denkt man sich im ersten der beiden besondern Fälle, nämlich in Fig. 97, *a* den Körper O durch die Kraft P über die schiefe Ebene $AB = S$ hinaufgezogen; so hat P den Weg S und die Last Q den Weg $s = BC$ zurückgelegt, und es ist also $S : s = AB : BC$ oder mit Rücksicht auf die Relation (1 auch $S : s = Q : P$, so dafs auch hier wieder $PS = Qs$ ist, oder der Weg der Kraft in demselben Verhältnifs gröfser seyn mufs als sie selbst kleiner als die Last ist. Ganz dasselbe gilt auch für die übrigen Fälle.

Anmerkung 2. Setzt man in dem allgemeinen Fall (Fig. 97) den Neigungswinkel der schiefen Ebene $BAC = \alpha$, jenen, welchen die Richtung der Kraft P mit der lothrechten Linie OF bildet, $= \alpha'$; so ist im Dreiecke Obd der Winkel $bOd = \alpha$ und Winkel $Obd = \alpha'$, und da sich nach einem Satze der Trigonometrie die Seiten eines Dreieckes wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel verhalten, so hat man, statt der Seiten gleich die Kräfte setzend:

$P : Q : R = Sin\,\alpha : Sin\,(\alpha + \alpha') : Sin\,\alpha'$ [weil $Sin\,b\,d\,O = Sin\,(\alpha + \alpha')$ ist]. Für den ersten der beiden besonderen Fälle, wenn nämlich P mit AB parallel ist, wird $\alpha' = 90 - \alpha$, daher $P : Q : R = Sin\,\alpha : 1 : Cos\,\alpha$, also $P = Q\,Sin\,\alpha \ldots (1$ und $R = Q\,Cos\,\alpha \ldots (2$.
Für den zweiten Fall, in welchem P mit AC parallel läuft, wird $\alpha' = 90°$, daher $P : Q : R = Sin\,\alpha : Cos\,\alpha : 1$ und daraus

$$P = Q\frac{Sin\,\alpha}{Cos\,\alpha} = Q\,tang\,\alpha \ldots (3 \quad \text{und} \quad R = \frac{Q}{Cos\,\alpha} \ldots (4.$$

Beispiel 1. Liegt ein Körper im Gewichte von 12 Pfund auf einer schiefen Ebene von 30 Grad Neigung und soll er durch eine mit der schiefen Ebene parallelen Kraft P vom Hinabgleiten verhindert, oder durch diese im Gleichgewicht erhalten werden, so mufs, da sich in einem rechtwinklichten Dreieck ABC, in welchem der Winkel $BAC = 30°$ ist, $AB : BC = 1 : \frac{1}{2}$ verhält (die Seiten in Fig. 97, c sind nämlich, wenn man $AB = 1000$ setzt: $BC = 500$ und $AC = 866$, oder wenn man AB zur Einheit nimmt, $BC = \cdot 5$ und $AC = \cdot 866$), sofort, Relation (1, $P = \frac{1}{2}Q = 6$ Pfund seyn. Der Normaldruck wäre, Relation (2,

$$R = \frac{\cdot 866}{1} \times 12 = 10\cdot 39 \text{ oder nahe } 10\tfrac{2}{5} \text{ Pfund.}$$

Sollte dagegen die mit der Grundlinie AC parallele Kraft bestimmt werden, so müfste diese (Relat. 3) $= \frac{\cdot 5}{\cdot 866} 12 = 6\cdot 93$ Pf. seyn, während der Normaldruck auf die Ebene jetzt (Relat. 4) $= \frac{1}{\cdot 866} 12 = 13\cdot 9$ Pfund betragen würde.

Die trigonometrische Auflösung dieser Aufgabe führt natürlich zu denselben Ergebnissen.

2. Sind zwei Körper von den Gewichten Q und Q' durch eine über eine Rolle N (Fig. 98) gehende Schnur mit einander verbunden und liegen diese auf zwei schiefen Ebenen von einerlei Höhe, jedoch verschiedenen Neigungswinkeln α und α'; so findet man die Bedingung für das Gleichgewicht dieser beiden Körper, wenn die Schnurstücke ON und $O'N$ parallel mit den schiefen Ebenen AC und BC gespannt sind, auf folgende Art.

Für die schiefe Ebene AC mufs die zur Erhaltung des Körpers O nöthige Kraft (§. 109, Gl. 1) $P = \frac{CD}{AC} Q$ und für die zweite Ebene $P' = \frac{CD}{BC} Q'$ seyn, und da ferner die Spannung der Schnur im Stande des Gleichgewichtes nach jeder Seite hin gleich grofs, also $P = P'$ seyn mufs, so folgt $\frac{CD}{AC} Q = \frac{CD}{BC} Q'$ oder $Q . BC = Q' . AC$, d. i. $Q : Q' = AC : BC$, d. h. es müssen sich die Gewichte der beiden Körper, wie die Längen der schiefen Ebenen verhalten, worauf sie liegen.

§. 110. Das Lauf- oder Tretrad. Zu den einfachen Anwendungen der schiefen Ebene kann man unter Anderen das

Laufrad rechnen, welches, wie aus der Darstellung in Fig. 99 ersichtlich ist, aus einer horizontalen Welle CB, woran die Last Q wirkt und einer mit dieser concentrisch verbundenen Trommel MN besteht, in deren inneren oder concaven Theil ein oder mehrere Arbeiter, indem sie von A gegen M vorwärts schreiten und ihre Füſse gegen die parallel mit der Welle oder Achse der Trommel befestigten Leisten u, u'... stemmen, durch ihr Gewicht die Umdrehung dieser Trommel sammt der Welle bewirken. Denkt man sich die zu überwindende Last durch ein Gewicht Q dargestellt, welches an einer Schnur auf der Welle vom Halbmesser $CB = r$ aufgewunden wird, setzt den Halbmesser der Trommel oder des Rades $CA = R$ und berücksichtigt, daſs man die Wirkung des Arbeiters hier so ansehen kann, als ob er beständig über die schiefe Ebene ac (welche das Rad im Puncte A tangirt) hinaufginge und dadurch die Puncte u, u'... des innern Radumfangs nach A herabbewegte; so bringt das in A lothrecht wirkende Gewicht P des Arbeiters nach der Richtung oder parallel mit der schiefen Ebene ca (also nach der Tangente des Kreises CA) eine Kraft p zur Umdrehung des Rades hervor, wofür (§. 109, Gl. 1) $p = \frac{cd}{ac} P$ oder da, wegen Ähnlichkeit der Dreiecke acd und ACD, $\frac{cd}{ac} = \frac{CD}{AC}$ ist, auch $p = \frac{CD}{AC} P$ . . . (1 wird. Ferner ist, wie am Rad an der Welle (§. 100) $p : Q = r : R$ oder $Qr = pR$, oder wenn man für p den Werth aus (1 setzt, und da $AC = R$ ist, auch $Qr = P.CD$; es ist also so, als ob an den um C drehbaren Hebel BD am Puncte B die Last Q und in D die Kraft oder das Gewicht P des Arbeiters wirksam wäre.

Da übrigens die vorige Kraft p zugleich auch die Anstrengung ausdrückt, mit welcher der Arbeiter über die schiefe Ebene ac hinaufgeht, so ist das Verhältniſs dieser Anstrengung zur Last Q genau so, wie bei dem Rad an der Welle ($p : Q = r : R$), also in dieser Hinsicht nichts gewonnen.

Setzt man $p = \frac{1}{5} P$, d. h. nimmt man an, daſs der Mensch mit einer Anstrengung, welche den fünften Theil seines Gewichtes beträgt, für eine längere Arbeitsdauer am meisten leistet, so ist auch (Gleich. 1)

$$\frac{CD}{CA} = \frac{1}{5} \quad \text{oder} \quad CD = \frac{1}{5} R,$$

wodurch der Punct A im Laufrade bestimmt ist, an welchem der Arbeiter am vortheilhaftesten wirkt. In frühern Zeiten wurden diese Laufräder weit häufiger und oft sehr unzweckmäſsig, wie z. B. zum Auf- und Abladen von Waaren mittelst Kranichen, als heut zu Tage angewendet.

§. 111. Die Tretscheibe oder das Tretrad.

Eine ähnliche Anwendung der schiefen Ebene findet an dem öfter in Bräuhäusern, an den sogenannten Ochsenmühlen vorkommenden Tretrade Statt, welches im Wesentlichen aus einer schiefliegenden, mit einer darauf senkrecht stehenden Welle verbundenen kreisrunden Scheibe MN (Fig. 100) besteht, die sammt der Welle um ihre Zapfen oder Achse mn durch das Gewicht von Pferden oder Ochsen, die in A scheinbar gegen M vorschreiten, im Grunde aber durch das beständige Zurückweichen der Scheibe (welche auf ihrer obern Fläche wieder mit Trittleisten versehen ist) immer an derselben Stelle bleiben, umgedreht wird.

Die für das Gleichgewicht geltenden Relationen sind genau dieselben, wie im vorigen Paragraphe. Denkt man sich nämlich den durch Umdrehung des Tretrades zu überwindenden Widerstand wieder auf den Umfang der Welle B, deren Halbmesser $= r$ seyn soll, reducirt und in diesen Abstand gleich Q, setzt das Gewicht der in A wirkenden Thiere $= P$, und den Halbmesser $CA = R$; so ist wieder, wenn die Tretscheibe an dem Puncte A mit dem Horizont den Winkel cad bildet, die auf Umdrehung der Scheibe wirksame Kraft $p = \frac{cd}{ca} P$; ferner ist auch $pR = Qr$, und da p auch hier die Anstrengung der Thiere beim Hinaufsteigen über die schiefe Ebene ac ausdrückt, so steht diese mit der Last Q in demselben Verhältnifs von $r : R$, wie die Kraft zur Last bei dem Rad an der Welle.

Da auch bei den Ochsen und Pferden der fünfte Theil ihres Gewichtes die mittlere Zugkraft oder vortheilhafteste Anstrengung überhaupt gibt; so mufs auch hier der Punct A der Scheibe, auf welchen diese Thiere zu stellen sind, so gewählt werden, dafs im rechtwinklichten Dreiecke acd, wobei cd eine Tangente an die Kreischeibe bildet, $cd = \frac{1}{5} ac$ wird.

Der Keil.

§. **112. Erklärung.** Ein senkrechtes Prisma, dessen beide Grundflächen $abc = efg$ (Fig. 101) gleichschenklichte Dreiecke sind, wird Keil genannt; dabei heifsen die Flächen ag und bg die Seiten, jene af der Rücken, die Kante gc die Schneide und $cd = gh$ die Höhe des Keils. Das halbe Prisma, dessen Grundflächen die rechtwinklichen Dreiecke $acd = egh$ sind, wird öfter einfacher, und gegen diesen der vorige doppelter Keil genannt.

Man wendet den Keil gewöhnlich entweder dazu an, um einen Körper (wie z. B. Holz) zu spalten, oder (wie in Steinbrüchen) von einem andern loszutrennen, oder auch um im Gegentheil zwei Körper fest und stark an einander zu pressen; in allen diesen Fällen wirkt die Kraft (die gewöhnlich in Schlägen besteht) senkrecht auf den Rücken, während die Last entweder senkrecht auf die Höhe (also parallel mit dem Rücken) oder senkrecht auf die Seiten des Keils wirkt.

§. 113. Bedingungen für das Gleichgewicht am Keil. Wirkt bei dem einfachen Keil (Fig. 102) der Widerstand Q parallel mit dem Rücken BC, dagegen die Kraft P darauf senkrecht; so tritt für das Gleichgewicht genau dieselbe Bedingung, wie für die schiefe Ebene im zweiten besondern Fall des §. 109 ein; es ist nämlich $P : Q = BC : AC$, und da daraus auch $2P : Q = 2BC : AC$ oder auf den doppelten Keil (Fig. 103) bezogen und $2P = P'$ gesetzt, ebenfalls 1) . . . $P' : Q = BB' : AC$ Statt findet, so verhält sich überhaupt beim Keile in diesem Falle die Kraft zur Last, wie der Rücken zur Höhe des Keils.

Wirkt dagegen der Widerstand auf den Keil ABB' (Fig. 104) senkrecht auf die Seiten derselben, so müssen die drei Kräfte P, Q, Q auf irgend einen Punct a wirkend, unter sich im Gleichgewichte stehen, folglich ist $P : Q = ac : ab = BB' : AB$ . . . (2 (vermöge der Ähnlichkeit der Dreiecke acb und ABB'), d. h. es verhält sich in diesem Falle die Kraft zum Widerstande, wie der Rücken oder Kopf des Keils zu der Seite oder Länge desselben.

Hieraus folgt auch, dafs der Keil um so wirksamer ist, je kleiner BB' gegen AB, d. i. je spitzer er ist. Auch wird diese letztere Hypothese, nämlich dafs der Widerstand auf die Seiten des Keils senkrecht wirke, in allen Fällen, wo derselbe zwischen zwei oder in einen Körper, um ihn zu spalten, eingetrieben wird, angenommen.

Hat die Kraft P in Fig. 103 den Weg AC zurückgelegt, so ist der Widerstand Q um BB' gewichen, so, dafs wenn man die von P und Q gleichzeitig zurückgelegten Wege mit S und s bezeichnet, sofort $S : s = AC : BB'$ oder, mit Rücksicht auf die obige Relation 1), auch $S : s = Q : P$ Statt findet.

Im zweiten Falle oder in Fig. 104 weicht der Widerstand Q um $nC + mC = 2nC$, während die Kraft P den Weg $AC = S$ zurücklegt; es ist aber

$$AC : Cn = AB : BC \quad \text{oder} \quad AC : 2Cn = AB : 2BC,$$

d. i. $S : s = AB : BB'$ und mit Rücksicht auf die hieher gehörige Relation 2) auch $S : s = Q : P$, also in allen Fällen wieder ganz analog mit dem bei den übrigen Maschinen ausgesprochenen Grundsatze $PS = Qs$.

Anmerkung. Der Keil kommt, aufser seiner ausgesprochenen Form und Anwendung, auch bei sehr vielen Werkzeugen, wie bei Messern, Scheeren, Äxten, Stemmeisen, Grabsticheln, Nägeln, Hobeleisen etc., als Hervorragungen bei den Feilen, Sägen u. s. w., und zwar nicht blofs in der prismatischen, sondern auch in der pyramidalen Form vor, wobei der Neigungswinkel je nach dem Zwecke und der verschiedenen Beschaffenheit des zu bearbeitenden Materials ebenfalls verschieden ist.

Die Schraube.

§. 114. Erklärungen. Ist $a\,d'$ (Fig. 105) ein Rechteck, dessen Höhe $a\,d$ gleich der Höhe, und Grundlinie $a\,a$ gleich dem Umfange des geraden Cylinders $A\,E$ (von kreisförmiger Basis) ist; werden ferner die Seiten $a\,d$ und $a'd'$ in den Puncten f, g, h und f', g', h' in eine gleiche Anzahl gleicher Theile getheilt und die Geraden $a\,f'$, $f\,g'$... gezogen, welche als eine Reihe von schiefen Ebenen von einerlei Grundlinien $a\,a'$ und gleichen Höhen $a'b$ angesehen werden können, und legt man endlich dieses Rechteck an den Cylinder so an, daſs $a\,d$ auf die Kante $A\,D$ fällt, und wickelt dasselbe um den Cylinder vollends herum, wodurch auch die zweite parallele Seite $a'd'$ mit $A\,D$, ferner auch die Puncte f', f mit F, g', g mit G u. s. w. zusammenfallen; so bilden diese geraden Linien $a\,f'$, $f\,g'$... eine einzige continuirliche krumme Linie $AKF...D$ auf der Mantelfläche des Cylinders von durchaus gleicher Steigung, welche Schraubenlinie genannt wird. Dabei heiſst jede Windung, wie AKF ein Schraubengang, die Entfernungen $af = AF = FG$... bilden die Höhe der Schraubengänge, und wenn man sich die Schraubengänge als Hervorragungen aus der Cylinderfläche denkt, so werden sie Schraubengewinde und der Cylinder selbst die Spindel genannt. Diese Gewinde sind entweder, wie in Fig. 106, a, dreieckig (vom Querschnitt $p\,o\,q$) oder, wie in Fig. 106, b, viereckig (vom Querschnitt $n\,q$), nämlich scharf oder flach. In beiden Fällen ist $a\,b$ die Höhe eines Schraubenganges, so wie der Abstand $c\,i$ eines Punctes i in der Mitte der Hervorragung bis zur Achse der Spindel der mittlere Halbmesser der Schraube. (Dieser bildet also das Mittel zwischen dem Halbmesser $n\,m$ des Kerns der Spindel, Fig. 106, b, und jenem $n'm'$ der die Gewinde berührenden Cylinderfläche.).

Wird ein Prisma $A\,B$ (Fig. 107) cylindrisch ausgebohrt, so, daſs der Kern der Spindel genau durchgeht, und werden dann noch in diese Höhlung Vertiefungen nach der Schraubenlinie und der Form der Gewinde der Spindel eingeschnitten, so, daſs diese hineinpassen; so heiſst dieser Theil die Schraubenmutter und es wird, wenn diese festgehalten und die Spindel um ihre Achse, oder umgekehrt, diese um die feststehende Spindel umgedreht wird, im ersten Falle die Spindel, im letztern die Mutter bei einer jeden vollständigen Umdrehung um die Höhe eines Schraubenganges nach der Achse der Spindel fortrücken, gerade so, als würde ein Körper über die schiefe Ebene $a\,f'$ (Fig. 105) hinaufgezogen.

Anmerkung. Manchmal läfst man zwischen zwei auf einander folgenden Gewinden noch einen oder mehrere Schraubengänge durchlaufen, wodurch man eine Schraube mit mehrfachen, und zwar insbesondere mit zwei-, dreifachem Gewind u. s. w. erhält, je nachdem zwischen den Hauptgängen noch ein, zwei u. s. w. Schraubengänge durchgehen. Da die zwischenliegenden Gewinde auf die ursprüngliche Höhe des Schraubenganges keinen Einflufs haben, so steigen z. B. bei einer dreifachen Schraube bei einer Umdrehung der Spindel drei Gewinde heraus und diese haben auch in der Basis der Spindel drei Auslaufpuncte, die in der Kreisperipherie gleich weit von einander abstehen.

§. 115. Bedingung des Gleichgewichtes bei der Schraube. Denkt man sich die Schraubenspindel in einer verticalen Stellung mit einem Gewichte (ihr eigenes mitgerechnet) Q belastet und diese, während die Schraubenmutter fest bleibt, durch eine nach der Tangente der Spindel wirkende Kraft P' so umgedreht, dafs dadurch die Spindel mit der Last in die Höhe steigt; so hat man, da diese Wirkungsart eigentlich in dem Hinaufziehen der Last Q über eine fortlaufende schiefe Ebene durch eine mit der Grundlinie parallele Kraft P' besteht, nach §. 109 (zweiten Fall) und mit Beziehung auf Fig. 105 sofort für das Gleichgewicht $P' : Q = a'f' : a a'$ oder da $a a' =$ dem Umfange des Kreises vom Halbmesser r [worunter hier der mittlere (vorige Paragraph) verstanden wird], also $a a' = 2 r \pi$ (wo $\pi = 3 \cdot 1416$) und $a'f' = AF$ die Höhe des Schraubenganges ist, die wir $= h$ setzen wollen, auch: $P : Q = h : 2 r \pi \ldots (m,$
da man jedoch in der Regel die Kraft nicht unmittelbar an dem Umfang der Spindel, sondern in einer gröfsern Entfernung, z. B. an einem Hebel oder einem auf der Spindel (wie ein Rad an der Welle) befestigten Rade wirken läfst; so sey R diese Entfernung von der Achse der Spindel und P die dort senkrecht auf den Halbmesser R wirkende Kraft, so hat die auf den Umfang der Spindel reducirte Kraft die Gröfse (aus $P : P' = r : R$) $P' = P \frac{R}{r}$, mithin, wenn man diesen Werth statt P' in die vorige Relation $(m$ setzt (wodurch aber streng genommen, wenn die Schraube als einfache Maschine angesehen werden soll, der Schraubenkopf als Cylinder vom Halbmesser R erscheint)

$$P : Q = h : 2 R \pi \ldots (1,$$

d. h. es verhält sich die Kraft zur Last, wie die Höhe eines Schraubenganges zu dem Wege, welchen der Angriffspunct der Kraft während einer ganzen Umdrehung der Schraube macht.

Dieses Verhältnifs bleibt offenbar auch dasselbe, wenn sich anstatt der Spindel die Mutter um die feststehende Spindel dreht. Da die Schraube nur selten zum wirklichen Heben der Last Q verwendet wird, so mufs man in andern Fällen unter Q die Stärke des Druckes oder der Pressung verstehen, welcher durch Umdrehung der Spindel oder Mutter hervorgebracht wird. Ist die Schraube mehrgängig, so hat man unter h die Höhe zu verstehen, um welche die Spindel bei einer ganzen Umdrehung aus der Mutter heraussteigt, also bei einer zweifachen die Höhe von zwei Gewinden u. s. w.

Die obige Relation (1 gibt hier unmittelbar den bisher bei allen Maschinen nachgewiesenen Satz von $S : s = Q : P$ oder $PS = Qs$, nach welchem nämlich die Kraft in ihren Weg multiplicirt, dem Producte aus der Last in den von ihr gleichzeitig zurückgelegten Weg gleich seyn mufs.

Übrigens kann noch bemerkt werden, dafs die vorige Relation (3 ungeändert bleibt, man mag der Schraubenmutter nur ein einziges, oder zur Vertheilung der Last, wie es immer geschieht, mehrere Gewinde geben; enthält diese z. B. ihrer Höhe oder Dicke nach zwej Schraubengänge, so kommt auf jeden derselben die Last $\frac{1}{2} Q$, zu deren Überwindung allerdings nur die halbe Kraft oder $\frac{1}{2} P$ nothwendig ist; da aber dieser Widerstand zwei Mal vorkömmt, so ist dazu auch $\frac{1}{2} P$ zwei Mal nöthig, was wieder die ganze Kraft P gibt, und so auch in den übrigen Fällen.

Die Schraube ist in den Künsten und Gewerben unentbehrlich und dient zu den mannigfaltigsten Zwecken; dabei ist entweder die Mutter fest und die Spindel beweglich, wie bei den Münz-, Buchdrucker-, Öl-, Papier-, Siegel- und vielen anderen Pressen, den Schraubzwingen, Schraubstöcken u. s. w., oder es steht die Spindel fest, während die Mutter beweglich ist, wie bei den Servietten-, Karten-, Buchbinderpressen u. s. w.

Beispiel. Um das Verhältnifs der Kraft zur Last bei einer Schraube zu bestimmen, bei welcher die Höhe eines Schraubenganges einen Zoll und die Entfernung des Angriffspunctes der Kraft von der Achse der Spindel fünf Fufs beträgt, hat man, Alles in Fufsmafs ausgedrückt, nach der obigen Proportion (1 $P : Q = \frac{1}{12} : 10 \times 3{\cdot}1416 = 1 : 376{\cdot}99$; also nahe genug: $P : Q = 1 : 377$,
wobei jedoch auf die bedeutende Reibung (die im siebenten Kapitel behandelt wird) keine Rücksicht genommen ist. Bei der wirklichen Bewegung mufs der Angriffspunct der Kraft P schon einen Weg von 377 Zoll oder Fufs zurücklegen, bis die Spindel oder Mutter mit der Last nur um einen Zoll oder einen Fufs längs der Achse fortrückt.

§. 116. Die Schraube ohne Ende. Läfst man eine Schraubenspindel F (Fig. 108), deren Gänge eine Höhe haben, die der Entfernung der nach der Neigung der Gewinde schief eingeschnittenen Zähne eines gezahnten Rades N gleich ist, in dieses Stirnrad so eingreifen, dafs die Achse der Spindel nach der Ebene dieses Rades liegt, so heifst eine solche Verbindung (also schon eine zusammengesetzte

Maschine) eine Schraube ohne Ende, manchmal auch ein Schneckenrad, und es wird durch eine ganze Umdrehung der Spindel (man mag nun einen oder mehrere Schraubengänge gleichzeitig in das Rad eingreifen lassen), welches gewöhnlich mittelst einer an der Achse der Spindel befestigten Kurbel AED geschieht (wobei die Kraft an dem Griffe ED wirkt), das um seine Achse C drehbare Rad um einen Zahn (= der Höhe eines Schraubenganges) fortgeschoben oder umgedreht, und dadurch irgend ein Widerstand überwunden, den man sich für die allgemeine Rechnung als eine Last Q denken kann, welche auf einer mit der Achse des Rades verbundenen Welle CB aufgewunden wird.

§. 117. Gleichgewichtsbedingung. Ist $CB = r$ der Halbmesser dieser Welle, R der mittlere Halbmesser des Rades N (diesen nämlich bis zur Mitte der Zähne gerechnet), an welchem eine Kraft $= P'$ wirken müfste, um mit der Last Q im Gleichgewichte zu stehen; ist ferner h die Höhe eines Schraubenganges der Spindel (also auch die Theilung der Zähne des Rades), und R' der Halbmesser der Kurbel (Länge des Kurbelknies), woran die Kraft P wirkt; so ist, da P' als Last für die Spindel wirkt (§. 115, Gl. 1) $2R'\pi . P = hP'$, und (§. 100) $P'R = Qr$. Diese Gleichung mit der erstern multiplicirt, gibt, da P' hinausfällt:

$$2RR'\pi P = Qhr, \text{ oder } P : Q = rh : 2RR'\pi \ldots (1.$$

Diese Relation involvirt ganz sichtbar wieder jene von $S : s = Q : P$, wo S und s wieder die gleichzeitigen Wege von P und Q bezeichnen. Ist z. B. $h = 1$, $r = 3$, $R = 6$ und $R' = 10$ Zoll, so ist $P : Q = 3 : 377$, oder nahe wie $1 : 126$; die Last wird jedoch, wenn der Punct D der Kurbel, woran die Kraft wirkt, schon einen Weg $= 126$ durchlaufen hat, erst einen Weg $= 1$ zurückgelegt haben.

§. 118. Die englische Winde. Anstatt der gezahnten Stange der gewöhnlichen Wagenwinde (§. 104) besitzt die äufserst wirksame englische Winde eine Schraubenspindel H (Fig. 109), deren kreisrunde Mutter B an ihrem Umfange mit einer Schraube ohne Ende C so in Verbindung steht, dafs durch Umdrehung dieser Spindel C, mittelst der Kurbel CA, sofort auch das Rad oder die Mutter B, welche zur Verminderung der Reibung auf einer kleinern runden Scheibe a aufliegt, umgedreht, und dadurch die Spindel H sammt der darauf wirkenden Last Q gehoben oder überhaupt bewegt wird.

Ist P die am Kurbelarme $AC = R'$ wirkende Kraft, h' die Höhe eines Schraubenganges an der Spindel C der Schraube ohne Ende, R der Halbmesser des als Schraubenmutter für die Hauptspindel H dienenden, an der Peripherie mit schiefen Zähnen versehenen Rades B, und h die Höhe der Schraubengänge der Spindel H; so ist, wenn man die am Umfange des Rades B für das Gleichgewicht nöthige Kraft $= P'$ setzt (welche sofort für die Spindel C die Last bildet) (§. 115):

$$P : P' = h' : 2 R' \pi \text{ und } P : Q = h : 2 R \pi,$$

oder wenn man diese beiden Proportionen zusammensetzt:

$$P : Q = h h' : 4 \pi^2 R R' = h h' : 39{\cdot}48 R R' \ldots (1.$$

Ist z. B. $h' = \frac{7}{3}$, $h = \frac{3}{2}$, $R = 6$ und $R' = 12$ Zoll, so hat man

$$P : Q = 1 : 2842{\cdot}6,$$

woraus die ungemeine Wirksamkeit dieser Winde erhellet; allein zu Folge des vielfach angeführten Grundsatzes, nach welchem man an Geschwindigkeit verliert, was an Kraft gewonnen wird, mufs der Angriffspunct A der Kraft in diesem Beispiele einen Weg von 2842·6 Zoll durchlaufen, bis die Last nur um 1 Zoll gehoben wird.

Uebrigens erleidet auch dieses Verhältnifs zum Vortheile der Kraft durch die Reibung, welche bei dieser Winde Statt findet, eine bedeutende Modification.

Satz oder Princip der virtuellen Geschwindigkeiten.

§. **119.** Bei allen bisher behandelten, sowohl einfachen als zusammengesetzten Maschinen hat sich der Satz herausgestellt, dafs im Falle das Gleichgewicht zwischen Kraft und Last gestört, und eine Bewegung eingeleitet wird, die Producte aus diesen letztern in die Wege ihrer Angriffspuncte einander gleich sind. Stört man das Gleichgewicht nur in so weit, dafs diese Wege unendlich klein werden, und schätzt diese unendlich kleinen Wege, welche man die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspuncte nennt, weil sie die Geschwindigkeiten bezeichnen, welche diese Puncte im ersten Augenblicke annehmen, oder annehmen würden, nach den Richtungen der Kräfte; so gilt dieser vorhin erwähnte Satz allgemein, und für jede Anzahl von Kräften, welche auf ein System von fest mit einander verbundenen Puncten im Gleichgewichte stehen.

Um davon nur einen einfachen Fall zu erläutern, seyen die beiden Kräfte S, S' (Fig. 110) auf den um C drehbaren Winkelhebel ACA' im Gleichgewichte, folglich, wenn CD und CD' auf den Richtungen der Kräfte S, S' senkrecht stehen (§. 75) $S . CD = S' . CD' \ldots (m.$

Kommen nun durch eine eingeleitete, unendlich kleine Bewegung dieses Hebels die Angriffspuncte A und A' nach a und a', wobei also die unendlich kleinen Winkel ACa und $A'Ca'$ einander gleich werden, die wir durch i bezeichnen wollen; so sind die unendlich kleinen Bögen Aa und $A'a'$ die virtuellen Geschwindigkeiten der Puncte A und A', und wenn man auf die Richtungen der Kräfte die Perpendikel ab und $a'b'$ fällt, so sind die Projectionen Ab und $A'b'$ die virtuellen Geschwindigkeiten der Wege dieser Kräfte (in vielen Fällen fallen diese Projectionen mit den virtuellen Geschwindigkeiten selbst zusammen); dabei wird Ab, weil diese Projection nach der Richtung der Kraft gezählt wird, als positiv, jene $A'b'$ dagegen, als in die Verlängerung der Kraft S' fallend, als negativ angenommen.

Da der kleine Bogen Aa als eine gerade Linie angesehen werden kann, so ist das Dreieck Aba jenem CAD ähnlich, und man hat $CD : CA = Ab : Aa$, und daraus, wenn man $Ab = w$ setzt: $w = CD \frac{Aa}{CA}$. Eben so folgt analog aus den beiden ähnlichen Dreiecken $A'b'a'$ und $CA'D'$, wenn man $A'b' = w'$ setzt: $w' = CD' \frac{A'a'}{CA'}$.

Nun ist aber Bog. $Aa = CA.i$ oder $\frac{Aa}{CA} = i$, und eben so $\frac{A'a'}{CA'} = i$, daher auch, diese Werthe in die beiden vorhergehenden Gleichungen substituirt, $w = CD.i$, und $w' = CD'.i$ oder $\frac{w}{w'} = \frac{CD}{CD'}$, und da aus der obigen Bedingungsgleichung (m

$$\frac{CD}{CD'} = \frac{S'}{S} \text{ folgt, so ist auch } \frac{w}{w'} = \frac{S'}{S}, \text{ oder } S'w' = Sw \ldots (1,$$

oder auch mit Rücksicht, daſs nach der vorigen Bemerkung w und w' entgegengesetzte Zeichen haben: $Sw + S'w' = o \ldots (1'$,

d. h. im Falle des Gleichgewichtes ist die algebraische Summe der Producte aus den Kräften in die virtuellen Geschwindigkeiten, diese nach den Richtungen der Kräfte genommen, gleich Null.

In diesem Satze nun, welcher allgemein für jede Anzahl von Kräften, welche auf ein System von Puncten wirken, und im Gleichgewichte stehen, bewiesen werden kann, und sich so ausspricht: daſs durch eine Störung des Gleichgewichtes, wodurch die Angriffspuncte der Kräfte um unendlich wenig verrückt, und wenn diese unendlich kleinen Wege auf die Richtungen der betreffenden Kräfte projicirt werden, sofort die algebraische Summe der Producte aus den Kräften in diese entsprechenden Projectionen (welche theils positiv, theils negativ zu nehmen sind, je nachdem sie in die Richtungen der Kräfte oder ihrer Verlängerungen fallen) gleich Null ist, liegt der Satz oder das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, und ist zusammen genommen mit dem umgekehrten Satze, daſs, wenn diese eben genannte Relation Statt findet, auch das statische Gleichgewicht zwischen den Kräften bestehen muſs, in der ganzen Mechanik höchst fruchtbar und wichtig.

Beispiel 1. Um diesen schönen Satz durch einige Beispiele zu erläutern, nehmen wir zuerst den in §. 109 (2. Beispiel) behandelten Fall der beiden schiefen Ebenen, auf welchen (Fig. 98) zwei durch eine Schnur mit einander verbundene Körper im Gleichgewichte stehen, hier wieder auf.

Wird nämlich das Gleichgewicht gestört, und beschreiben die Schwerpuncte O, O' als Angriffspuncte der Kräfte Q und Q' die unendlich kleinen Wege Oa und $O'a'$, so sind diese die virtuellen Geschwindigkeiten und On, $O'n'$ ihre Projectionen auf die Kräfte; es ist also zu Folge des in Rede stehenden Satzes, und da hier nur zwei Glieder vorkommen, sofort $Q \,.\, On = Q' \,.\, O'n'$, oder $\frac{Q}{Q'} = \frac{O'n'}{On}$, und da wegen Ähnlichkeit der Dreiecke Ona und ACD, so wie von $O'n'a'$ und BCD, sofort $On = CD\frac{Oa}{AC}$ und $O'n' = CD\frac{O'a'}{BC}$, also $\frac{O'n'}{On} = \frac{AC}{BC} \,.\, \frac{O'a'}{Oa} = \frac{AC}{BC}$, weil $O'a' = Oa$ ist, auch $\frac{Q}{Q'} = \frac{AC}{BC}$ oder $Q : Q' = AC : BC$, wie im §. 109.

Beispiel 2. Bei einem aus n Rollen bestehendem Flaschenzuge nach der in Fig. 76 dargestellten Art, werde das zwischen der Kraft P und der Last Q bestehende Gleichgewicht gestört, so, daſs (Fig. 76, 3) B nach b und A nach a kommt, und Bb, Aa (was zwar hier nicht absolut nothwendig) unendlich klein, also die virtuellen Geschwindigkeiten der Angriffspuncte B und A sind; so hat man, da hier die Projectionen auf die Richtungen der Kräfte mit diesen virtuellen Geschwindigkeiten selbst zusammenfallen: $P \,.\, Aa = Q \,.\, Bb$. Ist aber $Bb = s$, so ist $Aa = ns$, weil jedes der n tragenden Schnüre um den gleichen Theil s verkürzt werden muſs, folglich wird auch $P \,.\, ns = Q \,.\, s$, oder wie früher in §. 98 (Gl. 1) $P : Q = 1 : n$.

Beispiel 3. Sey bei der Schraube ohne Ende, durch Störung des Gleichgewichtes der beiden Kräfte P und Q, welche an den Puncten D und B (Fig. 108) wirken, der Punct B nach b gekommen, also der unendlich kleine Bogen Bb die virtuelle Geschwindigkeit von B, deren Projection auf die Kraft Q sofort wieder mit diesem Bogen selbst zusammen fällt, indem der Weg dieses Punctes B auch der Weg der Kraft oder Last Q ist. Um nun auch den gleichzeitigen Weg des Angriffspunctes D der Kraft P zu finden, bemerke man, daſs ein Punct in der Peripherie des gezahnten Rades N vom mittlern Halbmesser R, in derselben Zeit den

Bogen $\frac{R}{r} Bb = \frac{R}{r} s$ beschreibt, wenn man Bog. $Bb = s$ setzt. Da auf eine ganze Umdrehung der Schraubenspindel F, d. i., wenn der Angriffspunct D der Kraft P den Weg $2R'\pi$ beschreibt, ein Fortrücken dieser Peripherie um die Höhe h eines Schraubenganges Statt hat, so findet man, welchen Theil der Peripherie dieser Punct D beschreiben mufs, während ein Punct der Peripherie des Rades N diesen Weg $\frac{R}{r} s$ zurücklegt aus der Proportion $h : 2R'\pi = \frac{R}{r} s : x$, und daraus $x = \frac{2R'Rs\pi}{hr}$, und da dieser also zugleich der Weg der Kraft P (der hier wieder mit der Projection zusammenfällt) ist, so hat man nach dem hier in Rede stehenden Satze der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$P \cdot \frac{2RR'\pi}{hr} s = Qs, \text{ oder } P : Q = rh : 2RR'\pi$$

genau so wie oben im §. 117 Gl. (1.