$$n = \frac{10 \,.\, 60}{2 \,.\, 3,14 \,.\, 0,2} = 478.$$

Sollten die Nebenhindernisse um 10 Procent, also zwischen 30 und 40 Procent, schwanken, sollte also Pr möglicherweise um $\frac{5}{65} = 0,077$ des berechneten Werthes größer oder kleiner ausfallen, so würde die Umdrehungszahl nur etwa $\frac{1}{2}\, 0,077 = 0,0395$ sich ändern, also zwischen den Grenzen

$$478 \,.\, 1,0395 = 497 \quad \text{und} \quad 478 \,.\, 0,9605 = 459 \text{ Umdrehungen}$$

verschieden sein.

Der zur Bewegung des Flügelrades erforderliche Arbeitsaufwand beträgt, da das Gewicht mit einer Geschwindigkeit

$$w = \frac{2}{30}\,\frac{0,12}{0,20}\,10 = 0,4 \text{ Meter}$$

sinkt, in jeder Secunde

$$Gw = 10,14 \,.\, 0,4 = 4,056 \text{ Meterkilogramm.}$$

Gegengewichte. Ein vorzügliches Mittel zur Kraftregulirung sind die Gegengewichte. In der Regel sind dies wirkliche Gewichte, welche durch ihr Steigen und Sinken die absetzende oder veränderliche Wirkung einer Kraft reguliren, bezw. zur Ueberwindung eines veränderlichen Widerstandes dienen, doch kann man die Gewichte auch durch den Druck des Wassers oder der Luft ersetzen, in welchem Falle man es mit den sogenannten hydraulischen und pneumatischen Gegengewichten oder Balanciers zu thun hat. Ist die zu regulirende Bewegung eine stetig rotirende, so wird das Gegengewicht fest mit der umlaufenden Axe verbunden, während bei absetzender geradliniger oder kreisförmiger Bewegung die Wirkung der Gegengewichte meist mit Hülfe von Hebeln oder Rollen auf den zu regulirenden Maschinentheil übertragen wird. §. 181.

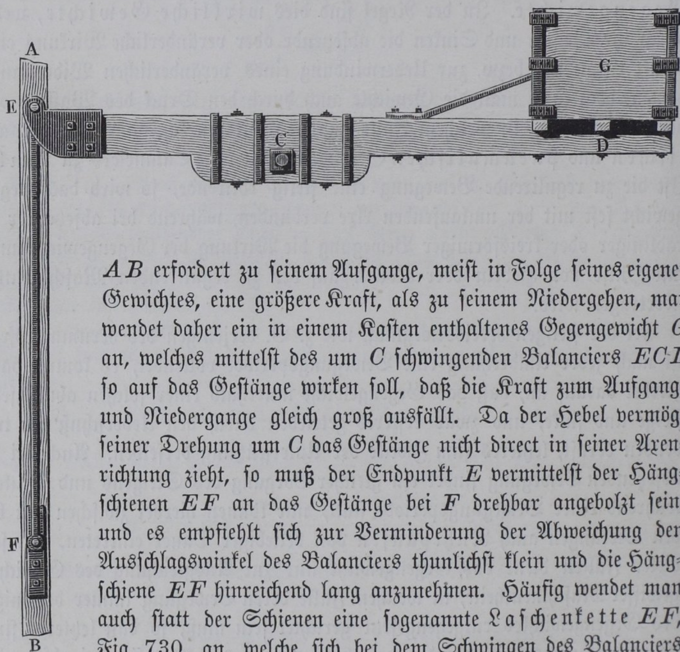
Bei der stetigen Kreisbewegung, wie z. B. derjenigen des Krummzapfens, ist nach jeder Umdrehung eine Bewegungsperiode vollendet, es kommt daher hierbei darauf an, daß das Gegengewicht innerhalb einer solchen abwechselnd steige und sinke, und zwar ersteres getrieben durch den Ueberschuß der treibenden Kraft, letzteres zum Zwecke der Unterstützung derselben. Auch bei der absetzenden Bewegung findet ein gleicher Vorgang des Steigens und Sinkens während einer Bewegungsperiode statt, nur können hierbei zwischen den beiden Wirkungen auch Ruhepausen von beliebiger Dauer eintreten. In sehr vielen Fällen dient das Gegengewicht nur zur Ausgleichung des Gewichtes gewisser Maschinentheile, in welchem Falle deren Bewegung immer derjenigen des Gegengewichtes entgegengesetzt gerichtet sein muß, so daß letzteres sinkt, wenn jene emporsteigen und umgekehrt. Daraus erklärt sich bei absetzenden Bewegungen die Nothwendigkeit der doppelarmigen Hebel, bezw. der Rollen zur Umsetzung der Bewegung. Solche zweiarmige Hebel sind unter dem

Namen von Gegengewichtsbalanciers bekannt. Ist hierbei die auszugleichende Kraft sehr veränderlich, so hat man auch das Moment des Gegengewichtes entsprechenden Aenderungen zu unterwerfen. Dies kann durch Abänderung der Belastung, wie bei den Gegengewichtsketten, oder des Hebelarmes, wie bei den Spiraltrommeln und Gegengewichtswagen, geschehen. Eine Veränderung des zu überwindenden Widerstandes findet beispielsweise bei der Seilförderung in Schächten in Folge der allmäligen Aufwickelung des Seiles statt.

Bei doppelten und bei doppeltwirkenden Kolbenmaschinen kann oftmals eine Ausgleichung der Gewichte durch einfaches Kuppeln oder Verbinden der Maschinen ohne besonderes Gegengewicht bewirkt werden, wenn man die Anordnung so trifft, daß die beiderseitigen Maschinentheile sich gegenseitig im Gleichgewichte halten.

Ein einfacher und besonders im Bergwesen sehr häufiger Fall der Anwendung eines Gegengewichtes ist durch Fig. 729 erläutert. Ein Gestänge

Fig. 729.

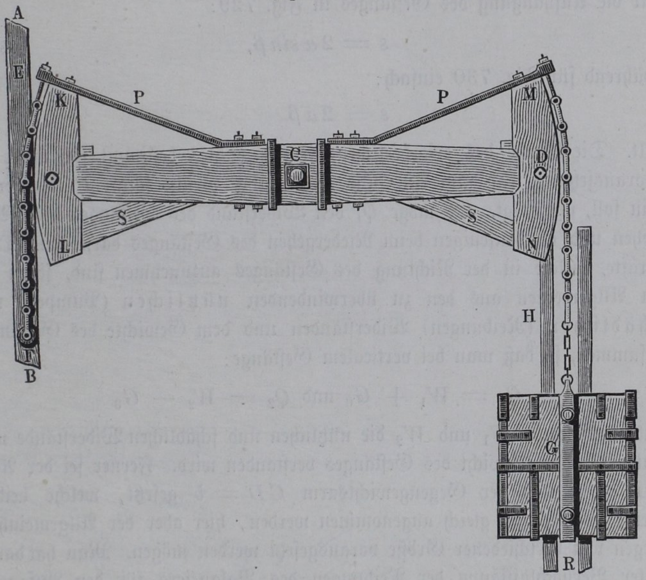


AB erfordert zu seinem Aufgange, meist in Folge seines eigenen Gewichtes, eine größere Kraft, als zu seinem Niedergehen, man wendet daher ein in einem Kasten enthaltenes Gegengewicht *G* an, welches mittelst des um *C* schwingenden Balanciers *ECD* so auf das Gestänge wirken soll, daß die Kraft zum Aufgange und Niedergange gleich groß ausfällt. Da der Hebel vermöge seiner Drehung um *C* das Gestänge nicht direct in seiner Axenrichtung zieht, so muß der Endpunkt *E* vermittelst der Hängschienen *EF* an das Gestänge bei *F* drehbar angebolzt sein, und es empfiehlt sich zur Verminderung der Abweichung den Ausschlagswinkel des Balanciers thunlichst klein und die Hängschiene *EF* hinreichend lang anzunehmen. Häufig wendet man auch statt der Schienen eine sogenannte Laschenkette *EF*, Fig. 730, an, welche sich bei dem Schwingen des Balanciers auf dessen bogenförmiges Ende *KL* auf- oder von demselben abwickelt. In gleicher Art kann man dann das Gegengewicht

G mittelst Ketten an den Sector MN anschließen, indem man das seitliche Pendeln des Gewichts durch Leitrollen hindert, welche zwischen den verticalen Führungen HR sich bewegen. Die Streben S und die Spannstangen P dienen nur zur Versteifung des Balanciers.

Durch die Länge s des Stangenschubes und den Arm $a = CE$ des Balancierarmes bestimmt sich der Schwingungswinkel 2β des letzteren. Wie

Fig. 730.



auch das Gestänge gerichtet sei, ob vertical oder geneigt, immer pflegt man in Fig. 729 die Anordnung so zu treffen, daß das Loth von dem Drehungspunkte des Balanciers auf die Gestängrichtung den Schwingungswinkel 2β des ersteren halbirt, so daß der Balancierarm aus seiner mittleren durch jenes Loth dargestellten Lage nach jeder Seite um den gleichen Winkel β ausschlägt. Bei verticaler Führung des Gestänges ist demnach die mittlere Lage des Balancierarms horizontal, während sie bei einer Neigung des Gestänges um den Winkel α gegen die Verticale ebenfalls um diesen Winkel α von der Horizontalen abweicht. Eine ähnliche Forderung hat man in Betreff des Gegengewichtes zu stellen, und da dasselbe immer vertical geführt wird, so hat der Gegengewichtsarm in seiner mittleren Stellung auch immer eine horizontale Lage. Während daher bei verticalem Gestänge der Balancier ein gerader Hebel wird, nimmt derselbe die Form eines Winkelhebels bei geneigter Gestängführung an. Ebenso pflegt man die Anordnung so zu treffen, daß die Gestängrichtung die Pfeilhöhe des von dem Endpunkte E des Balanciers beschriebenen Bogens halbirt, wonach also die Hängschiene EF in ihren äußersten Lagen von der Richtung des Gestänges um denselben Winkel nach der einen Seite abweicht, um welchen sie in der mittleren Lage nach der anderen Seite dagegen geneigt ist. Unter diesen Voraussetzungen hat man für die Aufhängung des Gestänges in Fig. 729:

$$s = 2a \sin\beta,$$

während für Fig. 730 einfach:

$$s = 2a\beta$$

gilt. Die Größe des erforderlichen Gegengewichtes bestimmt sich unter der Voraussetzung, daß zum Auf- und Niedergange gleiche Kraft P erforderlich sein soll, wie folgt. Es möge Q_1 den Widerstand des Gestänges beim Aufziehen und Q_2 denjenigen beim Niedergehen des Gestänges darstellen. Diese Kräfte, welche in der Richtung des Gestänges anzunehmen sind, setzen sich im Allgemeinen aus den zu überwindenden nützlichen (Pumpen) und schädlichen (Reibungen) Widerständen und dem Gewichte des Gestänges zusammen, so daß man bei verticalem Gestänge:

$$Q_1 = W_1 + G_0 \text{ und } Q_2 = W_2 - G_0$$

hat, wenn unter W_1 und W_2 die nützlichen und schädlichen Widerstände und unter G_0 das Gewicht des Gestänges verstanden wird. Ferner sei der Arm $CE = a$ und der Gegengewichtsarm $CD = b$ gesetzt, welche beiden Arme zwar häufig gleich angenommen werden, hier aber der Allgemeinheit wegen von verschiedener Größe vorausgesetzt werden mögen. Man hat dann, unter Vernachlässigung der Reibungen des Balanciers für den Aufgang:

$$P + \frac{b}{a}\, G = Q_1$$

und für den Niedergang:

$$P - \frac{b}{a}\, G = Q_2,$$

erhält daher durch Addition:

$$P = \frac{Q_1 + Q_2}{2}$$

und durch Subtraction:

$$G = \frac{a}{b}\,\frac{Q_1 - Q_2}{2}.$$

Setzt man z. B., wie oben angegeben:

$$Q_1 = W_1 + G_0 \text{ und } Q_2 = W_2 - G_0$$

hierin ein, so erhält man

$$P = \frac{W_1 + W_2}{2}$$

und

$$G = \frac{a}{b}\left(G_0 + \frac{W_1 - W_2}{2}\right).$$

Für den Fall, daß die Widerstände W_1 und W_2 gleich und W wären, hätte man einfach

$$P = W;\ G = \frac{a}{b}\, G_0,$$

d. h. das Gegengewicht diente nur zur Ausgleichung des Gestänggewichtes.

Man erkennt aus den Ausdrücken für P, daß die zur Bewegung erforderliche Triebkraft nur von den Arbeitswiderständen W abhängig ist, das Gegengewicht und Gestänggewicht dagegen direct keinen Einfluß auf die Größe von P ausüben. Nur insofern als durch diese Gewichte Reibungen an den Zapfen erzeugt werden, bringen sie auch eine Vergrößerung von P hervor. In obiger Rechnung ist das Eigengewicht des Balanciers G_1 nicht weiter berücksichtigt, dasselbe kommt bei der Bestimmung von G auch nicht in Betracht, wenn der Balancier symmetrisch zur Drehaxe ist, sein Schwerpunkt also in diese hineinfällt. Ist dies aber nicht der Fall, liegt dieser Schwerpunkt vielmehr um die Größe c von C entfernt, so hat man in obigen Ausdrücken das Gegengewicht G um den Werth $\pm \frac{c}{b}\, G_1$ vergrößert einzuführen.

Der Einfluß des Gegengewichtes G auf die Zapfenreibung bestimmt sich wie folgt. Der Zapfendruck findet sich einfach beim Aufgange zu

$$R_1 = G_0 + G_1 + G + W_1 - P = G_0 + G_1 + G + \frac{W_1 - W_2}{2}$$

und beim Niedergange zu

$$R_2 = G_0 + G_1 + G - W_2 + P = G_0 + G_1 + G + \frac{W_1 - W_2}{2}.$$

Der Zapfendruck ist daher hier beim Aufgange wie beim Niedergange nicht nur von gleicher Größe $R_1 = R_2 = R$, sondern auch von gleicher Richtung (vertical abwärts). Die bei jedem einfachen Hube s durch den Mittelzapfen vom Halbmesser r aufgezehrte Reibungsarbeit beträgt sonach

$$\varphi R \frac{r}{a}\, s = \varphi\left(G_0 + G_1 + G + \frac{W_1 - W_2}{2}\right)\frac{r}{a}\, s.$$

Auf den Endpunkt des Balanciers reducirt, beträgt die Zapfenreibung:

$$\varphi R \frac{r}{a}.$$

Da dieselbe als ein zusätzlicher Theil von W_1 und W_2 angesehen werden kann, so erkennt man aus den oben gefundenen Werthen für P und G, daß dadurch P um den Betrag $\varphi R \frac{r}{a}$ größer ausfällt, während die Größe des Gegengewichtes dadurch nicht beeinflußt wird. Dasselbe gilt auch für die Reibung an den Zapfen der Hängschienen, bezw. an den Gliedern der Ketten EF und MG, Fig. 730.

Durch den Balancier und das Gegengewicht wird auch die Trägheit des Gestänges vermehrt, und zwar berechnet sich die auf das Gestänge reducirte Masse M_1 des Balanciers und Gegengewichtes nach Thl. I, §. 306 zu

$$M_1 = \frac{T + Mb^2}{a^2},$$

wenn T das Trägheitsmoment des Balanciers in Bezug auf seine Schwingungsaxe und $M = \frac{G}{g}$ die Masse des Gegengewichtes bedeutet. Diese träge Masse wird nur auf den Gang und die Geschwindigkeit der Maschine, nicht aber auf die zu verrichtenden mechanischen Arbeiten von Einfluß sein, da die zur jedesmaligen Beschleunigung der Massen beim Beginne eines Spieles aufzuwendende mechanische Arbeit gegen Ende der Bewegung vor dem nächsten Wechsel durch die dann eintretende Verzögerung vollkommen wieder ausgegeben wird.

Anmerkung. Im Vorstehenden war die Voraussetzung zu Grunde gelegt, daß die treibende Kraft beim Aufgange sowohl wie beim Niedergange den gleichen Werth P haben solle, wie dies bei den doppeltwirkenden Dampfmaschinen gewöhnlich der Fall ist. Wenn indessen die Kraft P_1 beim Aufgange verschieden ist von der P_2 beim Niedergange, wie dieser Fall z. B. bei Maschinen mit verhältnißmäßig dicker Kolbenstange aus der Verschiedenheit der Kolbenflächen folgt, so hat man die Untersuchung in derselben Weise mit P_1 und P_2 anzustellen, indem man für das Verhältniß von P_1 zu P_2 eine aus den jeweiligen Umständen sich ergebende Beziehung in die Rechnung einführt. Es möge in dieser Hinsicht hier nur der besonders häufige Fall der einfach wirkenden Maschinen angeführt werden, bei welchen $P_2 = 0$ zu setzen ist. Hierfür folgt, wie oben, aus

$$P_1 + \frac{b}{a} G = Q_1$$

und

$$O - \frac{b}{a} G = Q_2$$

durch Addition, bezw. Subtraction:

$$P_1 = Q_1 + Q_2 = W_1 + W_2$$

$$G = \frac{a}{b}\,\frac{Q_1 - Q_2 - P_1}{2} = -\frac{a}{b}\,Q_2 = \frac{a}{b}\,(G_0 - W_2).$$

Für $G_0 = W_2$ wird $G = 0$, d. h. ein Gegengewicht ist in diesem Falle nicht nöthig.

Beispiel. Ein Kunstgestänge hat das Gewicht $G_0 = 10\,000$ Kilogramm, seine Pumpenlast beträgt beim Aufzuge 20000 Kilogramm, beim Niedergange nur 4000 Kilogramm, welches Gegengewicht erfordert dasselbe zu seiner Ausgleichung?

Wendet man einen symmetrischen Balancier ($a = b$) mit hängendem Gegengewichte an und bestimmt den ganzen Ausschlagswinkel bei einer Hublänge $s = 1{,}5$ Meter zu $2\beta = 50^0$, so folgt die Armlänge des Balanciers $a = b$ aus

$$a\,\frac{50}{360}\,2\pi = 1{,}5 \text{ zu } a = 1{,}719 \text{ Meter;}$$

es ist die nöthige Triebkraft

$$P = \frac{20000 + 4000}{2} = 12000 \text{ Kilogramm,}$$

und das erforderliche Gegengewicht

$$G = 10000 + \frac{20000 - 4000}{2} = 18000 \text{ Kilogramm.}$$

Wiegt der unbelastete Balancier $G_1 = 2000$ Kilogramm, so beträgt der Druck auf die Drehaxe

$$R = 10000 + 2000 + 18000 + \frac{20000 - 4000}{2} = 38000 \text{ Kilogramm,}$$

also auf jeden Axschenkel 19000 Kilogramm. Daher ist für ein Längenverhältniß der schmiedeeisernen Zapfen

$$s = \frac{l}{d} = 1{,}5$$

nach §. 3 die Zapfenstärke

$$d = 1{,}13\,\sqrt{19\,000} = 155{,}7 = rot\ 160 \text{ Millimeter.}$$

Die Reibungsarbeit an der Drehaxe beträgt daher bei einem Reibungscoefficienten $\varphi = 0{,}08$ für jedes einfache Spiel:

$$0{,}08\,.\,38\,000\,\frac{0{,}160}{2\,.\,1{,}719}\,1{,}5 = 212{,}2 \text{ Meterkilogramm,}$$

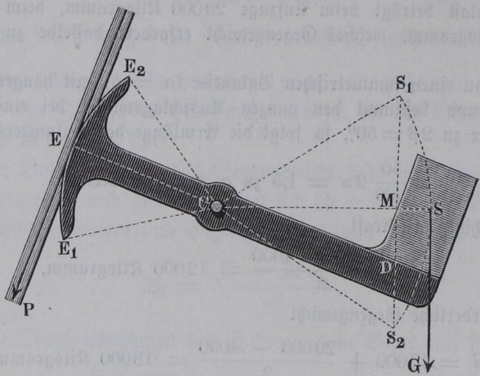
oder pro Secunde, wenn das Gestänge in der Minute 10 einfache Spiele macht,

$$\frac{10}{60}\,212{,}2 = 35{,}4 \text{ Meterkilogramm} = 0{,}47 \text{ Pferdekräfte.}$$

Die im Vorstehenden enthaltene Bestimmung des Gegengewichtes G fußt auf der Voraussetzung, daß das Gestänge und das Gegengewicht wie in Fig. 730 mittelst Ketten an die sectorenförmigen Enden des Balanciers gehangen seien. Für die Anordnung der Fig. 729 bedarf die Rechnung noch einer Correctur. Nimmt man an, der Schwerpunkt S des belasteten Balan- §. 182.

ciers DCE, Fig. 731, befinde sich bei der mittleren Gestänglage mit der Drehaxe C in gleichem Niveau, so daß er nach jeder Seite der Horizontalen CS um den Winkel $SCS_1 = SCS_2 = \beta$ ausschlage, so macht, wenn hier der Abstand $CS = b$ gesetzt wird, das Gegengewicht bei jeder einfachen

Fig. 731.



Schwingung in der Verticalen den Weg $S_1 S_2 = 2b \sin\beta$, wobei das Gewicht somit die mechanische Arbeit $2\,G\,b \sin\beta$ verrichtet. Der gleichzeitige Weg des Gestänges in seiner Richtung beträgt, wenn der Anschluß durch einen Bogen, wie in Fig. 731, bewirkt ist: $s = 2a\beta$, folglich ist der mittlere Werth der Kraft, mit welcher das Gegengewicht dem aufsteigenden Gestänge zu Hülfe kommt, durch

$$p = \frac{2\,G\,b \sin\beta}{s} = \frac{G\,b \sin\beta}{a\beta}$$

gegeben, wofür sich, da annähernd

$$\sin\beta = \beta - \tfrac{1}{6}\beta^3$$

gesetzt werden kann,

$$p = \left(1 - \frac{\beta^2}{6}\right)\frac{b}{a}\,G$$

schreiben läßt.

Der Werth dieser gedachten Kraft p, mit welcher das Gegengewicht beim Aufgange fördernd und beim Niedergange hemmend auf das Gestänge wirkt, ist übrigens in der mittleren Lage CS durch

$$p_1 = \frac{b}{a}\,G$$

und in den äußersten Lagen CS_1 und CS_2 durch

$$p_2 = \frac{b}{a} G \cos \beta$$

gegeben.

Man hat daher in dem Ausdrucke des vorhergehenden §. 181

$$G = \frac{a}{b} \frac{Q_1 - Q_2}{2}$$

anstatt des Verhältnisses $\frac{b}{a}$, welches jetzt nur für die Mittelstellung richtig ist, den durchschittlichen Werth

$$\left(1 - \frac{\beta^2}{6}\right) \frac{b}{a},$$

daher für $\frac{a}{b}$ denjenigen

$$\left(1 + \frac{\beta^2}{6}\right) \frac{a}{b}$$

zu setzen, um das Gegengewicht in

$$G = \left(1 + \frac{\beta^2}{6}\right) \frac{a}{b} \frac{Q_1 - Q_2}{2} = \left(1 + \frac{s^2}{24\, a^2}\right) \frac{a}{b} \frac{Q_1 - Q_2}{2}$$

zu finden.

Für $2\beta = 60^0$, oder $\beta = \frac{\pi}{6} = 0,5236$ erhält man sonach die Größe des Gegengewichtes zu

$$G = 1,0457 \frac{a}{b} \frac{Q_1 - Q_2}{2},$$

d. h. um etwa $4^1/_2$ Procent größer als bei aufgehängtem Gegengewichte. Für den Fall, daß auch das Gestänge nicht durch Ketten, sondern, wie in Fig. 729, durch möglichst lange Schienen mit dem Balancier verbunden ist, berechnet sich der Hub des Gestänges sehr nahe zu

$$s = 2a \sin \beta,$$

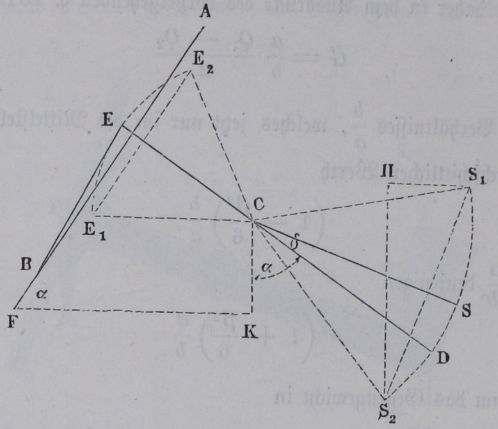
und es behält dann die zuerst gefundene Formel

$$G = \frac{a}{b} \frac{Q_1 - Q_2}{2}$$

ihre Gültigkeit.

Anmerkung. In der obigen Untersuchung wurde die Annahme gemacht, daß der Schwerpunkt S des unbelasteten Balanciers in dessen mittlerer Stellung in der durch die Drehaxe gehenden Horizontalen liege. Wenn dies nicht zutrifft, so kann die Rechnung wie folgt geführt werden. Sei allgemein angenommen, daß das Gestänge AB, Fig. 732 (a. f. S.), um den Winkel $AFK = \alpha$ gegen die Horizontale, also die Längenaxe des Balanciers ED in der mittleren Stellung um denselben Winkel $KCD = \alpha$ gegen die Verticale geneigt sei. Ferner bezeichne wieder b den Axenabstand CS des Schwerpunktes und δ den Winkel

Fig. 732.



DCS dieses Abstandes mit der Längenaxe des Balanciers ED. Man hat dann, unter Beibehaltung der Bedeutung von $a = CE$ und β für den halben Schwingungswinkel:

$$S_1 S_2 = 2b \sin\beta.$$

Nun ist der Winkel $HS_1S_2 = KCS = \alpha + \delta$, daher der verticale Weg des Schwerpunktes S bei jeder einfachen Schwingung

$$HS_2 = 2b \sin\beta \,.\, \sin(\alpha + \delta)$$

und die mittlere Kraft, mit welcher das Gegengewicht auf das Gestänge wirkt wie oben:

$$p = \frac{2Gb \sin\beta \sin(\alpha + \delta)}{s} = \left(1 - \frac{\beta^2}{6}\right) \frac{b}{a}\, G \sin(\alpha + \delta).$$

Macht man $\alpha + \delta = 90^0$, d. h. legt man CS horizontal, so fällt p am größten aus, und zwar wie oben:

$$p = \left(1 - \frac{\beta^2}{6}\right) \frac{b}{a}\, G.$$

Die Größe des Gegengewichtes bestimmt sich daher für diesen allgemeinsten Fall der Gewichtsanordnung aus

$$G = \left(1 + \frac{s^2}{24a^2}\right) \frac{a}{b}\, \frac{Q_1 - Q_2}{2 \sin(\alpha + \delta)},$$

wenn das Gestänge, wie in Fig. 730, durch Ketten an einen Sector angeschlossen ist, und aus

$$G = \frac{a}{b}\, \frac{Q_1 - Q_2}{2 \sin(\alpha + \delta)}$$

bei einer Verbindung des Gestänges mit dem Balancier durch Hängschienen wie in Fig. 729.