Durch Einführung dieser Werthe in die Gleichungen für L und v erhält man alsdann

$$v_{min} = \left(1 - 0{,}0613\,\frac{Q r}{m_1 v_1^2}\right) v_1$$

und

$$(v_{min}) = \left(1 - 0{,}0667\,\frac{Q r}{m_1 v_1^2}\right) v_1.$$

Für die Winkel α_2 der Maximalgeschwindigkeiten hat man dagegen

$$cotg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{log\ nat\ 2}{\pi\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1 \pm 0{,}4\,\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)},$$

welcher Gleichung die Winkel genügen:

$\alpha_2 = 116^0\ 32'$ für den Hingang der Kurbel und

$(\alpha_2) = 104^0\ 12'$ für den Rückgang.

Die entsprechenden Maximalgeschwindigkeiten sind

$$v_{max} = \left(1 + 0{,}1803\,\frac{Q r}{m_1\ v_1{}^2}\right) v_1$$

und

$$(v_{max}) = \left(1 + 0{,}2212\,\frac{Q r}{m_1\ v_1{}^2}\right) v_1.$$

Man hat daher den Ungleichförmigkeitsgrad

$$\delta = (0{,}2212 + 0{,}0667)\,\frac{Q r}{m_1\ v_1{}^2} = 0{,}2879\,\frac{Q r}{m_1\ v_1{}^2}$$

oder, da

$$P = \frac{2\,Q}{\pi\,\varepsilon}\,log\ nat\ \varepsilon = 0{,}22063\ Q$$

ist,

$$\delta = \frac{0{,}2879}{0{,}2206}\,\frac{P r}{m_1\ v_1{}^2} = 1{,}305\,\frac{P r}{m\,v_1{}^2}.$$

In der folgenden Tabelle sind unter Annahme von $l = 5r$ für einige Expansionsverhältnisse die entsprechenden Ungleichförmigkeitsgrade angegeben.

Expansionsverhältniß ε	2	3	4	5	6
Ungleichförmigkeitsgrad δ	1,305	1,374	1,421	1,453	1,477 $\frac{P r}{m_1\ v_1{}^2}$

§. 151. **Beschleunigungsdruck.** Bei der Uebertragung der auf den Kolben einer Dampfmaschine oder Pumpe wirkenden Kraft Q auf den Kurbelzapfen ist die Einwirkung der schwingenden Masse m_2 von wesentlichem Einflusse, wie aus der folgenden Betrachtung sich ergiebt. Denkt man sich eine Kurbel-welle, deren Kurbelzapfen mit der ganz oder annähernd gleichmäßigen Geschwindigkeit v sich dreht, so wird die schwingende Masse m_2 während jeder halben Umdrehung mit sehr veränderlicher Geschwindigkeit bewegt. Während die Geschwindigkeit c des Kreuzkopfes nämlich in der Todtlage der Kurbel gleich Null ist, wächst sie bis zu einem Maximum an, welches bei unendlich langer Lenkerstange genau und bei endlicher Länge dieser Stange annähernd in der mittleren Kolbenstellung sich einfindet, und darauf nimmt die Geschwindigkeit der schwingenden Masse von diesem größten Werthe allmälig wieder ab, bis sie im anderen todten Punkte wieder zu Null geworden ist. Bei jeder folgenden halben Umdrehung wiederholt sich dieser Vorgang. Es ist daher während des ersten Theiles jedes einfachen Hubes eine gewisse Kraft zur Beschleunigung des Kreuzkopfes erforderlich, und die von dieser beschleunigenden Kraft verrichtete mechanische Arbeit wird in Form von lebendiger Kraft in der schwingenden Masse angehäuft. Sobald die letztere ihre größte Geschwindigkeit erlangt hat, ist die Beschleunigung Null geworden. Es geht dieselbe nunmehr in eine Verzögerung über, so daß während des zweiten Theiles der Bewegung die in der Masse m_2 aufgesammelte lebendige Kraft eine Arbeitsgröße äußert, deren Betrag genau gleich derjenigen Arbeit sein muß, welche in dem ersten Theile der Bewegung zur Beschleunigung aufgewendet worden ist, indem gegen Ende des Kolbenlaufes die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes wie zu Anfang der Bewegung den Werth Null hat. Die schwingende Masse m_2 wirkt daher in allen Fällen, gleichviel ob der Antrieb vom Kolben oder von der Kurbel ausgeht, während des ersten Theiles der Bewegung hemmend und während des zweiten Theiles des Kolbenlaufes fördernd auf den Gang des Kurbelgetriebes ein. Bei Pumpwerken, bei denen der Antrieb von der Welle ausgeht, ist die zur Beschleunigung der Masse m_2 erforderliche Arbeit natürlich von dieser Welle auszuüben, so daß diese Welle während der Beschleunigungsperiode einen größeren Widerstand zu überwinden hat, als während der Periode der Verzögerung, in welcher die lebendige Kraft der mit dem Kreuzkopfe schwingenden Masse fördernd im Sinne der Bewegung wirkt. Bei den Dampfmaschinen hingegen wird die Beschleunigung der Masse m_2 direct durch den auf den Kolben wirkenden Dampfdruck Q veranlaßt, so daß nur der Ueberschuß von Q über den erforderlichen Beschleunigungsdruck durch die Lenkerstange nach der Kurbel hin übertragen werden kann. Um daher zu beurtheilen, welche Kraft überhaupt durch die Lenkerstange nach dem Kreuzkopfe oder umgekehrt fortgepflanzt werden muß, ist die Ermittelung dieses zur Beschleunigung der Masse m_2 erforderlichen Druckes unumgänglich, welcher Druck kurz Massen- oder Beschleunigungsdruck heißen und mit M bezeichnet werden möge. Aus dem Vorstehenden ist übrigens klar, daß aus der gedachten Wirkung der Massen ein Verlust oder Gewinn an mechanischer Arbeit nicht hervorgehen kann.

Die Beschleunigung einer Masse, deren Geschwindigkeit durch c gegeben ist, findet man (Thl. I, §. 21) ganz allgemein durch $\frac{dc}{dt}$, unter t die Zeit verstanden. Da nun in dem Obigen die Geschwindigkeit c des Kreuzkopfes durch

$$c = \left(\sin\alpha \mp \frac{r}{2l}\sin 2\alpha\right) v$$

gegeben ist, so hat man für die pro Masseneinheit erforderliche beschleunigende Kraft bei constanter Umdrehungsgeschwindigkeit v:

$$p = \frac{\partial c}{\partial t} = \left(\cos\alpha \mp \frac{r}{l}\cos 2\alpha\right) v \frac{\partial\alpha}{\partial t}.$$

Da nun aber bei constanter Warzengeschwindigkeit v die Beziehung

$$r\partial\alpha = v\partial t$$

gilt, also

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \frac{v}{r}$$

ist, so folgt die beschleunigende Kraft

$$p = \left(\cos\alpha \mp \frac{r}{l}\cos 2\alpha\right)\frac{v^2}{r}$$

pro Masseneinheit, oder der Beschleunigungsdruck für die Masse m_2

$$M = m_2 p = \left(\cos\alpha \mp \frac{r}{l}\cos 2\alpha\right)\frac{m_2 v^2}{r}.$$

Unter Voraussetzung einer unendlich langen Lenkerstange wird die Beschleunigung

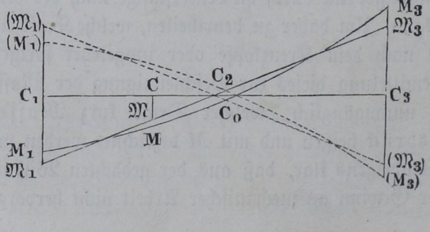
$$M = \cos\alpha\,\frac{m_2 v^2}{r},$$

also Null für $\alpha = 90^0$ und gleich

$$\mp\frac{m_2 v^2}{r}$$

für die todten Punkte oder $\alpha = 0$ und $\alpha = 180^0$, d. h. genau so groß,

Fig. 571.



wie die Centrifugalbeschleunigung derselben Masse m_2, wenn dieselbe an der Kurbelwarze befestigt wäre. Denkt man sich auf einer Abscissenaxe, $C_1 C_3$, Fig. 571, deren Länge $C_1 C_3 = 2r$ ist, von den Endpunkten C_1 und C_3 die Kolbenwege s als Abscissen $C_1 C$ und die zugehörigen Beschleunigungskräfte p als Ordinaten $C\mathfrak{M}$ aufgetragen, so erkennt man sehr leicht, daß man als Curve der Beschleunigungen zwei durch die Mitte C_2 gehende gerade Linien $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3$ erhält, die eine $\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_3$ für den Hingang, die andere $(\mathfrak{M}_3)(\mathfrak{M}_1)$ in der Figur punktirt gezeichnete für den Rückgang, und daß die Endordinaten

$$C_1\mathfrak{M}_1 = C_3\mathfrak{M}_3 = \frac{m_2 v^2}{r}$$

sind. Denn da der Weg des Kreuzkopfes für eine beliebige Stellung C

$$s = C_1 C = r\,(1 - \cos\alpha),$$

daher $C_2 C = r\cos\alpha$ ist und die Ordinate $C\mathfrak{M}$ daselbst durch

$$C\mathfrak{M} = \frac{m_2 v^2}{r}\cos\alpha$$

dargestellt ist, so hat man in

$$\frac{C_2 C}{C\mathfrak{M}} = const$$

die Gleichung einer Geraden.

Wenn die Lenkerstange dagegen eine endliche Länge hat, so sind die Beschleunigungen in den todten Punkten C_1 und C_3 durch

$$\frac{m_2 v^2}{r}\left(1 \mp \frac{r}{l}\right)$$

gegeben, z. B. bei $l = 5r$ durch

$$0{,}8\,\frac{m_2 v^2}{r} \text{ und } 1{,}2\,\frac{m_2 v^2}{r}.$$

Die Beschleunigungen sind jetzt durch zwei krumme Linien $M_1 M_3$ und $(M_3)(M_1)$ begrenzt, welche die Axe $C_1 C_3$ in einem Punkte C_0 schneiden, der etwas hinter der Mitte C_2 liegt, und demjenigen Punkte entspricht, in welchem die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes ein Maximum ist, und für welchen schon in §. 139 die Bedingung

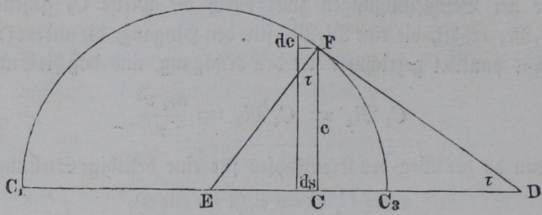
$$\cos\alpha = \pm\frac{r}{l}\cos 2\alpha$$

gefunden wurde. Diese beiden Beschleunigungscurven, welche gegen die Axe $C_1 C_3$ symmetrisch gestaltet sind, lassen sich bei einem bekannten Stangenverhältnisse $\frac{r}{l}$ leicht construiren, wozu man am besten die Ordinaten CM für eine Anzahl von Kolbenstellungen rechnerisch bestimmt, indem man die

Functionen $\cos\alpha$ und $\cos 2\alpha$ für die zugehörigen Kurbelstellungen den trigonometrischen Tafeln entnimmt.

Man kann hierbei bemerken, daß diese Beschleunigungscurve sich direct aus der nach §. 139 entworfenen Geschwindigkeitscurve C_1FC_3, Fig. 572,

Fig. 572.



construiren läßt, welche Curve bekanntlich in ihrer Ordinate CF die Geschwindigkeit c des Kreuzkopfes angiebt. Man findet nämlich für irgend eine Stellung C, für welche die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes durch $c = CF$ gegeben ist, die Beschleunigung $p = \frac{\partial c}{\partial t}$ einfach in der Subnormale CE des Punktes F und zwar aus folgendem Grunde. Bezeichnet τ den Winkel der Curve in F mit der Axe C_1C_3, so hat man $\partial c = \partial s \,.\, tang\,\tau$, also auch

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}\, tang\,\tau = c\, tang\,\tau,$$

d. h. nach der Figur

$$\frac{\partial c}{\partial t} = p = CE.$$

Doch ist eine solche Construction der Beschleunigungscurve nicht anzurathen, da die Zeichnung der Tangenten in der Regel nicht mit der genügenden Schärfe ausführbar ist und im vorliegenden Falle die dabei unvermeidlichen Ungenauigkeiten zu denjenigen noch hinzutreten, welche schon bei der Construction der Geschwindigkeitscurve sich nicht umgehen ließen. Am besten wird daher die Construction der Beschleunigungscurve in der oben angegebenen Weise mit Hülfe der trigonometrischen Functionen geschehen.

§. 152. **Kolbendruck.** Es ist nunmehr leicht, den Druck zu bestimmen, welcher in jedem Augenblicke der Bewegung von dem Kreuzkopfe durch die Lenkerstange auf die Kurbelwarze übertragen wird, indem dieser Druck als die Resultirende aus der direct auf den Kolben wirkenden Kraft Q und dem Beschleunigungsdrucke M sich ergiebt*). Man kann sich auch hierbei mit Vor-

---

*) Siehe hierüber: Radinger, „Ueber Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit", Zeitschrift des österr. Ing.- u. Archit.-Vereins, 1869, Heft VIII.