und v_{max} sich ergiebt, sehr nahe mit den Kurbelstellungen für v_{min} im ersten und für v_{max} im zweiten Sextanten zusammentreffen.

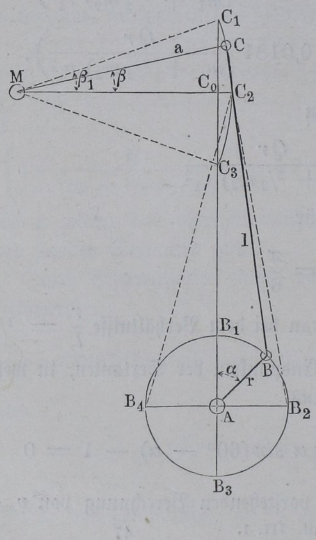
Da die hier berechnete Periode sich während einer ganzen Kurbeldrehung dreimal wiederholt, so giebt es im Ganzen sechs größte und sechs kleinste Geschwindigkeiten und in zwölf Stellungen, unter denen die Todtlagen der einzelnen Kurbeln enthalten sind, hat die Geschwindigkeit den Werth v_1. Eine Darstellung dieser Bewegung durch ein Geschwindigkeitsdiagramm, wie es für die einfache und doppelte Kurbel angegeben wurde, dürfte keine Schwierigkeiten darbieten.

Geht der Antrieb von der Kurbelwelle aus, so bleiben obige Resultate dieselben, nur vertauschen Maximal- und Minimalgeschwindigkeiten in jedem Sextanten ihre Stellen.

Aus dem Nenner $m_1 + {}^3/_2\, m_2$ obigen Ausdrucks für die Geschwindigkeit ist zu ersehen, daß die schwingenden Massen $3\, m_2$ nur halb so viel Einfluß auf die Bewegung der Kurbel ausüben, wie eine gleich große am Kurbelzapfen angebrachte und mit der Welle rotirende Masse. Gleiches gilt auch für die doppelte und näherungsweise für die einfache Kurbel.

§. 149. **Die Kurbel in Verbindung mit dem Balancier.** Wenn, wie dies bei größeren Maschinen häufig der Fall ist, die Kurbel mit der Kolbenstange nicht direct, sondern vermittelst eines doppelarmigen Hebels oder Balanciers in Verbindung steht, so bewegt sich der eine Endpunkt der Lenkerstange anstatt in einer Geraden in einem Kreisbogen $C_1\,C_2\,C_3$, Fig. 569, und man hat es in diesem Falle mit dem allgemeinen Kurbelviereck (§. 135) zu thun. Für diesen Fall lassen sich die Bewegungsgesetze wie folgt ermitteln. Sei wieder r der Kurbelhalbmesser AB und l die Länge BC der Schubstange, bezeichne ferner a den Hebelarm des Balanciers und β den beliebigen Schwingungswinkel CMC_2 desselben von der mittleren Lage MC_2 aus gerechnet, und möge β_1 den größten Schwingungswinkel für die äußerste Lage MC_1 bedeuten. Zunächst soll eine solche Anordnung vorausgesetzt werden, bei welcher die Kurbelaxe A in die Sehne $C_1\,C_3$ des Schwingungsbogens hineinfällt, und möge endlich mit γ der

Fig. 569.



Abweichungswinkel der Schubstange von dieser meist vertical anzunehmenden Sehne bezeichnet werden. Es ist zunächst deutlich, daß bei dieser Anordnung die beiden todten Punkte B_1 und B_3 der Kurbel einander diametral gegenüber stehen, so daß zum Aufgang sowohl wie zum Niedergehen des Balanciers genau eine halbe Umdrehung erforderlich ist.

Um zunächst wieder eine Beziehung zwischen dem Drehungswinkel α der Kurbel und dem Wege s des Balancierendes C zu finden, an welchem letzteren die constante Kraft Q als treibende wirken mag, hat man für die horizontale und verticale Projection des Polygons $A\,B\,C\,M\,C_1\,A$ folgende Gleichungen:

$$a \cos\beta + l \sin\gamma = r \sin\alpha + a \cos\beta_1$$

und

$$r \cos\alpha + l \cos\gamma - a \sin\beta + a \sin\beta_1 = l + r$$

oder, da $a \sin\beta_1 = r$ ist,

$$r \cos\alpha + l \cos\gamma = l + a \sin\beta.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$l^2 (\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) = l^2 = [r \sin\alpha - a (\cos\beta - \cos\beta_1)]^2 \\ + (l - r \cos\alpha + a \sin\beta)^2.$$

Hieraus folgt weiter

$$a \sin\beta = r \cos\alpha - l + \sqrt{l^2 - [r \sin\alpha - a (\cos\beta - \cos\beta_1)]^2}$$

oder annähernd:

$$a \sin\beta = r \cos\alpha - \frac{[r \sin\alpha - a (\cos\beta - \cos\beta_1)]^2}{2l}.$$

Setzt man hierin

$$\cos\beta - \cos\beta_1 = 1 - \tfrac{1}{2} \sin^2\beta - (1 - \tfrac{1}{2} \sin^2\beta_1) \\ = \tfrac{1}{2} (\sin\beta_1{}^2 - \sin^2\beta),$$

so erhält man

$$a \sin\beta = r \cos\alpha - \frac{[r \sin\alpha - \tfrac{1}{2} a (\sin\beta_1{}^2 - \sin\beta^2)]^2}{2l}.$$

Hierin kann man auf der rechten Seite genau genug

$$\sin\beta = \frac{r \cos\alpha}{a}$$

setzen, und da auch

$$\sin\beta_1 = \frac{r}{a}$$

ist, so folgt:

$$a \sin\beta = r \cos\alpha - \frac{1}{2l}\left[r \sin\alpha - \frac{r^2}{2a}(1 - \cos^2\alpha)\right]^2$$

$$= r \cos\alpha - \frac{r^2 \sin^2\alpha}{2l}\left(1 - \frac{r \sin\alpha}{2a}\right)^2$$

oder

$$\sin\beta = \frac{r \cos\alpha}{a} - \frac{r^2 \sin^2\alpha}{2al}\left(1 - \frac{r \sin\alpha}{2a}\right)^2.$$

Da $\frac{r}{a}$ meist nicht größer als $^1/_3$, oft noch kleiner gemacht wird, so kann man unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\frac{r}{a}$ annähernd schreiben:

$$\sin\beta = \frac{r \cos\alpha}{a} - \frac{r^2 \sin^2\alpha}{2al} + \frac{r^3 \sin^3\alpha}{2a^2 l}.$$

Der Bogen selbst, welcher dem Ausschlagswinkel β entspricht, läßt sich nun mittelst der Reihe

$$\beta = \sin\beta + {}^1/_6 \sin^3\beta + \cdots$$

bestimmen und man erhält daher

$$\beta = \frac{r \cos\alpha}{a} - \frac{r^2 \sin^2\alpha}{2al} + \frac{r^3 \sin^3\alpha}{2a^2 l} + \frac{r^3 \cos^3\alpha}{6a^3},$$

und für $\alpha = 0$:

$$\beta_1 = \frac{r}{a} + \frac{r^3}{6a^3}.$$

Hiernach endlich erhält man den Weg $C_1 C = s = a(\beta_1 - \beta)$, welchen der Endpunkt des Balanciers bei einer Drehung der Kurbel um $B_1 A B = \alpha$ zurücklegt, zu:

$$s = r\left[1 - \cos\alpha + \frac{r}{2l}\sin^2\alpha - \frac{r^2}{2al}\sin^3\alpha + \frac{r^2}{6a^2}(1 - \cos^3\alpha)\right].$$

Diese Formel gilt für den Hingang der Kurbel von B_1 nach B_3; ebenso findet man für den Rückgang, d. i. für die aufsteigende Bewegung des Balancierendpunktes von C_3 nach C_1:

$$(s) = r\left[1 - \cos\alpha - \frac{r}{2l}\sin^2\alpha - \frac{r^2}{2al}\sin^3\alpha + \frac{r^2}{6a^2}(1 - \cos^3\alpha)\right].$$

Für $\alpha = 0$ hat man natürlich

$$s = (s) = 0,$$

und für $\alpha = 180^0$:

$$s = (s) = 2r\left(1 + \frac{r^2}{6a^2}\right) = 2a \,.\, \mathrm{arc}\sin\frac{r}{a} = 2a\beta_1.$$

Für $\alpha = 90^0$, also für die Stellungen der Kurbelwarze in B_2 und B_4, hat man dagegen

$$s = r\left(1 + \frac{r}{2l} - \frac{r^2}{2al} + \frac{r^2}{6a^2}\right)$$

und

$$(s) = r\left(1 - \frac{r}{2l} - \frac{r^2}{2al} + \frac{r^2}{6a^2}\right).$$

Wenn nun an dem Endpunkte des Balanciers C tangential an dessen Bahn die constante Kraft Q wirkt, und P den am Kurbelzapfen auftretenden Widerstand bezeichnet, so ist zunächst das Verhältniß beider durch die für eine ganze Kurbeldrehung gültige Gleichung

$$2\,Q\,.\,2\,r\left(1 + \frac{r^2}{6a^2}\right) = P\,.\,2\,\pi\,r$$

gegeben, und man hat daher

$$P = Q\,\frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{r^2}{6a^2}\right).$$

Die während einer Drehung der Kurbel um den beliebigen Winkel α zur Beschleunigung der trägen Massen aufgewendete mechanische Arbeit bestimmt sich demgemäß zu

$$L = Qs - Pr\alpha = Qr\left[1 - \cos\alpha \pm \frac{r}{2l}\sin^2\alpha - \frac{r^2}{2al}\sin^3\alpha \right.$$
$$\left. + \frac{r^2}{6a^2}(1 - \cos^3\alpha) - \frac{2}{\pi}\alpha\left(1 + \frac{r^2}{6a^2}\right)\right].$$

Wie bei den früheren Ermittelungen erhält man diejenigen Winkel α, für welche die Geschwindigkeit v der Kurbelwarze ein Maximum oder Minimum ist, durch die Bedingung $\frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0$, also durch die Gleichung:

$$\sin\alpha \pm \frac{r}{2l}\sin 2\alpha - \frac{3r^2}{2al}\sin^2\alpha\cos\alpha + \frac{3r^2}{6a^2}\cos^2\alpha\sin\alpha$$
$$- \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{r^2}{6a^2}\right) = 0,$$

d. h. man erhält

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{r^2}{6a^2}\right) - \frac{r}{2l}\sin 2\alpha\left(\pm 1 - \frac{3r}{2a}\sin\alpha + \frac{rl}{2a^2}\cos\alpha\right).$$

Bezeichnet m_1 die auf die Kurbelwarze reducirte Masse der Welle und vernachlässigt man dagegen die auf den Punkt C reducirte Masse m_2 der schwingenden Theile, so hat man wieder wie früher

$$v = v_1 \left(1 + \frac{L}{m_1\, v_1^{\,2}}\right)$$

und erhält hieraus die Minimal- und Maximalwerthe der Geschwindigkeit, wenn man darin die jenen ermittelten Winkeln α zugehörigen Werthe von L einsetzt.

Nimmt man den gewöhnlichen Fall, d. h. $\frac{r}{l} = {}^1/_5$ und $\frac{r}{a} = {}^1/_3$ an, so erhält man:

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi}\,\frac{55}{54} - 0{,}1\,\sin 2\,\alpha \left(\pm 1 - {}^1/_2\,\sin\alpha + \frac{5}{18}\cos\alpha\right)$$

und

$$L = Q\,r\left[1 - \cos\alpha \pm 0{,}1\,\sin^2\alpha - \frac{1}{30}\sin^3\alpha + \frac{1}{54}\left(1 - \cos^3\alpha\right) - \frac{55}{54}\,\frac{2}{\pi}\,\alpha\right].$$

Der ersten Formel entsprechen die beiden Winkel für den Niedergang des Balancierendes:

$$\alpha_1 = 34^0\;4' \text{ und } \alpha_2 = 136^0\;5',$$

dagegen für den Aufgang

$$(\alpha_1) = 49^0\;35' \text{ und } (\alpha_2) = 148^0\;56'.$$

Mit den durch Einführung dieser Winkel erhaltenen Werthen von L bekommt man dann schließlich für den Niedergang:

$$v_{min} = v_1\left(1 - 0{,}1804\,\frac{Q\,r}{m_1\,v_1^{\,2}}\right) \text{ für } \alpha_1 = 34^0\;4',$$

$$v_{max} = v_1\left(1 + 0{,}2428\,\frac{Q\,r}{m_1\,v_1^{\,2}}\right) \text{ für } \alpha_2 = 136^0\;5',$$

und für den Aufgang:

$$(v_{min}) = v_1\left(1 - 0{,}2687\,\frac{Q\,r}{m_1\,v_1^{\,2}}\right) \text{ für } (\alpha_1) = 49^0\;35'$$

und

$$(v_{max}) = v_1\left(1 + 0{,}1701\,\frac{Q\,r}{m_1\,v_1^{\,2}}\right) \text{ für } (\alpha_2) = 148^0\;56'.$$

Man hat daher den Grad der Ungleichförmigkeit

$$\delta = (0{,}2428 + 0{,}2687)\,\frac{Q\,r}{m_1\,v_1^{\,2}} = 0{,}5115\,\frac{Q\,r}{m_1\,v_1^{\,2}},$$

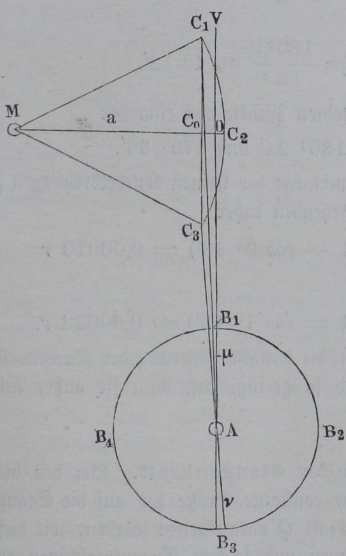
eine Größe, welche von dem unter dem gleichen Verhältnisse $\frac{r}{l} = {}^1/_5$ für die directe Bewegung gefundenen Werthe (s. §. 145) $\delta = 0{,}5154$ so unbedeutend abweicht, daß man von dem Unterschiede in der Praxis ganz absehen darf.

Die bei den gewöhnlichen Ausführungen in der Regel übliche Anordnung weicht von der der obigen Rechnung zu Grunde gelegten noch insofern in geringem Maße ab, als die Kurbelwelle A meist nicht in die Sehne $C_1 C_3$ des Balancierbogens, sondern in eine mit dieser Sehne parallele, die Pfeilhöhe $C_0 C_2$ dieses Bogens halbirende Gerade gelegt wird. Man wählt diese Einrichtung aus dem Grunde, um die Verschiedenheit möglichst auszugleichen, welche bei der Anordnung in Fig. 569 in der beiderseitigen Ablenkung der Schubstange BC sich einstellt. Bezeichnet man diese Pfeilhöhe $C_0 C_2$ mit e, so ist ersichtlich, daß die beiden größten Ablenkungswinkel γ der Kurbelstange nach verschiedenen Seiten der Bogensehne sehr nahe gegeben sind durch

$$\sin \gamma_1 = \frac{r - e}{l} \text{ und } \sin \gamma_2 = \frac{r + e}{l}.$$

Wollte man diese beiderseitigen Ablenkungen von der Verticalen gleich groß machen, so müßte man offenbar die Kurbelwelle a in der mit der Sehne parallelen Tangente in C_2 des Bogens $C_1 C_2 C_3$ lagern, doch pflegt man sich damit zu begnügen, die Axe A nur um die halbe Pfeilhöhe $\frac{e}{2}$ von der Sehne entfernt aufzustellen, um einen anderen mit einer solchen Verschiebung verknüpften Uebelstand nicht zu stark vorherrschen zu lassen. Man ersieht nämlich aus Fig. 570, in welcher die Axe A in die durch die Mitte O der Pfeilhöhe mit der Sehne gezogene Parallele VOA gelegt ist, daß nunmehr die beiden todten Punkte B_1 und B_3, d. h. die mit A und C in derselben Geraden liegenden Punkte nicht mehr diametral gegenüber liegen, sondern daß der Bogen $B_1 B_2 B_3$ kleiner als $B_3 B_4 B_1$ ist. In Folge dieser Ungleichheit der Kurbeldrehungen für den Auf- und Niedergang des Balanciers muß natürlich eine gewisse Ungleichförmigkeit im Gange der Maschine eintreten, welche um so merklicher wird, je weiter man die Axe A von der Sehne $C_1 C_3$ entfernt. Nimmt man diesen Abstand, wie gewöhnlich geschieht, zu $C_0 O = \frac{1}{2} C_0 C_2 = \frac{1}{2} e$ an, so ist indessen die hervorgerufene Ungleichheit nur sehr gering, wie fol-

Fig. 570.



gende Betrachtung zeigt. Bezeichnet man die Abweichungen der Lenkerstange in ihren Todtlagen von der Verticalen mit μ und ν, setzt also $C_1AO = \mu$ und $C_3AO = \nu$, so kann man mit großer Annäherung setzen:

$$\mu = \frac{C_0O}{C_1A} = \frac{e}{2(l+r)} \text{ und } \nu = \frac{C_0O}{C_3A} = \frac{e}{2(l-r)}.$$

Bei dem geringen Ausschlagswinkel β_1 des Balanciers kann man nun die Pfeilhöhe

$$e = \frac{C_1C_0^2}{2a} = \frac{r^2}{2a}$$

annehmen, so daß man für die Winkel μ und ν erhält:

$$\mu = \frac{r^2}{4a(l+r)} \text{ und } \nu = \frac{r^2}{4a(l-r)}.$$

Für $\frac{r}{a} = 1/3$ und $\frac{r}{l} = 1/5$ hat man beispielsweise:

$$\mu = \frac{1}{72}, \text{ also } \mu^0 = \frac{180^0\mu}{\pi} = 0^0\ 48'$$

und

$$\nu = \frac{1}{48}, \text{ also } \nu^0 = \frac{180^0\nu}{\pi} = 1^0\ 12'.$$

Es sind folglich die Abstände der todten Punkte von einander

$$180 \pm (\nu - \mu) = 180^0\ 24' \text{ und } 179^0\ 36'.$$

Die Wege, welche der Balancier vermöge der kleinen Kurbeldrehungen μ und ν beschreibt, sind nach dem Vorstehenden daher

$$\sigma_1 = r\,(1 - \cos\mu) = r\,(1 - \cos 0^0\ 48') = 0{,}00010\ r$$

und

$$\sigma_2 = r\,(1 - \cos\nu) = r\,(1 = \cos 1^0\ 12') = 0{,}00022\ r.$$

Diese Größe und damit die durch die seitliche Lagerung der Kurbelwelle hervorgerufene Ungleichförmigkeit sind so gering, daß man sie außer Acht lassen kann.

§. 150. **Die Kurbel mit veränderlicher Stangenkraft.** Bei den bisherigen Ermittelungen ist immer eine constante Größe der auf die Stange oder den Kreuzkopf wirkenden Kolbenkraft Q vorausgesetzt worden, wie diese Annahme annähernd bei Wasserpumpen und solchen Dampfmaschinen zutreffend ist, bei denen der Dampf während des ganzen Kolbenlaufes zum Cylinder Zutritt hat. Wenn der Dampf jedoch vor Beendigung des Kolbenlaufes in einer gewissen Kolbenstellung jedesmal abgeschlossen wird, damit er durch seine Expansion eine fernere Wirkung ausübe, so wird von dem