die Geschwindigkeit $v = v_1$ wird, man hat daher nicht nur in den Grenzpunkten der Quadranten, sondern auch in deren Mitten, also überhaupt in Abständen von 45^0 dieselbe Geschwindigkeit v_1 wie in den todten Punkten. Man kann auch hier die Geschwindigkeit in diesen Punkten v_1 gleich der Durchschnittsgeschwindigkeit v_0 nehmen, um so mehr, als die maximale Geschwindigkeit v_{max} jene Geschwindigkeit v_1 genau um denselben Betrag übersteigt, um welchen v_{min} darunter bleibt. Wenn man daher in Fig. 566 (a. v. S.) wieder die Kurbelgeschwindigkeiten proportional den Radien auf den Kurbelstellungen angetragen denkt, so ergiebt die wellenförmige Curve $B_1 O B_2 \ldots$ ein anschauliches Bild von den regelmäßigen Schwankungen der Geschwindigkeit. Dabei sind die Winkel $B_1 A M_1 = 19^0 12'$ und $B_1 A M_2 = 70^0 48'$ wie oben berechnet worden.

§. 147. **Einfluss der Länge der Schubstangen.** Die Geschwindigkeitsverhältnisse der Kurbelwelle stellen sich indessen wesentlich anders dar, wenn die Lenkerstangen eine endliche Länge haben, und soll dieser Fall hier untersucht werden, unter der Voraussetzung, daß $\frac{r}{l}$ einen Werth zwischen $^1/_4$ und $^1/_6$ habe. Unter dieser Voraussetzung muß auf die allgemeine Gleichung

$$A = A_1 + A_2 - A_3 = L_1 + L_2 + L_3$$

zurückgegriffen werden. In dieser Gleichung ist, wie oben gezeigt wurde, annähernd

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = (m_1 + m_2)\,\frac{v^2 - {v_1}^2}{2}$$

für alle Quadranten gültig, vorausgesetzt, daß v_1 die Kurbelgeschwindigkeit in dem Anfangspunkte des Quadranten, also gleich derjenigen in bezw. B_1, B_2, B_3 und B_4 bedeutet. Die Arbeiten dagegen A sind für die verschiedenen Quadranten verschieden.

Für die Bewegung im ersten Quadranten von B_1 bis B_2 ist die Arbeit

$$A = A_1 + A_2 - A_3$$

ausgedrückt durch

$$Q r \left(1 + sin\,\alpha - cos\,\alpha - \frac{4}{\pi}\,\alpha\right),$$

da die beiden Glieder $\frac{r}{2l}\, sin^2\,\alpha$ sich fortheben. Man kommt daher hier auf dieselbe Formel für v wie für den Fall unendlich langer Lenkerstangen, nämlich

$$v = v_1 \left[1 + \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2} \left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \frac{4}{\pi}\,\alpha\right)\right].$$

Es gelten hier also auch dieselben Ermittelungen, wie im vorigen Paragraphen, insbesondere ist für $\alpha = 0$, 45^0 und 90^0, die Geschwindigkeit $v = v_1$ und die Minimal- und Maximalgeschwindigkeiten sind, den Winkeln $\alpha_1 = 19^0\ 12'$ und $\alpha_2 = 70^0\ 48'$ entsprechend durch die schon berechneten Werthe

$$v_1 \left(1 \mp 0{,}0422\, \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2}\right)$$

gegeben.

Für den zweiten Quadranten $B_2 B_3$ hat man die Anfangsgeschwindigkeit in B_2 daher zu v_1 wie in B_1 gefunden, dagegen ist die Arbeit der Kräfte durch

$$Q r \left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha + \frac{r}{l} \sin^2\alpha - \frac{4}{\pi}\,\alpha\right)$$

gegeben, wenn der Winkel α hierbei von dem Anfangspunkte B_2 des zweiten Quadranten gezählt wird, so daß man jetzt erhält:

$$v = v_1 \left[1 + \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2} \left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha + \frac{r}{l} \sin^2\alpha - \frac{4}{\pi}\,\alpha\right)\right].$$

Zunächst findet man hieraus wieder für das Maximum und Minimum der Geschwindigkeit durch Differentiation aus

$$\cos\alpha + \sin\alpha + \frac{r}{l} \sin 2\alpha - \frac{4}{\pi} = 0$$

die Winkel α_1 und α_2 vermittelst

$$(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{r}{l} \sin 2\alpha\right)^2.$$

Es ist daher

$$1 + \sin 2\alpha = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - \frac{8}{\pi}\,\frac{r}{l} \sin 2\alpha + \frac{r^2}{l^2} \sin^2 2\alpha$$

oder

$$\sin 2\alpha = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1}{1 + \frac{8}{\pi}\,\frac{r}{l} - \frac{r^2}{l^2} \sin 2\alpha}.$$

Dieser Gleichung entsprechen folgende Winkel und die zugehörigen eminenten Geschwindigkeiten für $\frac{r}{l} = {}^1/_4$:

$$\alpha_1 = 11^0\ 20^1/_2{}'; \quad v_{min} = v_1 \left(1 - 0,02618 \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2}\right)$$

$$\alpha_2 = 78^0\ 39^1/_2{}'; \quad v_{max} = v_1 \left(1 + 0,27618 \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2}\right)$$

für $\frac{r}{l} = {}^1/_5$:

$$\alpha_1 = 12^0\ 17^1/_2{}'; \quad v_{min} = v_1 \left(1 - 0,02827 \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2}\right)$$

$$\alpha_2 = 77^0\ 42^1/_2{}'; \quad v_{max} = v_1 \left(1 + 0,22827 \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2}\right)$$

für $\frac{r}{l} = {}^1/_6$:

$$\alpha_1 = 13^0\ \ 3'; \quad v_{min} = v_1 \left(1 - 0,02987 \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2}\right)$$

$$\alpha_2 = 76^0\ 57'; \quad v_{max} = v_1 \left(1 + 0,19155 \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2}\right).$$

Setzt man ferner

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^0$$

ein, so erhält man die Geschwindigkeit im inneren todten Punkte B_3 zu

$$v_2 = v_1 \left(1 + \frac{r}{l} \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2}\right).$$

Es besteht sonach ein Unterschied zwischen der doppelten und der einfachen Kurbel darin, daß bei der ersteren die Geschwindigkeit v_2 im inneren todten Punkte nicht gleich derjenigen v_1 im äußeren Todtpunkte ist, welche Gleichheit für die einfache Kurbel gefunden wurde.

Für die Bewegung der Kurbelwelle durch den dritten Quadranten hat man wieder die Arbeit der Kräfte

$$A = Q r \left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \frac{4}{\pi}\alpha\right)$$

wie im ersten Quadranten, der Unterschied zwischen beiden Bewegungsvierteln besteht nur darin, daß die Bewegung im äußeren todten Punkte B_1 mit der Geschwindigkeit v_1 begann, während die letztere im inneren todten Punkte B_3 den ermittelten Betrag

$$v_2 = v_1 \left(1 + \frac{r}{l} \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2}\right)$$

hat. Man findet daher im dritten Quadranten die Geschwindigkeit für einen beliebigen Drehungswinkel α ganz wie im ersten durch

$$v = v_2 \left[1 + \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_2{}^2} \left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \frac{4}{\pi}\,\alpha\right)\right].$$

Auch hier ergeben sich in derselben Art wie im ersten Quadranten für die kleinste und größte Geschwindigkeit die Werthe:

$$\alpha_1 = 19^0\ 12'; \quad v_{min} = v_2 \left(1 - 0{,}0422\ \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_2{}^2}\right);$$

$$\alpha_2 = 70^0\ 48'; \quad v_{max} = v_2 \left(1 + 0{,}0422\ \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_2{}^2}\right).$$

Man findet auch hier für $\alpha = 0$, 45^0 und 90^0 gleiche Geschwindigkeiten

$$v_2 = v_1 \left(1 + \frac{r}{l}\,\frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1{}^2}\right).$$

Für $\frac{r}{l} = {}^1/_5$ ist

$$v_2 = v_1 \left(1 + 0{,}2\ \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1{}^2}\right),$$

daher

$$v_{max} = v_1 \left(1 + 0{,}2\ \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1{}^2}\right)\left(1 + 0{,}0422\ \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1{}^2}\right)$$

$$= v_1 \left(1 + 0{,}242\ \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1{}^2}\right)$$

und

$$v_{min} = v_1 \left(1 + 0{,}2\ \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1{}^2}\right)\left(1 - 0{,}0422\ \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1{}^2}\right)$$

$$= v_1 \left(1 + 0{,}158\ \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1{}^2}\right).$$

Im vierten Quadranten beginnt die Bewegung in B_4 mit derselben Geschwindigkeit v_2 wie im dritten, und man hat, da hier die Arbeit der Kräfte Q und P durch

$$A = Q r \left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \frac{r}{l}\,\sin^2\alpha - \frac{4}{\pi}\,\alpha\right)$$

dargestellt ist, für dieses letzte Bewegungsviertel:

$$v = v_2 \left[1 + \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_2{}^2}\left(1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \frac{r}{l}\sin^2\alpha - \frac{4}{\pi}\alpha\right)\right].$$

Setzt man auch hier wieder

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0,$$

so erhält man

$$\cos\alpha + \sin\alpha - \frac{r}{l}\sin 2\alpha - \frac{4}{\pi} = 0,$$

oder wie oben:

$$1 + \sin 2\alpha = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 + \frac{8}{\pi}\frac{r}{l}\sin 2\alpha + \frac{r^2}{l^2}\sin^2 2\alpha,$$

d. i.:

$$\sin 2\alpha = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1}{1 - \frac{8}{\pi}\frac{r}{l} - \frac{r^2}{l^2}\sin 2\alpha}.$$

Wenn man hierin für $\frac{r}{l}$ die Größen $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$ einführt, so findet man die rechte Seite stets größer als Eins, woraus man folgern muß, daß im vierten Quadranten bei diesen Längenverhältnissen überhaupt keine größte und kleinste Geschwindigkeit vorkommt, daß vielmehr die Kurbelgeschwindigkeit von ihrem Werthe in B_4

$$v_2 = v_1\left(1 + \frac{r}{l}\frac{Qr}{(m_1 + m_2)\,v_1{}^2}\right)$$

stetig abnehmend bei einer Drehung um 90^0 in B_1 den ursprünglichen Werth v_1 wieder erreicht. Daß dieser letztere Werth in B_1 wirklich sich einstellt, zeigt sich durch Einsetzen von

$$\alpha = \frac{\pi}{2} = 90^0$$

in die letzte Formel für v, wodurch man erhält:

$$v = v_2\left(1 - \frac{r}{l}\frac{Qr}{(m_1 + m_2)\,v_2{}^2}\right),$$

oder für v_2 seinen Werth eingesetzt:

$$v = v_1\left(1 + \frac{r}{l}\frac{Qr}{(m_1 + m_2)\,v_1{}^2}\right)\left(1 - \frac{r}{l}\frac{Qr}{(m_1 + m_2)\,v_2{}^2}\right) = v_1.$$

Es kann übrigens hier bemerkt werden, daß auch im vierten Quadranten unter Umständen eine größte und kleinste Geschwindigkeit vorkommen kann, nämlich in dem Falle, daß das Verhältniß $\frac{r}{l}$ noch kleiner ist als oben angenommen, wie ja schon unter der Voraussetzung $\frac{r}{l} = 0$ ein Maximum und ein Minimum der Geschwindigkeit auch im vierten Quadranten gefunden wurde. Der Betrag, welchen $\frac{r}{l}$ für diesen Fall nicht überschreiten dürfte, würde sich ergeben durch die Bedingung: $\sin 2\alpha = 1$ oder

$$\left(\frac{4}{\pi}\right)^2 - 1 = 0{,}6211 = 1 - \frac{8}{\pi}\,\frac{r}{l},$$

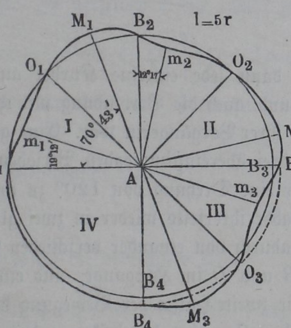
wenn man die kleine Größe $\left(\frac{r}{l}\right)^2 \sin 2\alpha$ außer Acht läßt. Hieraus folgt, daß $\frac{r}{l}$ kleiner sein müsse als 0,148, also etwa $^1/_7$. Nimmt man z. B. $\frac{r}{l} = {}^1/_8$, so erhält man die betreffenden Winkel aus

$$\sin 2\alpha = \frac{0{,}6211}{1 - 0{,}3183} = 0{,}9111,$$

welcher Gleichung $2\alpha = 65^0\,40'$ und $114^0\,20'$, also $\alpha_1 = 32^0\,50'$ und $\alpha_2 = 57^0\,10'$ entsprechen.

In Fig. 567 sind schließlich die ermittelten Resultate durch ein Diagramm zur Anschauung gebracht, in welchem in derselben Weise wie oben die Länge irgend eines Radius von A an die Curve die Geschwindigkeit der Kurbelwelle in derjenigen Lage bedeutet, in welcher die nachgehende Kurbel AB die Stellung dieses Radius hat. Das Diagramm, welches für ein Verhältniß $\frac{r}{l} = {}^1/_5$ entworfen ist, wird nach dem Vorstehenden ohne Weiteres klar sein, wenn etwa noch bemerkt wird, daß mit $m_1, m_2 \ldots$ die Punkte der Minimal- und mit $M_1\, M_2\, M_3$ die der Maximalgeschwindigkeiten bezeichnet werden. Der durch B'_3 gezogene Kreisbogen entspricht hierbei der Geschwindigkeit v_2 in B_3 und wird dieser Kreis von der Geschwindigkeitscurve offenbar für $\alpha = 45^0$, also diametral O_1 gegenüber geschnitten. Die Lage des Schnittpunktes O_2 erhält man ferner, wenn man im zweiten Quadranten $v = v_1$ setzt, d. h. aus

Fig. 567.



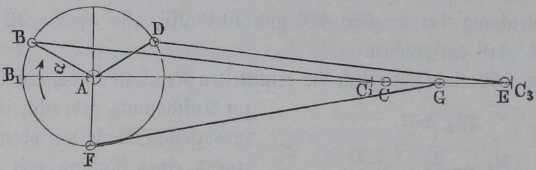
$$1 + \sin\alpha - \cos\alpha + \frac{r}{l}\sin^2\alpha - \frac{4}{\pi}\,\alpha = 0.$$

Die absolut größte Geschwindigkeit ist nach dem Vorstehenden im dritten Quadranten bei M_3 und die absolut kleinste Geschwindigkeit bei m_1 im ersten Quadranten zu suchen, man hat daher den Ungleichförmigkeitsgrad hier:

$$\delta = (0{,}242 + 0{,}042) \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2} = 0{,}284 \frac{Q r}{(m_1 + m_2)\, v_1^2}.$$

§. 148. **Die dreifache Kurbel.** Es kommt zuweilen, wenn auch selten, der Fall vor, daß eine Welle mit drei gleich langen unter 120⁰ gegen einander versetzten Kurbeln versehen ist, sei es nun, daß diese Welle durch drei Dampfkolben bewegt werde, oder daß sie dreien Pumpkolben ihre hin- und hergehende Bewegung mittheilt. Zunächst ist klar, daß von der Lage der Kurbelwelle, in welcher die eine Kurbel AB in dem todten Punkte B_1 steht, Fig. 568, eine Drehung um 120^0 genügt, um eine eben solche Lage des

Fig. 568.



Systems wieder herbeizuführen, indem dann jede einzelne Kurbel an die Stelle der vorhergehenden getreten ist und auch die Verbindung mit ihrem Kreuzkopfe genau dieselbe ist, wie sie bei ihrer Vorgängerin war. Eine ganze Umdrehung der Welle wird daher aus drei übereinstimmenden Perioden bestehen, und es genügt, die Bewegung für eine Drehung von 120^0 zu untersuchen. Eine solche Bewegung zerfällt aber ihrerseits wieder in zwei gleiche Abschnitte von je 60^0 Drehung, welche dadurch von einander verschieden sind, daß in der ersten Hälfte zwei Kurbeln B und D im Hingange, und eine F im Rückgange befindlich sind, während die zweite Hälfte der Bewegung durch das Hingehen nur einer Kurbel B und das Hergehen der beiden anderen D und F charakterisirt ist. Unter Beibehaltung der früher gebrauchten Bezeichnungen lassen sich die hierfür gültigen Gleichungen wie in den vorhergehenden Fällen leicht aufstellen, wenn man nur berücksichtigt, daß der einem Drehungswinkel α entsprechende Weg des Kreuzkopfes durch

$$s = r \left(1 - \cos\alpha - \frac{r}{2l} \sin^2\alpha\right)$$

beim Hingange und durch

$$s = r \left(1 - \cos\alpha + \frac{r}{2l} \sin^2\alpha\right)$$