Daher folgt die mittlere Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{r\pi}{t} = \frac{v_1}{1 + \frac{m_2}{4m_1}} = v_1\left(1 - \frac{m_2}{4m_1}\right).$$

Dieser Werth ist nur um eine sehr kleine Größe von v_1 verschieden, so daß man mit genügender Annäherung die mittlere Geschwindigkeit v_0 gleich derjenigen v_1 in den todten Punkten annehmen und daher in allen bisher entwickelten Formeln auch v_0 anstatt v_1 setzen kann.

Anmerkung. Wollte man die Vernachlässigung von m_2 gegen m_1 nicht zulassen, so könnte man einen näheren Ausdruck für die eminenten Geschwindigkeiten aus der allgemeinen Formel

$$v = v_1\sqrt{\frac{1 + \frac{2Qr}{m_1 v_1^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right)}{1 + \frac{m_2}{m_1}\sin^2\alpha}}$$

in folgender Art herleiten. Man schreibe

$$v = v_1\sqrt{\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\sin^2\alpha\right)\left[1 + \frac{2Qr}{m_1 v_1^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right)\right]}$$
$$= v_1\left[1 + \frac{Qr}{m_1 v_1^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right) - \frac{m_2}{2m_1}\sin^2\alpha\right]$$

und erhält hieraus durch Differentiation:

$$\frac{\partial v}{\partial\alpha} = v_1\left[\frac{Qr}{m_1 v_1^2}\left(\sin\alpha - \frac{2}{\pi}\right) - \frac{m_2}{2m_1}\sin 2\alpha\right] = 0.$$

Hieraus folgt zur genaueren Bestimmung von α_1 und α_2

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi} + \frac{m_2 v_1^2}{2Qr}\sin 2\alpha.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich α_1 und α_2 am besten probeweise bestimmen, etwa indem man zunächst für α die Werthe $39^0\,32'$ und $140^0\,28'$ einführt und behufs der Erfüllung der Gleichung die geringe Correctur vornimmt. Für die Geschwindigkeiten erhält man mit jenen Werthen $\alpha_1 = 39^0\,32'$ und $\alpha_2 = 140^0\,28'$ die Ausdrücke:

$$v_{min} = v_1\left(1 - 0{,}2105\,\frac{Qr}{m_1 v_1^2} - 0{,}2026\,\frac{m_2}{m_1}\right)$$

und

$$v_{max} = v_1\left(1 + 0{,}2105\,\frac{Qr}{m_1 v_1^2} - 0{,}2026\,\frac{m_2}{m_1^2}\right).$$

§. 145. **Einfluss der Länge der Schubstange.** Bisher ist immer die Voraussetzung gemacht worden, daß die Länge l der Lenkerstange gegen den Halbmesser r der Kurbel so groß sei, daß man die Glieder mit dem Factor $\frac{r}{2l}$ vernachlässigen könne. Streng genommen gelten daher die gefundenen Beziehungen nur für die Schleifenkurbel, bei welcher l als unendlich groß anzunehmen ist. In den Ausführungen der Praxis pflegt man l sehr häufig etwa gleich dem fünffachen Kurbelhalbmesser anzunehmen, so daß

$$\frac{r}{2l} = 0,1$$

ist. In Folge dieser endlichen Länge der Schubstangen stellen sich die größten und kleinsten Geschwindigkeiten der Kurbel von etwas anderen Werthen heraus, und es finden diese Geschwindigkeiten auch in anderen Kurbelstellungen statt, als oben berechnet worden. Um den Einfluß der Lenkstangenlänge auf diese Werthe kennen zu lernen, sei auf die allgemeine Formel für die Geschwindigkeit aus §. 144 zurückgegriffen:

$$v = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + 2Qr\left(1 - \cos\alpha \mp \frac{r \sin^2\alpha}{2l} - \frac{2}{\pi}\alpha\right)}{m_1 + m_2\left(\sin\alpha \mp \frac{r}{2l}\sin 2\alpha\right)}},$$

worin die oberen Zeichen für den Hingang, die unteren für den Rückgang gelten. Dies kann man mit Rücksicht auf die Kleinheit von m_2 gegen m_1 auch schreiben:

$$v = v_1\sqrt{1 + \frac{2Qr}{m_1 v_1^2}\left(1 - \cos\alpha \mp \frac{r\sin^2\alpha}{2l} - \frac{2}{\pi}\alpha\right)}$$
$$= v_1\left[1 + \frac{Qr}{m_1 v_1^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha \mp \frac{r\sin^2\alpha}{2l}\right)\right].$$

Hieraus findet man wieder wie oben die Bedingung für die größten und kleinsten Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = \sin\alpha - \frac{2}{\pi} \mp \frac{r}{2l}\sin 2\alpha = 0,$$

oder

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi} \pm \frac{r}{2l}\sin 2\alpha.$$

Diese Gleichung liefert für jeden Werth von $\frac{r}{l}$ zwei Paare von Winkeln und zwar α_1 und α_2 mit Benutzung des oberen Vorzeichens für den Hingang und (α_1) und (α_2) mit Benutzung des unteren Zeichens für den Rückgang. Hiervon entsprechen bei Dampfmaschinen α_1 und (α_1) den kleinsten und α_2 und (α_2) den größten Geschwindigkeiten, welche Geschwindigkeiten man erhält, wenn man die betreffenden Werthe von α in die Formel für v einführt. Es ist ferner leicht zu erkennen, daß diese vier Winkel α_1, α_2, (α_1) und (α_2) in solchem Verhältnisse zu einander stehen, daß der spitze Winkel α_1

den stumpfen (α_2) zu 180^0 ergänzt, und daß ebenso α_2 und (α_1) Nebenwinkel zu einander sein müssen, denn wenn die Gleichung

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi} + \frac{r}{2\,l}\sin 2\,\alpha$$

durch den Winkel α_1 erfüllt wird, so muß auch der Gleichung

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi} - \frac{r}{2\,l}\sin 2\,\alpha$$

durch den Winkel $(\pi - \alpha_1)$ Genüge geleistet werden.

Eine andere merkwürdige Eigenschaft ergiebt sich in Beziehung auf die vier Geschwindigkeiten v_{max} und v_{min} für den Hingang und (v_{max}) und (v_{min}) für den Rückgang. Es läßt sich nämlich leicht erkennen, daß v_{max} die mittlere Geschwindigkeit v_0 oder v_1 der todten Punkte genau um dieselbe Größe übertrifft, um welche (v_{min}) darunter bleibt, und ein gleiches Verhältniß findet zwischen (v_{max}) und v_{min} statt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} v_{max} &= v_1\left[1 + \frac{Q\,r}{m\,v_1{}^2}\left(1 - \cos\alpha_2 - \frac{2}{\pi}\,\alpha_2 - \frac{r\sin^2\alpha_2}{2l}\right)\right] \\ &= v_1\left(1 + \frac{Q\,r}{m_1\,v_1{}^2}\,k\right), \end{aligned}$$

wenn der Werth in der Klammer mit k bezeichnet wird.

Ferner ist aber auch

$$\begin{aligned} (v_{min}) = v_1\Bigg[1 + \frac{Q\,r}{m_1\,v_1{}^2}\Bigg(1 - \cos(\pi - \alpha_2) - \frac{2}{\pi}\,(\pi - \alpha_2) \\ + \frac{r}{2\,l}\,\frac{\sin^2(\pi - \alpha_2)}{\cancel{2l}}\Bigg)\Bigg] = v_1\left[1 + \frac{Q\,r}{m_1\,v_1{}^2}\,(k)\right]. \end{aligned}$$

Es ist aber sogleich ersichtlich, daß die beiden Werthe

$$k = 1 - \cos\alpha_2 - \frac{2}{\pi}\,\alpha_2 - \frac{r\sin^2\alpha_2}{2l}$$

und

$$(k) = 1 - \cos(\pi - \alpha_2) - \frac{2}{\pi}\,(\pi - \alpha_2) + \frac{r\sin^2(\pi - \alpha_2)}{2l}$$

der Größe nach gleich und dem Vorzeichen nach entgegengesetzt sind.

Die Werthe α_1 und (α_1), sowie α_2 und (α_2) sind verschieden, ebenso wie v_{max} von (v_{max}), sowie v_{min} von (v_{min}) abweicht, so lange die Größe $\frac{r}{l}$ einen merklichen Werth hat. Es geht hieraus hervor, daß die Bewegungsverhältnisse des Kurbelgetriebes während des Hinganges nicht genau dieselben sind, wie beim Rückgange. Nur wenn, wie bei der Schleifenkurbel, $l = \infty$ wird, findet man $\alpha_1 = (\alpha_1)$ und $\alpha_2 = (\alpha_2) = \pi - \alpha_1$ und man hat in diesem Falle auch für den Hin- und Rückgang gleiche Maximal- und gleiche Minimalgeschwindigkeiten.

Wenn die Bewegung von der Kurbelwelle aus erfolgt, so gehen die hier gefundenen Maximalgeschwindigkeiten in Minimalgeschwindigkeiten über und umgekehrt. Man hat dann in den vorstehenden Ausdrücken für v nur dem mit Q behafteten Gliede, welches aus der Arbeit der äußeren Kräfte herrührt, das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben.

Legt man das sehr gebräuchliche Verhältniß $\frac{r}{l} = {}^1/_5$ der Rechnung zu Grunde, so erhält man für den Hingang aus

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi}\alpha + 0{,}1 \sin 2\alpha$$

die betreffenden Winkel α_1 und α_2 nebst den ausgezeichneten Geschwindigkeiten:

$$\alpha_1 = 47^0\ 25';\ v_{min} = v_0\left(1 - 0{,}2577\,\frac{Q r}{m_1\, v_0^{\,2}}\right),$$

$$\alpha_2 = 146^0\,45';\ v_{max} = v_0\left(1 + 0{,}1757\,\frac{Q r}{m_1\, v_0^{\,2}}\right);$$

dagegen wird für den Rückgang aus

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi}\alpha - 0{,}1 \sin 2\alpha$$

erhalten:

$$(\alpha_1) = \ 33^0\ 15';\ (v_{min}) = v_0\left(1 - 0{,}1757\,\frac{Q r}{m_1\, v_0^{\,2}}\right),$$

$$(\alpha_2) = 132^0\ 35';\ (v_{max}) = v_0\left(1 + 0{,}2577\,\frac{Q r}{m_1\, v_0^{\,2}}\right).$$

Fragt man noch nach denjenigen Kurbelstellungen, in welchen die Geschwindigkeit der Kurbel gerade gleich der mittleren v_1 oder v_0 ist, so hat man nur

$$1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha \mp 0{,}1 \sin^2\alpha = 0$$

zu setzen und erhält daraus für den Hingang mittelst des oberen Vorzeichens

$$\alpha_0 = 106^0\ 30'$$

und für den Rückgang

$$(\alpha_0) = 73^0\ 30' = \pi - \alpha_0.$$

Für die Schleifenkurbel oder $\frac{r}{l} = 0$ erhält man natürlich aus

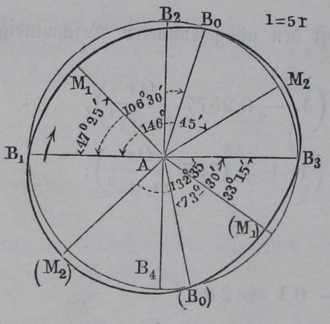
$$1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\,\alpha = 0$$

den Werth

$$\alpha_0 = (\alpha_0) = \frac{\pi}{2}.$$

Man kann sich von der Veränderlichkeit der Kurbelgeschwindigkeit graphisch eine Vorstellung verschaffen, wenn man den Radius AB, Fig. 564, der Kurbel als das Maß der mittleren Geschwindigkeit v_0 betrachtet und für jede Kurbelstellung die zugehörige Geschwindigkeit v vom Mittelpunkte A auf der Kurbelrichtung angetragen denkt. Die dadurch erhaltene geschlossene Curve $B_1\,M_1\,B_0\,M_2\,B_3\,(M_1)\,B_0\,(M_2)\,B_1$ läßt dann in ihren Abweichungen von dem Kurbelkreise die Schwankungen der Geschwindigkeit gegen die mittlere Geschwindigkeit v_0 übersehen. Man erkennt daraus, daß die Geschwindigkeit der Kurbel in ihrer mittleren Stellung B_2 beim Hingange genau um dieselbe Größe unter der mittleren Geschwindigkeit v_0 verbleibt, um welche ihre Geschwindigkeit in der mittleren Stellung B_4 beim Rückgang den Durchschnittswerth v_0 übertrifft. Man erhält diese Geschwindigkeiten in B_2 und B_4 aus der Formel für v, wenn man darin $\alpha = \frac{\pi}{2}$ einsetzt, zu

Fig. 564.



$$v = v_0\left(1 \mp \frac{r}{2l}\,\frac{Q\,r}{m_1\,{v_0}^2}\right).$$

Für die Schleifenkurbel werden diese Geschwindigkeiten gleich der mittleren v_0, es geht daher für dieselbe die Geschwindigkeitscurve durch die Eckpunkte B_1, B_2, B_3 und B_4 aller Quadranten. Nach den früheren Bemerkungen ergiebt sich übrigens ohne Weiteres, daß die in Fig. 564 gezeichnete Geschwindigkeitscurve auch dem Falle entspricht, daß der Antrieb von der Kurbelwelle ausgeht, wenn man nur annehmen will, daß die Kurbel sich in der entgegengesetzten Richtung $B_1\,B_4\,B_3\,\ldots$ umdrehe.

Die Bewegung der Kurbel erfolgt um so ungleichförmiger, je größer die Differenz zwischen der absolut größten und kleinsten Geschwindigkeit $(v_{max}) - v_{min}$ im Vergleiche zu der mittleren Geschwindigkeit v_0 ist. Man pflegt daher diesen Werth

$$\frac{(v_{max}) - v_{min}}{v_0} = \delta$$

mit dem Namen des **Ungleichförmigkeitscoefficienten** zu bezeichnen. Nach dem Vorhergehenden hat dieses Verhältniß, welches man beiläufig auch durch

$$2\,\frac{(v_{max}) - v_0}{v_0}$$

ausdrücken kann, für $\frac{r}{l} = 1/_5$ den Werth

$$\delta = 0,5154\,\frac{Q\,r}{m_1\,v_0^{\,2}},$$

während es für die Schleifenkurbel oder für $\frac{r}{l} = 0$ zu

$$\delta = 0,4210\,\frac{Q\,r}{m_1\,v_0^{\,2}}$$

sich ergab. Im Allgemeinen nimmt die Ungleichförmigkeit mit dem Verhältniß $\frac{r}{l}$ ab, und man wird zur Erzielung eines möglichst gleichförmigen Ganges neben einer entsprechend langen Lenkerstange eine genügend große rotirende Masse m_1 anwenden müssen. Ebenso erkennt man, daß bei gleicher Kraft Q und Masse m_1 sowie unter sonst gleichen Umständen die Gleichförmigkeit des Ganges um so größer werden muß, je größer die durchschnittliche Umdrehungsgeschwindigkeit v_0 gewählt wird. Ein Näheres darüber siehe bei den **Schwungrädern**.

Die folgende Tabelle enthält die Winkel und Größen der kleinsten und größten Geschwindigkeiten sowie die Ungleichförmigkeitscoefficienten für einige der gebräuchlicheren Verhältnisse $\frac{r}{l}$. Außerdem sind unter der Bezeichnung α_0 diejenigen Winkel angegeben, welchen eine Kurbelgeschwindigkeit gleich der mittleren zukommt, während die Geschwindigkeiten der Kurbel in ihren mittleren Stellungen unter der Bezeichnung $v_{\frac{\pi}{2}}$ aufgeführt sind.

Tabelle für die Kurbelgeschwindigkeiten.

$$C = \frac{Q\,r}{m_1 v_0^2}.$$

$l =$	$4\,r$	$5\,r$	$6\,r$	∞
v_{min}	$(1 - 0{,}2718\ C)\ v_0$	$(1 - 0{,}2577\ C)\ v_0$	$(1 - 0{,}2489\ C)\ v_0$	$(1 - 0{,}2105\ C)\ v_0$
α_1	$49^0\ 29'$	$47^0\ 25'$	$46^0\ 3'$	$39^0\ 32'$
v_{max}	$(1 + 0{,}1686\ C)\ v_0$	$(1 + 0{,}1757\ C)\ v_0$	$(1 + 0{,}1807\ C)\ v_0$	$(1 + 0{,}2105\ C)\ v_0$
α_2	$148^0\ 14'$	$146^0\ 45'$	$145^0\ 58'$	$140^0\ 28'$
(v_{min})	$(1 - 0{,}1686\ C)\ v_0$	$(1 - 0{,}1757\ C)\ v_0$	$(1 - 0{,}1807\ C)\ v_0$	$(1 - 0{,}2105\ C)\ v_0$
(α_1)	$31^0\ 46'$	$33^0\ 15'$	$34^0\ 2'$	$39^0\ 32'$
(v_{max})	$(1 + 0{,}2718\ C)\ v_0$	$(1 + 0{,}2577\ C)\ v_0$	$(1 + 0{,}2489\ C)\ v_0$	$(1 + 0{,}2105\ C)\ v_0$
(α_2)	$130^0\ 31'$	$132^0\ 35'$	$133^0\ 57'$	$140^0\ 28'$
α_0	$108^0\ 30'$	$106^0\ 30'$	$102^0\ 50'$	90^0
$v_{\pi/2}$	$(1 \mp 0{,}125\ C)\ v_0$	$(1 \mp 0{,}1\ C)\ v_0$	$(1 \mp 0{,}0833\ C)\ v_0$	v_0
δ	$0{,}5436\ C$	$0{,}5154\ C$	$0{,}4978\ C$	$0{,}4210\ C$