auch hier innerhalb gewisser Bewegungsperioden von genau gleichen Beträgen sind, gilt jedenfalls für den mit dem Namen „Beharrungszustand“ bezeichneten Zustand der Bewegung, wie er sich bei allen Maschinen sehr schnell von selbst einstellt, und wie er in den folgenden Untersuchungen immer vorausgesetzt werden soll. So lange bei einer Maschine die treibende Kraft den durchschnittlichen Widerstand übertrifft, wie dies nach dem Ingangsetzen einer Maschine während des sogenannten Anlaufes der Fall ist, wird die überschießende Arbeit der treibenden Kraft fortwährend zu Beschleunigung der Massen verwendet. Erst wenn die mit Vergrößerung der Geschwindigkeit gewachsenen Arbeitswiderstände einen durchschnittlichen Betrag erreicht haben, welcher dem Durchschnittswerthe der Triebkraft gleich ist, welche letztere im Allgemeinen mit zunehmender Geschwindigkeit kleiner zu werden pflegt, stellt sich jener gedachte Beharrungszustand im Gange der Maschine ein. In diesem Zustande stellen sich aus den oben erläuterten Gründen gewisse periodische Geschwindigkeitsänderungen in regelmäßiger Wiederholung ein, so lange in der Wirkung der Triebkraft und des Widerstandes nichts geändert wird. Beim Außerbetriebsetzen der Maschine, bei welchem die treibende Kraft gänzlich außer Wirkung gesetzt wird, muß die Bewegung noch eine gewisse Zeit hindurch vermöge der den Massen innewohnenden lebendigen Kraft andauern. Diese Bewegung, der sogenannte „Auslauf“ der Maschine, ist in ähnlicher Art durch eine fortgesetzte Verzögerung bis zum schließlichen Stillstande gekennzeichnet, in welcher der Anlauf durch eine stetige Beschleunigung vom Zustande der Ruhe bis zu dem der normalen Geschwindigkeit charakterisirt wird. Es ist selbstredend, daß die während des Anlaufs von der treibenden Kraft in den Massen angehäufte lebendige Kraft während des Auslaufs in ihrem vollen Betrage wieder hergegeben wird.

§. 144. **Die Kurbel mit constanter Kolbenkraft.** Um den Bewegungszustand der Kurbel unter Berücksichtigung der Massenwirkungen zu verfolgen, soll zunächst die einfachere Voraussetzung gemacht werden, daß die auf den Kreuzkopf wirkende Kolbenkraft Q von constanter Größe sein soll, wie diese Voraussetzung dem Falle einer Volldruckmaschine oder bezw. einer Wasserpumpe entspricht, und soll später die Untersuchung für eine veränderliche Kolbenkraft, wie sie den Expansionsmaschinen und Luftpumpen zukommt, besonders geführt werden. Auch die Kraft an der Kurbelwelle sei von constanter Größe und habe dieselbe an einem Halbmesser gleich dem Kurbelarme r den Werth P, und zwar soll zunächst entsprechend einer Dampfmaschine vorausgesetzt werden, daß der Antrieb von der Kolbenstange ausgeht, so daß man unter P einen Widerstand zu denken hat, wie er etwa von der durch die Dampfmaschine zu betreibenden Mühlen- oder anderen Anlage auf die Kurbelwelle wirksam ist. Wenn, wie bei dem Betriebe der Pumpwerke so häufig der Fall ist, der Antrieb von der Kurbelwelle ausgeht, so hat man sich unter P die constante, auf den Kurbelhalbmesser reducirte Betriebskraft zu denken, welche in Form eines Räder- oder Riemendruckes auf die Kurbelwelle ausgeübt wird. Unter m_1 und m_2 seien bezw. die rotirenden und die schwingenden Massen verstanden, so daß die Masse der Lenkerstange in dem vorstehend ermittelten Verhältnisse von ein und zwei Drittel in jenen Massen m_1 und m_2 enthalten ist. Auf die Gewichte der schwingenden Massen soll indeß hier keine Rücksicht genommen werden, indem man die Schubrichtung des Kreuzkopfes entweder als eine horizontale voraussetzen mag, oder indem man bei verticaler Kolbenbewegung sich denken kann, daß die Gewichte der auf- und niedergehenden Theile durch ein an der Kurbelwelle angebrachtes Gegengewicht im Gleichgewichte gehalten werden. Ueber die Verhältnisse und Wirkungen eines solchen Gegengewichtes soll in der Folge Näheres angegeben werden.

Den Beharrungszustand der Maschine vorausgesetzt folgt zunächst allgemein, daß bei dem Kurbelgetriebe die Periode der Bewegung durch eine Kurbeldrehung dargestellt ist, da das ganze System in derselben Lage, etwa in einem todten Punkte, immer wieder genau dieselben Geschwindigkeiten hat, und unter denselben Bedingungen sich befindet. Die Arbeit der Kolbenkraft Q während eines Hin- und Herganges ist daher genau gleich der Arbeit der Kraft P an der Welle, und man findet daher in dem vorliegenden Falle, wo Q constant ist, aus

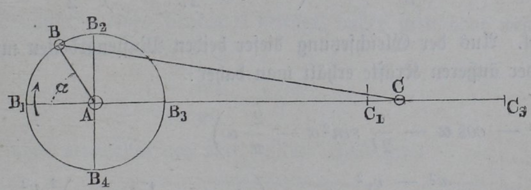
$$Q \,.\, 2 \,.\, 2r = P \,.\, 2\pi r$$

den Werth

$$P = \frac{2}{\pi}\, Q = 0{,}6366\ Q,$$

vorausgesetzt, daß von allen Nebenhindernissen, wie Reibungen, zuvörderst abgesehen werde. Unter Beibehaltung der bisherigen Bedeutung von r, l,

Fig. 563.



α, β und γ sei unter v die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens in einem beliebigen Augenblicke, unter v_1 diejenige im äußeren todten Punkte B_1, Fig. 563, und unter v_0 die durchschnittliche Geschwindigkeit des Kurbelzapfens verstanden, während wieder c die Geschwindigkeit des Kreuzkopfes in beliebiger Stellung desselben bedeuten soll.

Setzt man voraus, die Kurbel AB habe sich von der äußeren Todtlage AB_1 aus um den Winkel α gedreht, wobei der Kreuzkopf den Weg

$$C_1 C = s = r(1 - \cos\alpha) - \frac{r^2 \sin^2\alpha}{2l}$$

zurückgelegt hat, so ist die gesammte von den äußeren Kräften Q und P hierbei verrichtete Arbeit ausgedrückt durch:

$$A = Qs - Pr\alpha = Qr(1 - \cos\alpha) - Q\frac{r^2 \sin^2\alpha}{2l} - Q\frac{2}{\pi}r\alpha.$$

Diese Arbeitsdifferenz A ist daher nach dem Vorstehenden während der betrachteten Drehung α von den Massen m_1 und m_2 in Form von lebendiger Kraft entweder aufgenommen oder von ihnen abgegeben worden, je nachdem der Ausdruck für A einen positiven oder negativen Werth hat. Die Arbeit, welche die Massen aber aufgenommen oder verrichtet haben, läßt sich wie folgt bestimmen. Die rotirende Masse m_1, welche im todten Punkte die Geschwindigkeit v_1 hatte, bedurfte zur Erlangung der nunmehrigen Geschwindigkeit v der mechanischen Arbeit

$$m_1 \frac{v^2 - v_1^2}{2}.$$

Die schwingende Masse m_2 dagegen, welche im todten Punkte eine Geschwindigkeit gleich Null besaß, hat in C, wo ihre Geschwindigkeit zu dem Werthe

$$c = v\left(\sin\alpha - \frac{r}{2l}\sin 2\alpha\right)$$

angewachsen ist, hierzu die mechanische Arbeit

$$m_2\frac{c^2}{2} = m_2\left(\sin\alpha - \frac{r}{2l}\sin 2\alpha\right)^2\frac{v^2}{2}$$

gebraucht. Aus der Gleichsetzung dieser beiden Massenarbeiten mit der Arbeit A der äußeren Kräfte erhält man daher:

$$Qr\left(1 - \cos\alpha - \frac{r}{2l}\sin^2\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right)$$
$$= m_1\frac{v^2 - v_1^2}{2} + m_2\left(\sin\alpha - \frac{r}{2l}\sin 2\alpha\right)^2\frac{v^2}{2}.$$

Hieraus folgt die Geschwindigkeit v des Kurbelzapfens in der beliebigen, um den Winkel α vom äußeren todten Punkte abstehenden Lage zu

$$v = \sqrt{\frac{m_1 v_1{}^2 + 2\,Q r \left(1 - \cos\alpha - \frac{r}{2l}\sin^2\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right)}{m_1 + m_2\left(\sin\alpha - \frac{r}{2l}\sin 2\alpha\right)^2}}.$$

Diese Formel, welche für den Hingang des Kolbens von C_1 nach C_3 entwickelt worden ist, gilt übrigens auch für den Rückgang, wenn man darin den mit $\frac{r}{2l}$ behafteten Gliedern das entgegengesetzte Vorzeichen giebt, und den Winkel α von der inneren Todtlage AB_3 aus zählt.

Mit Rücksicht auf den immer nur kleinen Werth von $\frac{r}{2l}$, welcher meist den Betrag von 0,1 nicht übersteigt, kann man obigen Ausdruck mit genügender Annäherung zu

$$v = \sqrt{\frac{m_1 v_1{}^2 + 2\,Q r \left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right)}{m_1 + m_2 \sin^2\alpha}}$$

vereinfachen. Dieser Ausdruck für v, welchen man auch

$$v = v_1 \sqrt{\frac{1 + \frac{2\,Q r}{m_1 v_1{}^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right)}{1 + \frac{m_2}{m_1}\sin^2\alpha}}$$

schreiben kann, läßt nunmehr ein Urtheil über den Bewegungszustand der Kurbel zu, und es lassen sich insbesondere die kleinste und die größte Geschwindigkeit der letzteren bestimmen. Zu dem Ende möge zuvörderst bemerkt werden, daß die schwingende Masse m_2 im Vergleich zu der rotirenden m_1 in fast allen Fällen der Praxis so klein ist, daß das Verhältniß $\frac{m_2}{m_1}$ meistens nur Bruchtheile eines Procentes beträgt, daher man ohne wesentliche Ungenauigkeit das Glied im Nenner

$$\frac{m_2}{m_1}\sin^2\alpha$$

gegen die Einheit vernachlässigen darf. Man erhält dann

$$v = v_1 \sqrt{1 + \frac{2\,Q r}{m_1 v_1{}^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right)}$$
$$= v_1 \left[1 + \frac{Q r}{m_1 v_1{}^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right)\right].$$

Die Winkel α für die kleinste und die größte Kurbelgeschwindigkeit erhält man einfach durch

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = 0, \text{ d. h. } \sin \alpha = \frac{2}{\pi} = 0{,}6366.$$

Diesem Werthe entsprechen die beiden Supplementswinkel

$$\alpha_1 = 39^0\ 32' \text{ und } \alpha_2 = 140^0\ 28'.$$

Hiervon entspricht in dem vorliegenden Falle, wo der Antrieb von der Kolbenstange ausgeht, der spitze Winkel α_1 der kleinsten und der stumpfe Winkel α_2 der größten Geschwindigkeit, denn die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = \cos \alpha$$

ist in dem ersteren Falle positiv, in dem letzteren negativ. Es ist dieses Verhalten auch schon aus dem in §. 139 über die Umfangskraft Gesagten ersichtlich, da diese Umfangskraft U beim Beginne der Bewegung Null ist und erst nach einer gewissen Drehung die an der Kurbel wirkende Widerstandskraft P erreicht und überschreitet. Es ist auch deutlich, daß die beiden durch die Winkel α_1 und α_2 repräsentirten Kurbelstellungen diejenigen sind, in denen die Umfangskraft U genau den Werth der Widerstandskraft P erreicht, indem in diesen Stellungen der größten und kleinsten Geschwindigkeit die Beschleunigung der Kurbelwelle zu Null wird. Ebenso ergiebt sich leicht, daß für den Fall, daß der Antrieb von der Kurbelwelle ausgeht (Pumpwerke), umgekehrt der spitze Winkel α_1 der größten und der stumpfe Winkel α_2 der kleinsten Geschwindigkeit entspricht, da dann die Arbeit A der äußeren Kräfte das entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, und die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = -\cos \alpha$$

für α_1 negativ und für α_2 positiv wird.

Diese eminenten Geschwindigkeiten selbst ergeben sich, wenn man in die Formel für die Geschwindigkeit v jene Werthe von α_1 und α_2 einführt, wodurch man erhält:

$$v_{min} = v_1 \sqrt{1 - 0{,}4210 \frac{Q r}{m_1 {v_1}^2}} = v_1 \left(1 - 0{,}2105 \frac{Q r}{m_1 {v_1}^2}\right)$$
$$\text{für } \alpha_1 = 39^0\ 32';$$
$$v_{max} = v_1 \left(1 + 0{,}2105 \frac{Q r}{m_1 {v_1}^2}\right) \text{ für } \alpha_2 = 140^0\ 28'.$$

Für den Fall, daß der Antrieb von der Kurbel ausgeht, erhält man für die Geschwindigkeiten dieselben Werthe, nur daß, wie schon bemerkt, v_{min} mit α_2 und v_{max} mit α_1 zusammengehört. Es gelten nämlich die für v gefundenen Formeln auch für diesen Fall, sobald man dem mit Q behafteten Gliede, welches die Arbeit der äußeren Kräfte Q und P darstellt, das entgegengesetzte Zeichen giebt, so daß man für diesen Fall

$$v = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 - 2\,Q r \left(1 - \cos\alpha - \frac{r}{2\,l} \sin^2\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right)}{m_1 + m_2 \left(\sin\alpha - \frac{r}{2\,l} \sin^2\alpha\right)^2}}$$

hat. Setzt man in der allgemeinen Formel für die Geschwindigkeit v für α den Winkel π entsprechend einer halben Umdrehung, so erhält man für den inneren todten Punkt:

$$v = \sqrt{\frac{m_1 v_1^2 + 2\,Q r \left(1 - \cos 180^0 - \frac{r}{2\,l} \sin^2 180^0 - \frac{2}{\pi}\pi\right)}{m_1 + m_2 \left(\sin 180^0 - \frac{r}{2\,l} \sin 360^0\right)^2}} = v_1,$$

woraus man schließt, daß die Geschwindigkeit der einfachen Kurbel in deren beiden Todtlagen von gleicher Größe ist. Um auch die mittlere oder durchschnittliche Geschwindigkeit v_0 zu bestimmen, für welche man bei n Umdrehungen der Kurbel in der Minute

$$v_0 = \frac{n \,.\, 2\pi r}{60} = 0{,}1047\; n\, r$$

setzen kann, gehe man von der angenäherten Formel

$$v = v_1 \left[1 + \frac{Q r}{m_1 v_1^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right) - \frac{m_2}{2\,m_1} \sin^2\alpha\right]$$

aus und schreibe dieselbe

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_1}\left[1 - \frac{Q r}{m_1 v_1^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right) + \frac{m_2}{2\,m_1}\,\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right].$$

Bezeichnet nun ∂t ein Zeitelement, so hat man

$$v\,\partial t = r\,\partial\alpha,$$

daher

$$\partial t = \frac{r\,\partial\alpha}{v} = \frac{r\,\partial\alpha}{v_1}\left[1 - \frac{Q r}{m_1 v_1^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right) + \frac{m_2}{2\,m_1}\,\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}\right].$$

Durch Integration dieses Ausdrucks zwischen den Grenzen π und 0 erhält man dann die Zeit einer halben Umdrehung:

$$t = \frac{r}{v_1}\left[\pi - \frac{Q r}{m_1 v_1^2}\left(\pi - \sin\pi - \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2}\right) + \frac{m_2}{4\,m_1}\left(\pi - \frac{\sin 2\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{r\pi}{v_1}\left(1 + \frac{m_2}{4\,m_1}\right).$$

Daher folgt die mittlere Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{r\pi}{t} = \frac{v_1}{1 + \frac{m_2}{4m_1}} = v_1\left(1 - \frac{m_2}{4m_1}\right).$$

Dieser Werth ist nur um eine sehr kleine Größe von v_1 verschieden, so daß man mit genügender Annäherung die mittlere Geschwindigkeit v_0 gleich derjenigen v_1 in den todten Punkten annehmen und daher in allen bisher entwickelten Formeln auch v_0 anstatt v_1 setzen kann.

Anmerkung. Wollte man die Vernachlässigung von m_2 gegen m_1 nicht zulassen, so könnte man einen näheren Ausdruck für die eminenten Geschwindigkeiten aus der allgemeinen Formel

$$v = v_1 \sqrt{\frac{1 + \frac{2Qr}{m_1 v_1^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right)}{1 + \frac{m_2}{m_1}\sin^2\alpha}}$$

in folgender Art herleiten. Man schreibe

$$v = v_1 \sqrt{\left(1 - \frac{m_2}{m_1}\sin^2\alpha\right)\left[1 + \frac{2Qr}{m_1 v_1^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right)\right]}$$
$$= v_1\left[1 + \frac{Qr}{m_1 v_1^2}\left(1 - \cos\alpha - \frac{2}{\pi}\alpha\right) - \frac{m_2}{2m_1}\sin^2\alpha\right]$$

und erhält hieraus durch Differentiation:

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = v_1\left[\frac{Qr}{m_1 v_1^2}\left(\sin\alpha - \frac{2}{\pi}\right) - \frac{m_2}{2m_1}\sin 2\alpha\right] = 0.$$

Hieraus folgt zur genaueren Bestimmung von α_1 und α_2

$$\sin\alpha = \frac{2}{\pi} + \frac{m_2 v_1^2}{2Qr}\sin 2\alpha.$$

Aus dieser Gleichung lassen sich α_1 und α_2 am besten probeweise bestimmen, etwa indem man zunächst für α die Werthe $39^0\,32'$ und $140^0\,28'$ einführt und behufs der Erfüllung der Gleichung die geringe Correctur vornimmt. Für die Geschwindigkeiten erhält man mit jenen Werthen $\alpha_1 = 39^0\,32'$ und $\alpha_2 = 140^0\,28'$ die Ausdrücke:

$$v_{min} = v_1\left(1 - 0{,}2105\,\frac{Qr}{m_1 v_1^2} - 0{,}2026\,\frac{m_2}{m_1}\right)$$

und

$$v_{max} = v_1\left(1 + 0{,}2105\,\frac{Qr}{m_1 v_1^2} - 0{,}2026\,\frac{m_2}{m_1^2}\right).$$

§. 145. **Einfluss der Länge der Schubstange.** Bisher ist immer die Voraussetzung gemacht worden, daß die Länge l der Lenkerstange gegen den Halbmesser r der Kurbel so groß sei, daß man die Glieder mit dem Factor $\frac{r}{2l}$ vernachlässigen könne. Streng genommen gelten daher die gefundenen Be-