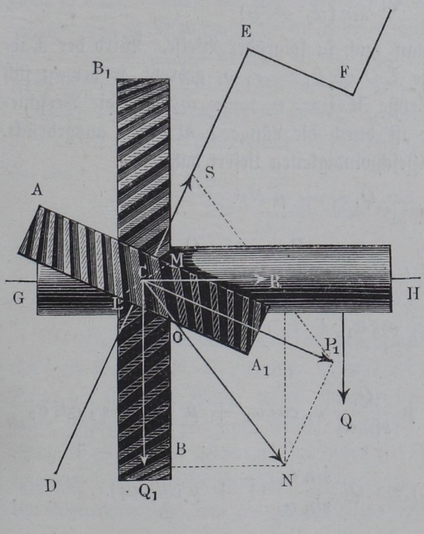
also den winzigen Betrag von etwa $6\frac{1}{2}$ Procent. Man erkennt aus diesem Beispiele deutlich, wie wenig ökonomisch die gewöhnlichen Schraubenwinden sind.

Schraubenräder. Mit der Schraube ohne Ende stehen die Schrauben- §. 133.
räder in engem Zusammenhange. Ein Schraubenräderwerk besteht nämlich im Wesentlichen aus zwei in einander greifenden Schraubenspindeln. Daß man auch das Schneckenrad der Schraube ohne Ende als eine Schraubenspindel ansehen kann, ergiebt sich leicht aus der folgenden Betrachtung. Denkt man die Schraube ohne Ende als eine mehrgängige ausgeführt, so nimmt dieselbe die Form eines Rades mit so viel Zähnen an, als die Schraube neben einander laufende Gewinde besitzt. Wäre z. B. die Schraube aus eben so vielen Gewinden zusammengesetzt, wie das Schneckenrad Zähne besitzt, und wären die Halbmesser r der Schraube und R des Rades gleich, so würde ein Formunterschied zwischen Schraube und Schneckenrad gar nicht existiren, und man könnte beide mit einander verwechseln. Man erhält in diesem Falle zwei gleiche auf rechtwinkelig zu einander stehenden Axen befindliche Räder, welche ihrer Natur nach als Schraubenspindeln betrachtet werden können. In solcher Weise kann man zu irgend zwei windschief im Raume stehenden Axen zwei Schraubenspindeln von verschiedenen Durchmessern denken, und erhält so als allgemeinen Fall das Schraubenräderpaar, Fig. 521, von welchem die bisher betrachtete Schraube ohne Ende nur ein specieller Fall ist, welcher durch rechtwinkelige Axenlage und dadurch charakterisirt ist, daß die Zähnezahl des einen Rades, d. h. der Schnecke, in der Regel durch 1 gegeben ist.

Fig. 521.



Um die Verhältnisse von Kraft und Last sowie die Widerstände zwei solcher Schraubenräder zu beurtheilen, seien mit r_1 und r_2 die mittleren Halbmesser der Schraubenspindeln AA_1 und BB_1 (Fig. 521) und mit α_1 und α_2 die Neigungswinkel der mittleren Schraubenlinien gegen die Radebenen bezeichnet, so daß, wenn die Berührung der Zähne in LM stattfindet, $LMA = \alpha_1$ und $LMB = \alpha_2$, also der Axenwinkel

$ECH = 180^0 - (\alpha_1 + \alpha_2)$ ist. Bei einer Drehung des Radumfanges A um die Größe $v_1 = r_1 \omega_1$ wird der Umfang des Rades B einen Weg $v_2 = r_2 \omega_2$ zurücklegen, so daß, wie leicht zu ersehen, zwischen diesen beiden Wegen das Verhältniß stattfindet:

$$v_1 : v_2 = LO : MO = \sin \alpha_2 : \sin \alpha_1.$$

Sind nun P_1 und Q_1 die in dem Berührungspunkte C der beiden Schraubenspindeln tangential an die mittleren Radebenen wirkenden Kräfte, so lassen sich dieselben ersetzen durch ihre parallel den Axen und normal zu der Schraubenlinie LM gerichteten Componenten CS, CR und CN. Für den Normaldruck CN hat man für den Fall, daß von der Reibung abgesehen wird:

$$P_1 = N \cos NCP_1 = N \sin \alpha_1$$

und

$$Q_1 = N \cos NCQ_1 = N \sin \alpha_2,$$

daher hätte man ohne Reibung:

$$P_1 = Q_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}.$$

Wird die Reibung an den Gewindegängen berücksichtigt, so hat man die Zerlegung nicht nach der Normale CN vorzunehmen, sondern nach einer um den Reibungswinkel ϱ davon abweichenden Geraden, in welcher man sich die Reaction des getriebenen Zahns gegen den treibenden wirkend denken kann, und man erhält dann ebenso

$$P_1 = Q_1 \frac{\sin (\alpha_1 + \varrho)}{\sin (\alpha_2 - \varrho)}.$$

Letzteren Ausdruck findet man auch in folgender Weise. Wird der Radumfang von A um eine Größe $LO = v_1 = r_1 \omega_1$ gedreht, so bewegt sich der Umfang von B um die Größe $MO = v_2 = r_2 \omega_2$ und die Verschiebung der Zähne auf einander ist durch die Länge $LM = v$ ausgedrückt. Die Gleichung der virtuellen Geschwindigkeiten liefert daher:

$$P_1 v_1 = Q_1 v_2 + \mu N v.$$

Da nun

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1},\ N = \frac{P_1}{\sin \alpha_1} = \frac{Q_1}{\sin \alpha_2}$$

und

$$v = v_1 \cos \alpha_1 + v_2 \cos \alpha_2$$

ist, so kann man schreiben:

$$P_1 v_1 = Q_1 v_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} + \mu \frac{Q_1}{\sin \alpha_2} v_1 \cos \alpha_1 + \mu \frac{P_1}{\sin \alpha_1} v_2 \cos \alpha_2$$

oder

$$P_1 (1 - \mu \operatorname{cotg} \alpha_2) = Q_1 \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} (1 + \mu \operatorname{cotg} \alpha_1).$$

Setzt man $\mu = tang\, \varrho$ und multiplicirt beiderseits mit $sin\, \alpha_2\, cos\, \varrho$, so wird

$P_1\, (sin\, \alpha_2\, cos\, \varrho - cos\, \alpha_2\, sin\, \varrho) = Q_1\, (sin\, \alpha_1\, cos\, \varrho + cos\, \alpha_1\, sin\, \varrho)$,

welcher Ausdruck mit dem obigen

$$P_1 = Q_1\, \frac{sin\, (\alpha_1 + \varrho)}{sin\, (\alpha_2 - \varrho)}$$

übereinstimmt.

Für die Schraube ohne Ende ist $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, mit diesen Werthen wird

$$P_1 = Q_1\, \frac{sin\, (\alpha_1 + \varrho)}{sin\, (90^0 - \alpha_1 - \varrho)} = Q_1\, tang\, (\alpha_1 + \varrho)$$

wie früher.

Setzt man $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^0$, so erhält man für zwei Räder paralleler Axen mit schrägen Zähnen

$$P_1 = Q_1\, \frac{sin\, (\alpha_1 + \varrho)}{sin\, (180^0 - \alpha_1 - \varrho)} = Q_1.$$

In diesem Falle fällt also die Schraubenreibung ganz weg, was auch schon daraus folgt, daß eine Verschiebung der Zähne längs der Schraubenlinie nicht stattfindet, indem

$$v = v_1\, cos\, \alpha_1 + v_2\, cos\, \alpha_2 = 0$$

ist. Man darf hieraus aber nicht schließen, daß der Zahneingriff hierbei gänzlich ohne Reibung vor sich gehe, nur die Gewindereibung fällt aus, dagegen gilt in Bezug auf die im Obigen außer Acht gelassene eigentliche Zahnreibung, wie sie aus der Verschiebung der Zähne in radialer Richtung hervorgeht, das in §. 88 darüber Gesagte.

Wenn die Betriebskraft P an der Axe des Rades A in einem Abstande $EF = a$ und der Widerstand Q der Axe GH an einem Arme b wirkt, so hat man

$$P = \frac{r_1}{a}\, P_1 \text{ und } Q_1 = \frac{b}{r_2}\, Q,$$

folglich auch

$$P = \frac{r_1}{a}\, P_1 = \frac{r_1}{r_2}\, \frac{b}{a}\, Q\, \frac{sin\, (\alpha_1 + \varrho)}{sin\, (\alpha_2 - \varrho)}.$$

Die Zapfenreibungen der Axen bestimmen sich dann in bekannter Weise aus den Kräften P, P_1, Q und Q_1 wie bei gewöhnlichen Zahnrädern. In Folge der schrägen Zähne treten indessen bei den Schraubenrädern noch gewisse Zapfenreibungen auf, welche durch die mit den Axen parallelen Componenten S und R hervorgerufen werden. Diese letztgedachten Seitenkräfte erzeugen nicht nur Reibungswiderstände an den Stirnen oder Bundringen der Wellen, welche wie die gewöhnlichen Spurzapfenreibungen zu berechnen sind, sondern wegen ihrer excentrischen Wirkung auch noch gewisse Reibungen in den Halslagern. Letztere Widerstände sind um so größer, je kürzer die Axenlängen l_1 und l_2, zwischen den Zapfen gemessen, im Verhältnisse zu den Radhalbmessern sind, denn es sind die durch S und R in jedem der beiderseitigen Lager hervorgerufenen Seitendrucke durch

$$S_1 = S_2 = S\,\frac{r_1}{l_1} = \frac{P_1}{tang\,\alpha_1}\,\frac{r_1}{l_1}$$

und

$$R_1 = R_2 = R\,\frac{r_2}{l_2} = \frac{Q_1}{tang\,\alpha_2}\,\frac{r_2}{l_2}$$

gegeben.

In diesen axial gerichteten Seitendrucken besteht ein Hauptübelstand der Schraubenräder.

Hinsichtlich der Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 der beiden Räder ergab sich oben:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{r_1\,\omega_1}{r_2\,\omega_2} = \frac{sin\,\alpha_2}{sin\,\alpha_1},$$

daher ist das Umsetzungsverhältniß

$$n = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2\;sin\,\alpha_2}{r_1\;sin\,\alpha_1}.$$

Bezeichnet man mit t_1 und t_2 die Zahntheilungen, im Umfange der Räder gemessen, und mit z_1 und z_2 die Zähnezahlen, so ersieht man aus der Figur, daß

$$t_1\;sin\,\alpha_1 = t_2\;sin\,\alpha_2$$

sein muß, und hat daher auch

$$\frac{2\,\pi\,r_1}{z_1}\,sin\,\alpha_1 = \frac{2\,\pi\,r_2}{z_2}\,sin\,\alpha_2$$

oder

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2\;sin\,\alpha_2}{r_1\;sin\,\alpha_1} = n.$$

Es ist daher auch hier wie bei gewöhnlichen Zahnrädern das Umsetzungsverhältniß umgekehrt den Zähnezahlen proportional. Für die Berechnung der Zahnstärke s normal auf der Schraubenlinie LM hat man zu bemerken, daß man, wie bei anderen Zahnrädern, für beide Räder nehmen kann:

$$s = \frac{19}{40}\,t_1\;sin\,\alpha_1 = \frac{19}{40}\,t_2\;sin\,\alpha_2.$$

Beispiel. Bei einem Schraubenräderwerke seien die Radhalbmesser $r_1 = 0{,}2$ Meter und $r_2 = 0{,}6$ Meter; und sei der Winkel, um welchen die Richtung des Zahnes von den Radebenen abweicht, $\alpha_1 = \alpha_2 = 60^0$. Wie groß ist die an dem Hebelsarme $a = 1{,}2$ Meter erforderliche Kraft, welche im Stande ist, einen Widerstand $Q = 1800$ Kilogramm an einem Hebelsarme von 0,4 Meter zu überwinden?

Ohne Rücksicht auf Nebenhindernisse ist

$$P_0 = \frac{r_1}{r_2} \frac{b}{a} Q \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{0,2}{0,6} \frac{0,4}{1,2} 1800 = 200 \text{ Kilogramm.}$$

Mit Rücksicht auf die Zahnreibung ist, wenn man $\mu = 0,1$, also $\varrho = arc\ tang\ 0,1 = 5^0\ 42'$ annimmt:

$$P = \frac{0,2}{0,6} \frac{0,4}{1,2} 1800 \frac{\sin 65^0\ 42'}{\sin 54^0\ 18'} = 200 \frac{0,913}{0,812} = 224,8 \text{ Kilogramm.}$$

Der Wirkungsgrad der beiden Räder ist also, abgesehen von der Zapfenreibung,

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{200}{224,8} = 0,889, \text{ oder etwa 89 Procent.}$$

Das Umsetzungsverhältniß hat man zu

$$n = \frac{r_2 \sin \alpha_2}{r_1 \sin \alpha_1} = 3.$$

Sollte dasselbe bei denselben Halbmessern und unveränderter Axenlage gleich 5 werden, so hätte man die Winkel α_1 und α_2 entsprechend zu ändern. Um diese Winkel zu bestimmen, hat man dann die Bedingungen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 120^0 \text{ und } \frac{r_2 \sin \alpha_2}{r_1 \sin \alpha_1} = 5,$$

oder:

$$\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} = \frac{5\ .\ 0,2}{0,6} = 1,667 = \nu.$$

Man findet hieraus die Winkel durch

$$\sin (\alpha_1 + \alpha_2) = \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 = \sin \alpha_1 (\cos \alpha_2 + \nu \cos \alpha_1)$$
$$\cos (\alpha_1 + \alpha_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \nu \sin^2 \alpha_1$$
$$= \cos \alpha_1 (\cos \alpha_2 + \nu \cos \alpha_1) - \nu.$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen wird:

$$\frac{\sin (\alpha_1 + \alpha_2)}{\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + \nu} = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = tang\ \alpha_1;$$

daher

$$tang\ \alpha_1 = \frac{\sin 120^0}{\cos 120^0 + 1,667} = \frac{0,866}{-0,5 + 1,667} = \frac{0,866}{1,167} = 0,7420,$$

daher

$$\alpha_1 = 36^0\ 35' \text{ und } \alpha_2 = 83^0\ 25'.$$

Die nunmehr erforderliche Kraft ohne Nebenhindernisse wäre

$$P_0 = \frac{0,2}{0,6} \frac{0,4}{1,2} 1800 \frac{\sin 36^0\ 35'}{\sin 83^0\ 25'} = 120 \text{ Kilogramm,}$$

dagegen mit Berücksichtigung der Zahnreibung:

$$P = \frac{0,2}{0,6} \frac{0,4}{1,2} 1800 \frac{\sin 42^0\ 17'}{\sin 77^0\ 43'} = 137,8 \text{ Kilogramm,}$$

daher ist der Wirkungsgrad dieser Räder:

$$\eta = \frac{P_0}{P} = \frac{120}{137,8} = 0,871 \text{ oder circa 87 Procent.}$$

Der Normaldruck N bestimmt sich sonach zu

$$N = \frac{a}{r_1} \frac{P}{sin\, \alpha_1} = \frac{1,2\ .\ 137,8}{0,2\ .\ 0,596} = 1387 \text{ Kilogramm.}$$

Hieraus berechnet sich nach §. 78 die Zahnstärke resp. die normale Theilung t für gußeiserne Zähne zu

$$t = 1,73 \sqrt{N} = 1,73 \sqrt{1387} = 64,4 = rot.\ 65 \text{ Millimeter,}$$

folglich sind die Umfangstheilungen

$$t_1 = \frac{t}{sin\, \alpha_1} = \frac{65}{0,596} = 109,1 \text{ Millimeter,}$$

$$t_2 = \frac{t}{sin\, \alpha_2} = \frac{65}{0,993} = 65,5 \text{ Millimeter.}$$

Endlich bestimmen sich hieraus die Zähnezahlen zu

$$z_1 = \frac{2\pi r_1}{t_1} = \frac{6,28\ .\ 200}{109,1} = 11,5,$$

$$z_2 = \frac{2\pi r_2}{t_2} = \frac{6,28\ .\ 600}{65,5} = 57,6,$$

wofür passend 12 und 60 Zähne zu nehmen sind, so daß die Umfangstheilungen zu $t_1 = \frac{6,28\ .\ 200}{12} = 104,67$ Millimeter und $t_2 = \frac{6,28\ .\ 600}{60} = 62,8$ Millimeter sich corrigiren.

§. 134. **Dimensionen der Schrauben.** Die einzelnen Dimensionen der Schraubengewinde pflegt man in der Regel im Verhältniß zu der Schraubenstärke oder dem Durchmesser d der Schraubenspindel zu wählen, wenigstens gilt dies allgemein von den scharfgängigen Befestigungsschrauben, für welche fast ausschließlich von den Fabrikanten aus Gründen der Bequemlichkeit beim praktischen Gebrauche das von Whitworth aufgestellte einheitliche Gewindesystem angenommen ist. Eine größere Freiheit ist dagegen in der Wahl der Verhältnisse bei den flachgängigen Schrauben gelassen, wie sie meist als Bewegungsorgane für Windewerke, Pressen ꝛc. gebraucht werden, und bei welchen die einzelnen Abmessungen, insbesondere die Steigung und der Neigungswinkel der Gewinde in der Regel aus dem zu erlangenden Umsetzungsverhältnisse der Geschwindigkeit sich ergeben.

Der Durchmesser der Schraubenspindel ergiebt sich aus den auf die Schraube einwirkenden Kräften nach den im Thl. I behandelten Gesetzen der Festigkeit. Die Schraubenspindeln sind fast allgemein und zwar die Befestigungsschrauben immer durch den axial wirkenden Druck auf Abreißen in Anspruch genommen, nur bei Winden und Pressen, sowie manchen Stell-