mittelt zu $O' G = \omega_2 = \omega \sin \eta$. Diese Drehung erzeugt eine Bohrbewegung der Flächen auf einander und ist die daraus entspringende Reibung wie diejenige conischer Räder zu beurtheilen.

4) Eine Verschiebung nach der Axe der unter 3) angeführten Bohrbewegung im Betrage $s_2 = s \sin \eta + \omega e \cos \eta$. Diese Verschiebung, welche eine Reibung analog derjenigen bei Stirnrädern hervorruft, bildet mit der unter 3) angegebenen Drehung eine Schraubenbewegung. Es geht hieraus hervor, daß die den Rädern zukommende Schraubenbewegung um die Momentanaxe sich jederzeit ersetzen läßt durch zwei andere Schraubenbewegungen, von denen die eine um die Berührungslinie zweier Zähne erfolgt und die andere um eine Axe, welche auf der Berührungslinie sowie auf dem kürzesten Abstande dieser von der Momentanaxe im Fußpunkte dieses Abstandes senkrecht steht.

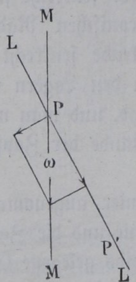
Daß auch bei hyperboloidischen ähnlich wie bei conischen Rädern der zwischen zwei Zähnen an deren Berührungslinie wirkende senkrecht zu den Zahnflächen gerichtete Druck gewisse Reactionen in den Lagern und an den Stirnflächen der Axenzapfen erzeugt, ist selbstredend, und man wird in jedem einzelnen Falle die daraus resultirenden Widerstände der Zapfenreibungen leicht ermitteln können.

Räder mit schrägen Zähnen. Bisher ist immer angenommen §. 88.
worden, daß die mit dem dritten oder Hülfsaxoid verbundene und die Zahnflächen erzeugende Linie eine auf dem Umfange des Hülfsaxoids gelegene Gerade, also eine Seitenlinie des letzteren sei. Aus der allgemeinen Gültigkeit des in §. 82 bewiesenen Bildungsgesetzes folgt aber ohne Weiteres, daß diese Bedingung keineswegs festgehalten werden muß, daß vielmehr jede beliebige krumme oder gerade Linie theoretisch richtige Zahnflächen erzeugt, auch wenn sie nicht in der Umfläche des Hülfsaxoids gelegen, sondern nur mit diesem fest verbunden ist. Diese Bemerkung führt in sehr einfacher Art zur Erläuterung der Zahnformen, welche man in Anwendung zu bringen hat, wenn man die Räder mit sogenannten schrägen Zähnen versehen will, wie dies insbesondere bei Stirnrädern schon längst, zuerst von White, geschehen ist, nach welchem diese Räder auch wohl den Namen der White'schen Räder führen (vergl. §. 79). Die Gründe, aus welchen man Räder paralleler Axen zuweilen mit Zähnen versieht, die gegen die Axen geneigt sind, können zweierlei sein. Man will einerseits eine gleichmäßigere Bewegungsübertragung dadurch erzeugen, daß gleichzeitig eine größere Anzahl von Zähnepaaren im Eingriffe stehen und die ruckweise und absetzende Bewegung einer stetigeren Platz macht, und hofft andererseits den Widerstand der Zahnreibung möglichst herabzuziehen, ja sogar gänzlich zu beseitigen. In wie weit das letztere möglich ist, ergiebt sich leicht aus der folgenden Betrachtung. Ein Kraftübertrag zwischen Rädern irgend welcher Art, welcher gänzlich frei von gleitender Reibung ist (die sehr kleine wälzende Reibung wird auch hier, wie bisher

immer, vernachlässigt), ist nur möglich, wenn die wirklich zwischen zwei Zähnen stattfindende relative Bewegung mit der zugehörigen Momentanaxenbewegung übereinstimmt, und diese selbst lediglich eine wälzende, von jeder Gleitung freie Bewegung ist. Da letzteres bei windschiefen Axen nicht der Fall ist, so kann zwischen Hyperboloidenrädern überhaupt nicht ein reibungsloser Kraftübertrag stattfinden, auch selbst dann nicht, wenn dieselben ganz ohne Zähne in Form von Frictionsrädern dargestellt werden.

Bei den Stirnrädern und conischen Rädern dagegen besteht die Momentanbewegung fortwährend aus einer bloßen Drehung um die Momentanaxe und ist frei von Gleitung, man wird daher eine ganz reibungslose Kraftübertragung in jedem Augenblicke nur dann ermöglichen können, wenn auch in jedem Augenblicke die wirkliche Berührung in einem Punkte der Momentanaxe, aber in keinem anderen Punkte außerhalb derselben stattfindet. Denn sei M, Fig. 288, die Momentanaxe, L eine Berührungslinie zweier Zähne welche mit M etwa den Punkt P gemein habe, so kann man die Momentanaxenbewegung ω zerlegen in zwei Drehungen um eine in L fallende und eine dazu senkrechte durch P gehende Axe. Die letztgedachte Drehung muß offenbar in jedem zweiten Berührungspunkte P' außerhalb von M bohrende Wirkungen, daher Reibungen hervorrufen. Bei den bisher betrachteten conischen Rädern treten diese Bohrbewegungen, wie oben gezeigt, immer auf, indem dabei der Axendurchschnitt fortwährend als der der Momentanaxe und der Berührungslinie zweier Zähne gemeinsame Punkt figurirt. Bei den Stirnrädern dagegen, wo dieser Schnittpunkt als unendlich fern angenommen werden muß, geht diese Bohrung bekanntlich in eine Verschiebung über, deren Betrag direct von dem Abstande e abhängt, in welchem die Berührungslinie der Zähne zu der Momentanaxe parallel ist. In beiden Fällen verschwindet die Reibung zwischen je zwei Zähnen nur in dem Augenblicke, in welchem die Berührungslinie mit der Momentanaxe zusammenfällt.

Fig. 288.

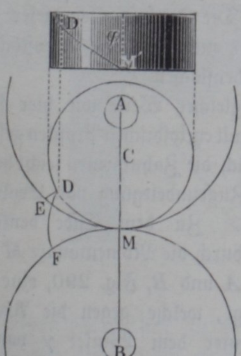


Aus dem Vorstehenden ist schon ersichtlich, daß ein Kraftübertrag ohne Zahnreibung nur bei dem sogenannten Präcisionseingriffe, d. h. bei punktweiser Berührung, niemals bei einem Krafteingriffe stattfinden kann, da bei Voraussetzung des letzteren mit Nothwendigkeit das stete Zusammenfallen der Berührungslinie in allen ihren Punkten mit der Momentanaxe folgen müßte. Diese Voraussetzung weist offenbar auf die Ausführung der Räder als Frictionsräder, also Weglassung von Zähnen überhaupt hin.

Man kann sich von einem Zahneingriffe, welcher frei von Reibung ist, in folgender Art eine Anschauung verschaffen. Man denke sich auf dem

Umfange des Theilkreiscylinders des einen von zwei Stirnrädern nach irgend einer gegen die Axe beliebig geneigten Linie, z. B. nach einer cylindrischen Schraubenlinie, eine äußerst dünne Rippe angebracht, etwa in Form eines dünnen Drahts. Wenn nun die beiden Theilkreiscylinder mit gewissem Drucke gegen einander gepreßt werden, so wird bei ihrer Umdrehung die erwähnte sehr dünne Rippe des einen Cylinders in dem anderen eine äußerst seichte Furche hinterlassen, deren Form von der Form jener Rippe abhängig ist, und zwar werden Rippe und Furche sich stets nur in einem einzigen Punkte, nämlich in demjenigen berühren, welcher in der Momentanaxe, d. h. in der geraden Berührungslinie der beiden Cylinder gelegen ist. Würde man nun die beiden Räder mit Zähnen versehen, deren Flächen nach dem Laufe jener Rippe und Furche so gebildet sind, daß die Berührung zwischen ihnen stets nur in einem Punkte der Momentanaxe stattfindet, so würden diese Räder offenbar in einem Präcisionseingriffe stehen, welcher mit einem Reibungswiderstande nicht behaftet ist, da die relative Bewegung hierbei fortwährend auf eine Wälzung um den Berührungspunkt beschränkt bleibt. Da nun aber bei einem solchen Eingriffe der ganze zu übertragende Druck zwischen den Zähnen fortwährend in einem einzigen Punkte concentrirt ist, so wird bei größeren Kräften die richtige Form jener Zahnflächen gar bald gestört sein, so daß dann die Berührung in mehr als einem Punkte stattfindet. In Folge dessen stellen sich Reibungen und daher Verschleiß ein, und man erkennt leicht, daß jener vorausgesetzte Präcisionseingriff unvermeidlich in einen Krafteingriff übergehen muß, bei welchem nach dem Obigen der Uebertrag nicht mehr ohne Friction möglich ist. Wenn man daher zwei Stirnräder etwa zur Erzielung einer möglichst gleichmäßigen Bewegung mit schrägen Zähnen versehen will, so wird man gut thun, von vornherein die Zähne so zu gestalten, daß sie in einer gewissen Linie sich berühren oder in einem Krafteingriffe zusammenstehen, und nicht erst durch den Verschleiß der Präcisionseingriff in einen Krafteingriff übergeführt wird. Für diesen Fall nun ergeben sich die Flächen, durch welche diese schrägen Zähne begrenzt werden müssen, in derselben Einfachheit, wie für gerade Zähne aus dem allgemeinen Zahnbildungsgesetze.

Fig. 289.

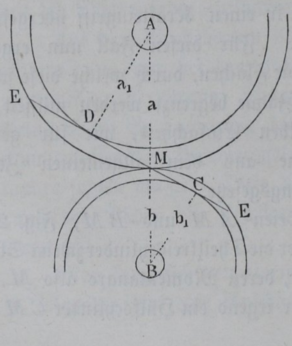


Seien AM und BM, Fig. 289, wieder die Theilkreiscylinder zweier Stirnräder, deren Momentanaxe also M, sei ferner irgend ein Hülfscylinder CM angenommen, welcher in bekannter Weise durch seine Abwälzung auf B die Zahnköpfe für dieses Rad und in A die Wurzeln für dieses letztere erzeugen soll. Irgend ein Punkt D im Umfange dieses Cylinders erzeugt dabei die Epicycloide FD und die Hypocycloide ED, welche bei den geraden Zähnen als die Grundlinien der cylindrischen Zahnflächen auftreten. Wenn man nun aber hier nicht die in D sich projicirende gerade Seite des Hülfscylinders als Erzeugende annimmt, sondern als solche eine Schraubenlinie DM voraussetzt, welche auf dem Cylinder C unter dem Neigungswinkel φ gegen die Axe gezeichnet ist, so erkennt man sehr leicht, daß die durch diese Schraubenlinie erzeugten Zahnflächen nicht mehr cylindrische, sondern Schraubenflächen sein werden. Die Durchschnitte derselben mit irgend welcher Ebene senkrecht zu den Axen stimmen dann mit den gedachten cycloidischen Curven FD und und ED überein, und die Ganghöhe dieser Schraubenflächen beträgt entsprechend

$$h_a = \frac{2\pi a}{tang\,\varphi} \quad \text{und} \quad h_b = \frac{2\pi b}{tang\,\varphi},$$

wenn $AM = a$ und $BM = b$ die Halbmesser der Räder sind. Als Eingriffsfläche muß auch jetzt die Umfläche des erzeugenden Cylinders C angesehen werden, und zwar findet die Berührung zweier Zähne immer in der erzeugenden Schraubenlinie DM statt. Da diese Berührungslinie die Momentanaxe fortwährend in einem Punkte schneidet, so ist es mit Rücksicht auf Fig. 288 klar, daß die sich einstellende Reibung nicht aus einer Verschiebung der Zahnflächen auf einander wie bei geraden Zähnen, sondern aus einer drehenden oder bohrenden Bewegung um den gedachten Durchschnittspunkt resultirt. Für diese schrägen Zähne mit cycloidischen Durchschnitten gelten offenbar ganz analoge Bemerkungen, wie für die geraden Zähne, und man kann namentlich das in §§. 69 bis 72 über Geradflanken sowie Triebstöcke, über äußere und innere Verzahnung sowie über die Zahnstange Angeführte ohne Weiteres hierauf anwenden. Die Flächen aller dieser Zähne, auch der entsprechenden Triebstöcke, sind Schraubenflächen.

Fig. 290.



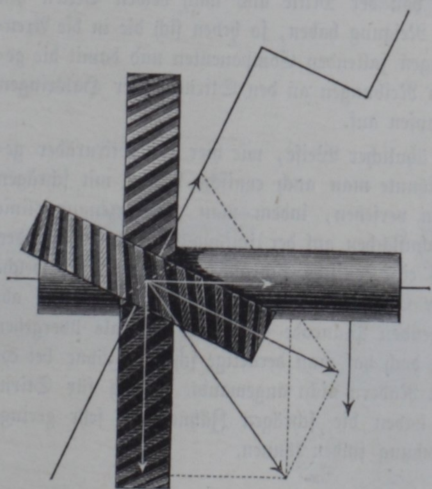
In gleicher Weise wie hier für die Zähne mit cycloidischen Profilen geschehen, lassen sich die Zahnformen leicht herleiten unter Zugrundelegung von Evolventenprofilen. Zu dem Ende denke man wieder durch die Momentanaxe M zweier Räder A und B, Fig. 290, eine Ebene E gelegt, welche gegen die Axenebene AB unter dem Winkel γ von etwa 75^0 geneigt ist. Dann wickele man diese Ebene, wie in §. 73 auf die beiden berührenden Hülfscylinder AD und AC auf, betrachte aber als Erzeugende nicht mehr eine mit den Axen parallele, sondern eine in der Ebene E liegende und gegen die Axen unter dem beliebigen Winkel φ geneigte Gerade DC. Es ist deutlich, daß diese Linie bei der gedachten Aufwickelung auf die Cylinder AD und BC zwei Schraubenflächen erzeugen wird, deren Ganghöhen beziehungsweise durch

$$h_a = \frac{2\,\pi\,a_1}{tang\,\varphi} \quad \text{und} \quad h_b = \frac{2\,\pi\,b_1}{tang\,\varphi}$$

gegeben sind, und deren Durchschnitte mit Ebenen senkrecht zu den Axen die Evolventen der Kreise AD und BC sind, also Flächen, welche in §. 86 mit dem Namen Spiraloide belegt wurden.

Diese Schraubenflächen stimmen ihrem Charakter nach offenbar mit denjenigen überein, welche oben als angenäherte Zahnformen für die Kehlkreisräder windschiefer Axen angeführt worden sind, und es ist nur der bereits in §. 86 angedeutete Unterschied hervorzuheben, daß während diese Flächen genaue Zahnformen für die schrägen Zähne von Rädern paralleler Axen abgeben, sie nur annähernde Richtigkeit für die Kehlkreisräder windschiefer Axen gewähren. Letztere Räder, Fig. 291, sind ihrem Charakter nach Hyperboloidenräder, und die correcten Zahnformen für dieselben sind keine Schraubenflächen, sondern sind durch Wälzung und Schiebung eines Hülfshyperboloids auf den Axoiden in der in §. 86 angegebenen Weise erzeugt zu denken. Man pflegt indessen in der Praxis in der Regel die Kehlkreisräder windschiefer Axen mit dem Namen Schraubenräder zu belegen, doch geht aus dem Vorstehenden hervor, daß diese Bezeichnung eigentlich den schräg gezahnten Rädern paralleler Axen zukommt. Schließlich darf wohl auch noch darauf aufmerksam gemacht

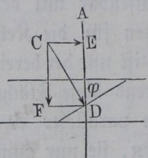
Fig. 291.



werden, daß der Winkel φ, unter welchem die schrägen Zähne gegen die parallelen Axen geneigt sind, ganz beliebig angenommen werden kann, wogegen bei den spiraloidischen Zähnen windschiefer Axe die erzeugende Linie ein- für allemal durch die Lage der Momentanaxe M gegeben ist, also durch die Beziehung $\alpha \sin \delta_1 = \beta \sin \delta_2$, wenn wie früher α und β die Umdrehungswinkel und δ_1 und δ_2 die Neigungen der Momentanaxe gegen die Axen bezeichnen.

Es ist übrigens leicht ersichtlich, daß bei den Rädern mit schrägen Zähnen wegen der schrägen Stellung der letzteren unter dem Winkel φ gegen die Axen die letzteren mit einem gewissen Drucke in ihrer Axenrichtung gegen die Lager gepreßt werden. Ist, Fig. 292, $CD = P$ der Normaldruck, welchen zwei Zähne auf einander ausüben, so ist die in die Richtung der Axe fallende Componente

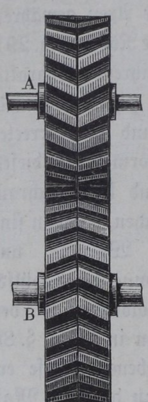
Fig. 292.



$$CF = P \sin \varphi,$$

welche eine Reibung an der Stirn der Zapfen erzeugt. Die auf Axendrehung wirkende Componente ist natürlich $CE = P \cos \varphi$. Wenn man die Räder nach Art der Fig. 293, mit Zähnen versieht, welche von der Mitte aus nach beiden Seiten hin gleiche Neigung haben, so heben sich die in die Axenrichtungen fallenden Componenten und damit die gedachten Reibungen an den Stirnen oder Halsringen der Zapfen auf.

Fig. 293.



In ähnlicher Weise, wie hier für Stirnräder gezeigt, könnte man auch conische Räder mit schrägen Zähnen versehen, indem man als Erzeugungslinie der Zahnflächen auf der Umfangsfläche des wälzenden Kegels eine conische Schraubenlinie annähme, welche bei der Evolventenverzahnung in eine auf dem abzuwälzenden Planrade befindliche Spirale übergehen würde, doch hat man derartige schräge Zähne bei conischen Rädern nicht angewandt. Auch für Stirnräder haben die schrägen Zähne nur sehr geringe Anwendung finden können.

§. 89. **Construction der Zahnräder.** Die Zahnräder werden fast immer aus Gußeisen, nur die kleinsten aus Stahl, Schmiedeeisen oder Messing gemacht, und zwar aus einem Stücke bis zu mittlerer Größe (2 bis 3 Meter Durchmesser), aus mehreren Stücken nach Art der Wasserräder bei größerem Durchmesser. Hölzerne Räder wendet man heute wegen ihrer Ungenauigkeit