

r_1 und r_2 die Halbmesser AM und BM , und setzt man die Halbmesser der abgewickelten Sektoren $GM = \rho_1$ und $HM = \rho_2$, so hat man, unter δ_1 und δ_2 wieder die Winkel AOM und BOM verstanden:

$$\rho_1 = \frac{r_1}{\cos \delta_1} \quad \text{und} \quad \rho_2 = \frac{r_2}{\cos \delta_2}.$$

§. 86. **Hyperboloidenräder.** Die Bildung richtiger Zahnformen für die Räder windschiefer Axen ergibt sich nun aus dem allgemeinen Bildungsgesetze §. 82 von selbst. Als Hilfsaxoid, welches die zugehörigen Zahnflächen erzeugt, hat man hier zu den beiden hyperboloidischen Momentanaxenflächen ein drittes Hyperboloid anzunehmen, dessen Rehlkreis halbmesser d_3 , d. h. dessen Axenabstand von der Momentanaxe zwar beliebig angenommen werden kann, dessen Axe aber in die oben gedachte Drehaxenfläche hineinfällt, d. h. dessen Axenneigung δ_3 an die Bedingung geknüpft ist:

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_3}.$$

Wenn diesem Hyperboloide auf den Axoiden der beiden Räder eine Schraubung ertheilt wird, so erzeugt irgend eine mit ihm verbundene Linie, als welche am einfachsten eine Seite desselben angenommen wird, die beiden zugehörigen Zahnflächen. Auch hier wird, wenn die Räder sich äußerlich berühren, die Schraubung des Hilfsaxoids auf dem einen Rade äußerlich für die Zahnkrone, auf dem anderen innerlich für die Zahnfüße vorzunehmen sein, und es wird auch hier eine zweimalige Schraubung eines Hilfsaxoids sich empfehlen, um für jedes Rad Köpfe und Füße zu erlangen. Die in solcher Art entstehenden Zahnflächen bieten gewisse Analogien mit den cycloidischen Formen bei cylindrischen und conischen Rädern dar, und es gelten daher hier ganz ähnliche Bemerkungen wie dort, welche indessen nicht weiter ausgeführt werden sollen.

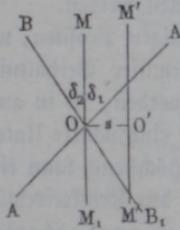
Hier liegt die Frage nahe, ob man auch bei hyperboloidischen Rädern wie bei anderen zu evolventischen Zahnformen gelangen könne dadurch, daß man das erzeugende dritte Axoid in den Grenzfall übergehen läßt zwischen äußerer und innerer Berührung, d. h. also in die Zahnstange bei cylindrischen und in das Planrad bei conischen Rädern. Diesen Grenzfall erhält man offenbar bei hyperboloidischen Rädern dadurch, daß man den Rehlkreis halbmesser d_3 des erzeugenden dritten Hyperboloids größer und größer und schließlich unendlich groß annimmt, denn es entspricht ein positives d_3 einer äußeren und ein negatives d_3 einer inneren Berührung mit dem Axoide A . Setzt man nun $d_3 = \infty$, so folgt aus

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_3}$$

auch ein unendlich großer Werth von $\tan \delta_3$, d. h. es ist $\delta_3 = 90^\circ$.

Das dritte Axoid schrumpft in Folge dessen auf eine Gerade, nämlich die Momentanaxe OM , Fig. 283, selbst als das erzeugende Axoid vor, so wird bei einer Drehung der Axen A und B um die Winkel α und β diese Gerade, die man sich etwa als einen Zahn einer Zahnstange vorstellen kann, senkrecht zu ihrer Richtung in einer den Axen A und B parallelen Ebene um den Betrag

Fig. 283.



Ebene um den Betrag

$$OO' = s = d_1 \alpha \cos \delta_1 = d_2 \beta \cos \delta_2$$

verschoben. Bei dieser Bewegung erzeugt die Gerade OM relativ gegen die Axen AA_1 und BB_1 ebenfalls richtige Zahnflächen, sofern sie der allgemeinen Bedingung genügen, daß sie zu Köpfen und Zähnen Veranlassung geben. Letzteres war bei der directen Abwicklung äußerlich sich berührender cylindrischer und conischer Räder bekanntlich nicht der Fall, und war man daher dort

zur Hilfsannahme der sogenannten Verhältnißcylinder resp. Verhältnißkegel §. 73 und 83 genöthigt. Die in hier angeführter Weise auf jeder der Axen A und B erzeugten Flächen kennzeichnen sich bei näherer Prüfung als Kegelflächen, welche auch entstehen, wenn man auf den Kegelkreiscylindern der Hyperboloide A und B , also auf Cylindern zu diesen Axen und von den Halbmessern d_1 und d_2 eine Gerade unter der Axenneigung von δ_1 resp. δ_2 abwälzt. Dadurch entstehen schraubenförmige Kegelflächen von der Ganghöhe

$$h = \frac{2\pi d_1}{\tan \delta_1} = \frac{2\pi d_2}{\tan \delta_2}$$

welche jede zu ihren Axen senkrechte Ebene in der Evolvente des Kegelkreises schneiden. Olivier*) giebt diesen Flächen den Namen Spiraloide, und man kann dieselben, da sie, wie hier angegeben, durch Bewegung der Momentanaxe erzeugt werden, als Zahnflächen benutzen. Man erkennt nämlich leicht, daß diese Flächen nicht vollständig außerhalb der Axoide zu A und B liegen, sondern in dieselben bis zur Tiefe der Kegelkreiscylinder einschneiden, so daß diese Flächen nicht nur zur Bildung von Zahnköpfen sondern auch von Zahnfüßen Veranlassung geben. Allerdings ist die Tiefe dieses Einschneidens in den Kegelkreisen gleich Null und nimmt von da an beiderseits zu, so daß eine bestimmte Tiefe der Zahnwurzeln, die man wünscht, auch eine bestimmte Entfernung der Räder von dem kürzesten Axenabstande erfordert. Für sogenannte Kegelkreisträder (vielfach Schraubenräder genannt), d. h. solche, deren Mittelebenen durch den kürzesten Axenabstand

*) E. Olivier: Théorie géométrique des engrenages.

gehen, eignen sich daher diese evolventischen Flächen ebenso wenig, wie die Evolventencylinder oder Evolventenkegel der Aroide bei Cylinder- und Kegellädern. Diese erwähnten Spiraloide haben indessen, wie die Construction leicht ergibt, und wie auch schon von Olivier gezeigt worden, die Eigenthümlichkeit, auf jeder Seite der Kehlkreise nur für die eine Richtung der Betriebsübertragung dienen zu können, für die Möglichkeit entgegengesetzter Umdrehung müssen die Zahnflächen auf den entgegengesetzten Seiten der Kehlkreise aus den Spiraloïden herausgeschnitten werden.

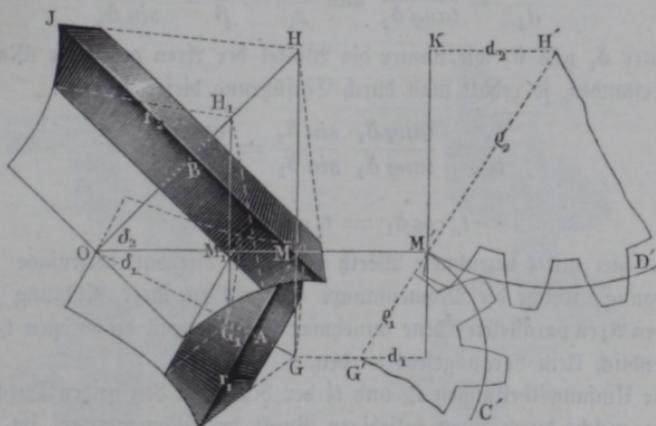
Eine Construction von Zahnflächen mit evolventenförmigen Profilen, wie sie bei cylindrischen und conischen Rädern mit Hülfe gewisser Verhältnißcylinder (§. 73) und Verhältnißkegel (§. 83) angegeben worden, ist in analoger Weise bei Hyperboloidenrädern nicht möglich, wie eine nähere Untersuchung der hyperboloidischen Aroide unschwer ergibt. Höchstens kann eine Begrenzung der Zähne durch Spiraloïde, deren Cylinder den Kehlkreiscylindern in dem §. 73 gedachten Sinne verhältnißgleich sind, zu angenäherten Zahnformen für Kehlkreisläder führen, d. h. für solche Räder, deren Mittelebenen mit den Kehlkreisen zusammenfallen, und deren Grundformen wegen ihrer geringen axialen Höhe von Cylindern nur unwesentlich abweichen. Als exacte können diese Formen aber nicht angesehen werden, so lange die Axen einen meßbaren Winkel mit einander einschließen. Nur bei parallelen Axen, also bei cylindrischen Rädern, bei denen die Zähne schräg gegen die Axen angeordnet werden, tritt dagegen die gedachte spiraloïdische Form als die genaue Zahnform auf, weshalb man derartigen Rädern auch wohl den Namen Schraubenträder zu geben pflegt (s. §. 88).

Anmerkung. In dem Werke von Olivier sind als Zahnflächen solche spiraloïdische Flächen vorausgesetzt, die durch eine willkürlich (parallel der einen Axc) angenommene gerade Linie erzeugt werden, deren Erzeugung daher von der Lage der Momentanaxe ganz unabhängig ist. Wenn zwar durch jene gemachte Annahme einer Erzeugenden parallel zu der einen Radaxe die zugehörige Zahnfläche dieses Rades die einfachere Form eines Evolventencylinders anstatt eines Spiraloïds annimmt, so können doch diese Flächen, welche ohne Berücksichtigung der so bedeutungsvollen Momentanaxe erzeugt sind, nicht als richtige Zahnflächen angesehen werden; wenigstens werden zwei Räder, deren Zähne durch solche Flächen begrenzt sind, nicht, wie oben immer angenommen, in einer geraden Linie (Krafteingriff), sondern nur in einem Punkte (Präcisionseingriff) sich berühren können. Vergl. Olivier: *Théorie géométrique des engrenages*. Ueber den spiraloïdischen Zahneingriff kann man auch nachsehen: *Pücher, Zeitschrift deutscher Ingenieure*. Jahrgang 1860.

Auch bei den Hyperboloidenrädern kann man sich, ähnlich wie bei den conischen, einer angenäherten Zahnconstruction bedienen, indem man die Stirnflächen oder Profile der Zähne in Kegelflächen liegend verzeichnet, welche Kegelflächen auf den Hyperboloiden senkrecht stehen. Denkt man sich durch die Punkte M und M_1 der Momentanaxe $O M$, Fig. 284, welche die

Zahnlänge begrenzen sollen, Ebenen normal zur Momentanaxe OM , so sind deren Schnittpunkte G und H beziehungsweise G_1 und H_1 die Spigen der hierhergehörigen Ergänzungskegel, deren abgewickelte Mäntel $G'M'C'$ und

Fig. 284.



$H'M'D'$ das Mittel geben, nach den für Stirnräder üblichen Verzahnungsmethoden die äußeren und inneren Zahnprofile zu ermitteln. Sind d_1 und d_2 wieder die Kehlkreisrhalbmesser der Hyperboloide und bezeichnet l die Länge OM , so hat man die Kegelseiten, welche für die Verzahnung als Halbmesser gelten:

$$G'M' = \rho_1 = \sqrt{d_1^2 + l^2 \tan^2 \delta_1}$$

und

$$H'M' = \rho_2 = \sqrt{d_2^2 + l^2 \tan^2 \delta_2}$$

Mit Bezug auf die Theilung hyperboloidischer Räder läßt sich hier noch anführen, daß die letzteren in gewisser Beziehung ein von den conischen und cylindrischen Rädern abweichendes Verhalten zeigen. Während nämlich bei diesen letztgenannten die Zahntheilung in zwei zu einander gehörigen Raddurchschnitten, d. h. in zwei Ebenen, welche durch denselben Punkt der Momentanaxe senkrecht zu den Axen gelegt sind, für beide Räder den gleichen Betrag hat, ist dies bei hyperboloidischen Rädern nicht der Fall. Denkt man sich nämlich zu zwei zugehörigen Hyperboloiden A und B die Kehlkreise von den Halbmessern d_1 und d_2 , von denen die Zähnezahlen entsprechend mit z_1 und z_2 und die Winkelgeschwindigkeiten mit α und β bezeichnet sind, so hat man offenbar die Theilungen t_a und t_b dieser Räder, in den Umfängen der Kehlkreise gemessen, zu:

$$t_a = \frac{2\pi d_1}{z_1} \quad \text{und} \quad t_b = \frac{2\pi d_2}{z_2},$$

also

$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{d_1}{d_2} \frac{z_2}{z_1}.$$

Da nun

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_2} \text{ und } \frac{z_2}{z_1} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}$$

ist, unter δ_1 und δ_2 wie immer die Winkel der Axen gegen die Momentanaxen verstanden, so erhält man durch Einführung dieser Werthe:

$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_2} \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1},$$

oder

$$t_a \cos \delta_1 = t_b \cos \delta_2 = t.$$

Der hier mit t bezeichnete Werth entspricht offenbar derjenigen seitlichen Bewegung, welche die Momentanaxe senkrecht zu ihrer Richtung in einer mit den Axen parallelen Ebene annehmen würde, wenn die Größen t_a , t_b und t unendlich klein vorausgesetzt werden.

Die Umfangstheilungen t'_a und t'_b der Räder in den beiden Durchschnittsebenen, welche durch einen beliebigen Punkt der Momentanaxe im Abstände l desselben von dem Berührungspunkte der Rehlkreise senkrecht zu den Axen gedacht werden, folgen dann ohne Weiteres aus den Halbmessern r_1 und r_2 dieser Durchschnitte zu:

$$t'_a = \frac{2 \pi r_1}{z_1} = \frac{2 \pi}{z_1} \sqrt{l^2 \sin^2 \delta_1 + d_1^2}$$

und

$$t'_b = \frac{2 \pi r_2}{z_2} = \frac{2 \pi}{z_2} \sqrt{l^2 \sin^2 \delta_2 + d_2^2},$$

daher hier das Verhältniß der Theilungen sich ergibt zu:

$$\frac{t'_a}{t'_b} = \frac{z_2}{z_1} \sqrt{\frac{l^2 \sin^2 \delta_1 + d_1^2}{l^2 \sin^2 \delta_2 + d_2^2}} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} \sqrt{\frac{l^2 \sin^2 \delta_1 + d_1^2}{l^2 \sin^2 \delta_2 + d_2^2}}.$$

Hyperboloidische Räder werden wegen der schwierigen Darstellung und bedeutenden Reibung nur selten und nur zur Uebertragung kleiner Kräfte angewandt. Am häufigsten kommen dieselben zur Bewegung der Spindeln und Spulen von Vorspinnmaschinen vor, wo es nothwendig ist, einer größeren Anzahl verticaler Spindeln durch eine längere horizontale Ase die Bewegung zu ertheilen*). Bei der Uebertragung größerer Betriebskräfte zwischen zwei windschiefen Axen umgeht man die Anordnung hyperboloidischer Räder fast immer durch Anordnung einer Zwischenaxe, welche die

*) S. Technolog. Encyclopädie, den Artikel Baumwolle von Gölisse, Supplmt. Bd. 1.

beiden Axen durchschneidet, und in Folge davon mit jeder der letzteren durch ein conisches Räderpaar in Verbindung gesetzt werden kann. Eine solche Anordnung ist immer möglich, und ist aus den Figuren 285 und 286 ersichtlich. Bei der Anordnung in Fig. 285 ist die Zwischenwelle CD in die gemein-

Fig. 285.

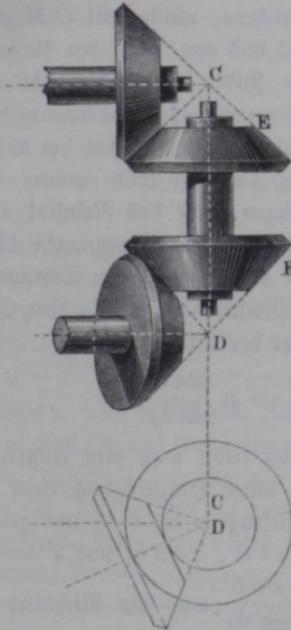
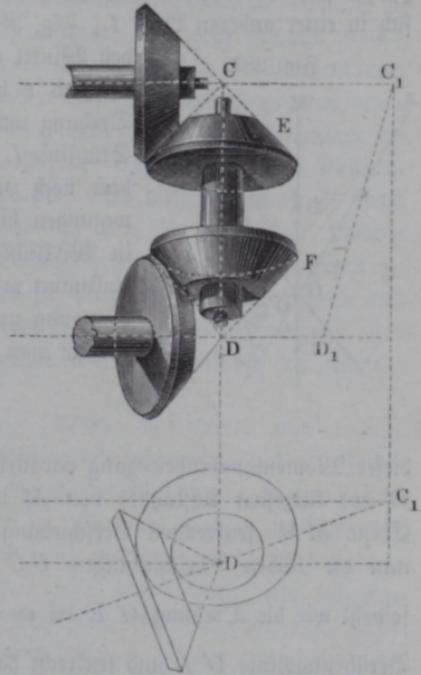


Fig. 286.



schaftliche Normale zu den Axen gelegt, während in Fig. 286 eine beliebige Lage für CD angenommen ist. Die erstere Anordnung, Fig. 285, wird sich, wo sie erreichbar ist, besonders deswegen empfehlen, weil dabei beide Räderpaare die Bewegung zwischen rechtwinkelig zu einander stehenden Axen zu vermitteln haben.

Reibung hyperboloidischer Zahnräder. Zur Ermittlung der Reibung, welche zwischen den Zähnen hyperboloidischer Räder stattfindet, kann man ähnliche Betrachtungen anstellen, wie für cylindrische und conische Räder. Ersetzt man wieder die beiden Drehungen der Axen A und B um α und β unter Festhaltung der einen A durch eine Schraubenbewegung des Hyperboloids B um die Momentanaxe im Drehungsbetrage

$$\omega = \alpha \frac{\sin \delta}{\sin \delta_2} = \beta \frac{\sin \delta}{\sin \delta_1}$$