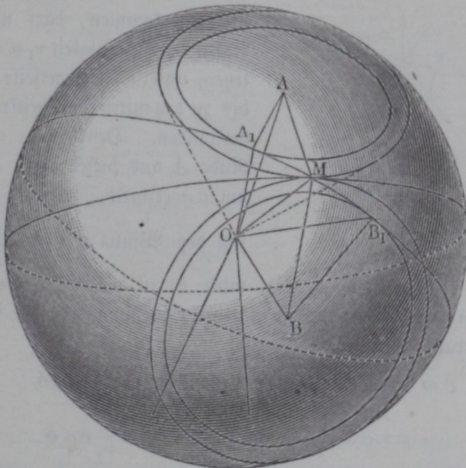
$$\sin \delta'_2 : \sin \delta_2 = \sin \varphi : \sin 90^0,$$

daher

$$\frac{\sin \delta'_1}{\sin \delta'_2} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Fig. 279.

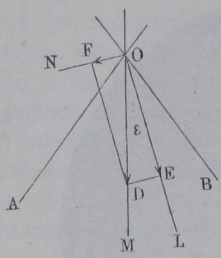


Bei einer Bewegung der beiden Kegel A und B in dem ihnen zukommenden Verhältnisse $\alpha : \beta$ der Winkelgeschwindigkeiten nehmen somit die Hülfskegel A_1 und B_1, welche wohl als Verhältnißkegel bezeichnet werden, Drehungen an, deren Beträge in demselben Verhältnisse zu einander stehen, daraus folgt die Richtigkeit obiger Behauptung ähnlich wie in §. 73 für Stirnräder.

Zahnreibung conischer Räder. Es ist aus der vorstehenden Darstellung klar, daß die erzeugende Linie in jeder ihrer Lagen die Berührungslinie der mit einander arbeitenden Zähne darstellt, und wenn man daher, wie vorstehend vorausgesetzt ist, die erzeugende Linie in der Oberfläche des Hülfsaxoids liegend annimmt, so stellt diese letztere Fläche auch die Eingrifffläche vor. Man kann aus dieser Betrachtung auch sogleich ein Urtheil über die Art und Größe der bei dem Zahneingriffe auftretenden Reibung gewinnen. Es findet eine Reibung zwischen den Zähnen offenbar nicht statt, sobald sich dieselben in der Momentanaxe OM berühren, weil die relative Bewegung dann lediglich in einer Wälzung um diese Berührungslinie besteht. Denkt man aber das Rad A, dessen mittlerer Halbmesser r_1 sein möge, aus dieser Lage um einen gewissen kleinen Winkel α gedreht, §. 84.

wobei das Rad B mit dem mittleren Halbmesser r_2 um einen Winkel $\beta = \frac{r_1 \alpha}{r_2}$ sich gedreht hat, so findet die Berührung jetzt in einer gewissen Geraden OL, Fig. 280, statt, welche mit der Momentanaxe OM den Winkel $MOL = \varepsilon$ bilden möge. Bei den kleinen Winkeln, welche hier nur in Betracht kommen, darf man mit hinreichender Genauigkeit $r_1 \alpha = r_2 \beta = l \varepsilon$ setzen, unter l die Kegelseite $OM = OL$ bis zu den mittleren Theilkreisen gerechnet verstanden. Denkt man nunmehr dem Rade A aus dieser Lage eine Drehung um $\partial \alpha$ ertheilt, wodurch das Rad B um den Winkel $\partial \beta = \frac{r_1}{r_2} \partial \alpha$ gedreht wird, so ist die diesen Drehungen entsprechende relative Bewegung gleich einer Drehung um die Momentanaxe OM im Betrage

Fig. 280.



$$\partial \omega = \sqrt{\partial \alpha^2 + \partial \beta^2 + 2 \partial \alpha . \partial \beta . \cos \delta}$$
$$= \partial \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + 2 \frac{r_1}{r_2} \cos \delta},$$

wenn δ den Axenwinkel bedeutet.

Da nun in dem betrachteten Augenblicke die Zähne sich nicht in der Momentanaxe OM, sondern in der unter dem Winkel ε gegen dieselbe geneigten Geraden OL berühren, so zerlegt sich die Momentanaxenbewegung $\partial \omega$ in zwei Drehungen, eine $\partial \omega . \cos \varepsilon$ um die Berührungslinie OL als Axe, und eine $\partial \omega . \sin \varepsilon$ um eine durch O gehende in der Ebene MOL liegende und auf OL senkrechte Axe ON. Es ergiebt sich leicht, daß diese letztgedachte Axe senkrecht stehen muß auf den beiden Flächenelementen, in welchen sich die Zähne augenblicklich berühren, folglich bringt diese Drehungscomponente $\partial \omega . \sin \varepsilon$ eine sogenannte bohrende Wirkung der Zahnflächen auf einander hervor, welche die Reibung erzeugt, zum Unterschiede von den Stirnrädern, wo durch eine einfache Verschiebung die Friction entsteht. Bezeichnet nun P den Normaldruck zwischen den Zähnen, und φP die Größe der Reibung, so kann man, den Druck P in dem mittleren Berührungspunkte concentrirt gedacht, die während der Drehung der Axe A um $\partial \alpha$ verzehrte Reibungsarbeit nach dem Angeführten zu $\varphi P . l \partial \omega . \sin \varepsilon$, oder da ε nur ein kleiner Winkel ist, annähernd genug zu

$$\varphi P l \varepsilon \partial \omega = \varphi P r_1 \alpha \partial \omega = \varphi P r_1 \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + 2 \frac{r_1}{r_2} \cos \delta} . \alpha \partial \alpha$$

setzen. Nimmt man nun an, der Eingriff zweier Zähne finde sowohl vor als hinter der Momentanaxe in dem Betrage gleich der Theilung t, also in den Theilungswinkeln $\tau_1 = \frac{t}{r_1}$ der Axe A und $\tau_2 = \frac{t}{r_2}$ der Axe B statt, so erhält man die gesammte Reibungsarbeit während eines solchen Drehungswinkels offenbar zu

$$F = \varphi P r_1 \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + 2\,\frac{r_1}{r_2}\cos\delta} \int_0^{\frac{t}{r_1}} \alpha\,\partial\alpha$$

$$= \varphi P \frac{t^2}{2 r_1} \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + 2\,\frac{r_1}{r_2}\cos\delta}.$$

Führt man hierin wieder für r_1 und r_2 die Zähnezahlen z_1 und z_2 ein, indem man $r = \frac{t\,.\,z}{2\,\pi}$ setzt, so erhält man

$$F = \varphi P \frac{t}{2}\,\frac{2\pi}{z_1} \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2\,\frac{z_1}{z_2}\cos\delta}$$

$$= \varphi P \pi t \sqrt{\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{2}{z_1 z_2}\cos\delta}.$$

Diese Formel gilt sowohl für den Eingriff vor wie hinter der Centrale, wenn man unter P den zwischen zwei aufeinander einwirkenden Zähnen stattfindenden Druck versteht; sie drückt daher auch die gesammte Reibungsarbeit aus, welche während der Bewegung durch einen Theilungsbogen stattfindet, wenn P den zwischen den Rädern überhaupt übertragenen Druck bedeutet, wie in §. 79 hinsichtlich der Stirnräder näher ausgeführt worden. Es ist auch klar, daß die Reibungsarbeit kleiner oder größer wird, wenn man den Eingriffwinkel kleiner oder größer als den Theilungswinkel $\frac{t}{r_1}$ annimmt. Für rechtwinkelige Axen wird $\cos\delta = 0$, daher

$$F = \varphi P \pi t \sqrt{\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2}}$$

und für parallele Axen und äußeren Eingriff, also $\cos\delta = \cos 0 = +1$ erhält man

$$F = \varphi P \pi t \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right),$$

während man bei innerem Eingriffe für $\cos 180^0 = -1$

$$F = \varphi P \pi t \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}\right)$$

erhält, übereinstimmend mit §. 79.