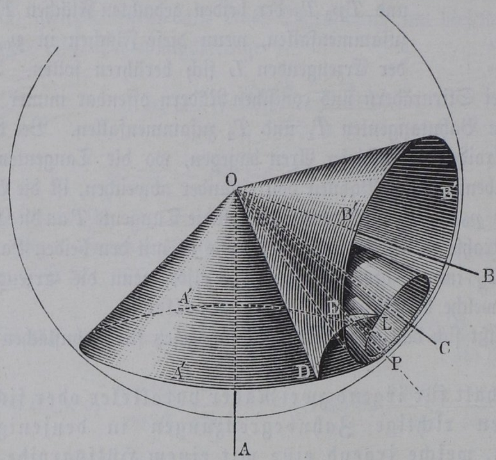
nämlich in denjenigen Punkten ergeben, in welchen die Tangente an die Erzeugende normal auf dem Polstrahle steht.

§. 83. **Conische Räder.** Mit Hülfe dieses ganz allgemein gültigen Gesetzes für die Bildung richtiger Zahnflächen, von welchem das in §. 67 für Stirnräder angegebene Gesetz nur als ein specieller Fall erscheint, ist es nun leicht, die Zahnflächen für conische Räder zu bestimmen. Hierbei gehen die Momentanaxenflächen der Räder eben so wie das anzuwendende Hülfsaxoid in normale Kreiskegelflächen über, deren gemeinschaftliche Spitze im Axendurchschnitte liegt. Der Einfachheit wegen sei auch hier, wie bei den Stirnrädern, eine Gerade als Erzeugungslinie der Zahnflächen und zwar eine in der Fläche des Hülfskegels liegende, also eine Seite desselben gewählt.

Dies vorausgesetzt, ergiebt sich nun die Regel zur Bestimmung der Zahnflächen in ähnlicher Art, wie dies in §. 70 für die Stirnräder gezeigt worden ist. Sind OA und OB, Fig. 278, wieder die Axen zweier conischen

Fig. 278.



Räder, deren Axoide sich in der Geraden OP berühren, so nehme man als Hülfsaxoid einen dritten Kegel von der Axe OC an, welcher die Kegel A und B ebenfalls in dieser Momentanaxe berührt. Irgend eine Seite, z. B. OL dieses Hülfskegels, wird nun bei der im vorigen Paragraphen angenommenen Drehung aller drei Kegel relativ gegen die Axoide A und B zwei krumme Flächen beschreiben, welche ebenfalls als allgemeine Kegelflächen sich charakterisiren, da die Erzeugungslinie OL stets durch denselben festen Punkt O hindurchgeht. Es ist nach dem Früheren ersichtlich, daß man die auf die gedachte Art entstehenden Flächen auch erzeugt denken kann durch eine Rollung des Kegels C auf dem einen Kegel A äußerlich und in dem anderen Kegel B innerlich. Hierbei wird die erzeugende Gerade OL eine um den Axendurchschnitt O als Mittelpunkt mit dem Halbmesser OL beschriebene Kugelfläche in zwei Curven LD und LE schneiden, welche man sphärische Cycloiden*) und zwar die durch äußere Rollung erzeugte LD eine sphärische Epicycloide, die durch innere Rollung entstandene LE eine sphärische Hypocycloide nennt. Diese sphärischen Curven kann man als die Grundlinien der Kegelflächen ansehen, welche die Zähne begrenzen.

Wenn man durch irgend einen Punkt L der Berührungslinie oder Momentanaxe zwei zu den Axen normale Ebenen legt, so schneiden dieselben die Axoide in zwei Kreisen, $PA'A'$ und $PB'B'$, welche auf einander rollen, und in welchen gleiche Geschwindigkeit stattfindet. Diese Kreise spielen offenbar bei den conischen Rädern eine ähnliche Rolle wie die Theilkreise bei den Stirnrädern, und heißen wohl auch Theilkreise, doch muß man zur unzweideutigen Bezeichnung dabei angeben, in welchem Abstande vom Axendurchschnitte O die Theilkreise zu verstehen sind. Daher kommt es, daß man bei conischen Rädern wohl von äußeren, inneren oder mittleren Theilkreisen und auch solcher Theilung spricht, je nachdem sich die Angaben auf den äußeren, inneren oder mittleren Umfang der Räder beziehen. Es ist klar, daß man mit Rücksicht auf diese Theilkreise in ähnlicher Art wie bei den Stirnrädern von Zahnköpfen und Zahnfüßen sprechen kann, und daß die hierfür bei jenen ermittelten Beziehungen, wie z. B. die, daß Zahnköpfe nur mit Zahnfüßen zusammenarbeiten können, auch für conische Räder ihre Geltung haben werden. Man wird daher auch hier, um jedem Rade sowohl Köpfe wie Füße zu geben, für jedes Rad zweimal eine Wälzung vornehmen müssen, so daß den Köpfen die Epicycloiden, den Füßen die Hypocycloiden zukommen. Ebenso ergiebt sich leicht, in welcher Art das bei den Stirnrädern über innere Verzahnung Gesagte auch für conische Räder seine Gültigkeit behält und kann hinsichtlich dessen, was man bei conischen Rädern überhaupt unter innerem Eingriffe zu verstehen hat, auf das in §. 45 Gesagte hingewiesen werden. In welcher Weise man bei conischen Rädern auch Triebstöcke anstatt der Zähne anwenden könnte, ist ebenfalls leicht zu finden, und es ist natürlich, daß hierbei die Stöcke nicht von cylindrischer Form sein können, sondern als Kegel gebildet werden müssen, die ihre Spitzen sämmtlich im Axendurchschnitte haben.

Was den Grenzfall zwischen äußerem und innerem Eingriffe anbetrifft, welcher bei den Stirnrädern durch die Zahnstange repräsentirt ist, so entspricht demselben bei conischen Rädern bekanntlich das Planrad, für welches

*) S. u. A. Verhandlgn. d. Ver. z. Beförderg. d. Gewerbfleißes. Jhrg. 1876.

der halbe Spitzenwinkel 90^0 beträgt, während dieser Winkel bei äußerem Eingriffe spitz, bei innerem Eingriffe stumpf ist. Ebenso wie nun bei den Stirnrädern der Uebergang des erzeugenden Cylinders in eine Ebene zu einer besonderen, der Evolventenverzahnung führte, ebenso erhält man für conische Räder eine entsprechende besondere Zahnform, wenn man als drittes oder Hülfsaxoid das Planrad auf den beiden Axoiden abwälzt. Läßt man nämlich den halben Spitzenwinkel δ_3 des rollenden Kegels C größer und größer werden, bis er den Werth des Rechtwinkels erreicht, so geht der Kegelmantel in eine Ebene über, welche die beiden Axoide in der Momentanaxe OP berührt. Bei der Abrollung dieser Ebene auf den beiden Kegeln A und B erzeugt eine durch O gehende Gerade dieser Ebene Kegelflächen, deren Durchschnittslinien mit einer um O gelegten Kugel in der Geometrie bekanntlich als sphärische Evolventen bezeichnet werden. Ganz analog den Stirnrädern ist es auch hier ersichtlich, daß diese Flächen, welche etwa als sphärische Evolventenkegel bezeichnet werden können, bei äußerem Eingriffe der Kegelräder nicht zu Zahnflächen benutzt werden können, da sie nur zur Bildung von Zahnköpfen Gelegenheit geben, welche bekanntlich nicht zusammenarbeiten können. Höchstens können diese Flächen bei dem innerlichen Eingriffe zwischen conischen Rädern in ähnlicher Weise verwendet werden, wie dies bei Stirnrädern mit innerem Eingriffe für die entsprechenden Evolventencylinder gilt. Man kann aber auch bei conischen Rädern evolventische Formen als Zahnflächen in ähnlicher Art wie bei Stirnrädern benutzen, wenn man das Planrad C nicht auf den Axoiden A und B direct, sondern auf gewissen Verhältnißkegeln A_1 und B_1, Fig. 279, abwälzt, welche man in folgender Weise erhält. Legt man durch die Berührungslinie OM der beiden den Axen OA und OB zugehörigen Kegel eine Ebene unter einem gewissen Winkel φ gleich etwa 75^0 gegen die Axenebene, und denkt ferner concentrisch zu den Axen OA und OB die beiden diese Ebene berührenden Kegel, welche von jener Ebene in den Seiten OA_1 und OB_1 berührt werden, so kann man diese Kegel als die Grundkegel betrachten, auf welchen die Ebene oder das Planrad OA_1MB_1 abgewälzt werden muß, um zu einander gehörige Zahnflächen für die beiden Räder A und B zu erhalten. Hierbei erzeugt ein Radius wie z. B. OM des Planrades zwei conische Flächen, deren Durchschnitte mit der durch M um O gelegten Kugel die betreffenden sphärischen Evolventen sind, und es ist leicht in ähnlicher Art wie bei den Stirnrädern zu beweisen, daß auch diese Flächen noch richtige Zahnbegrenzungen ergeben müssen. Bezeichnet man nämlich die halben Spitzenwinkel dieser Kegel AOA_1 mit δ'_1 und BOB_1 mit δ'_2, so hat man aus den sphärischen Dreiecken $OAMA_1$ bezw. $OBMB_1$:

$$\sin\delta'_1 : \sin\delta_1 = \sin\varphi : \sin 90^0$$

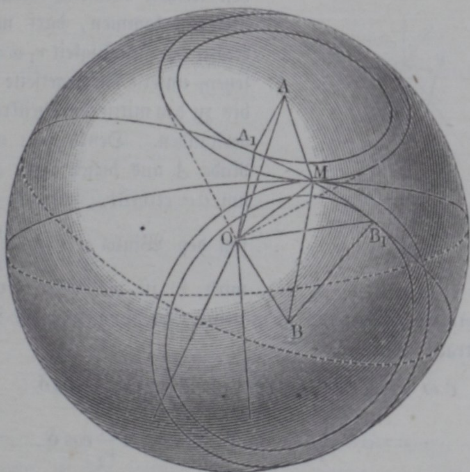
und

$$\sin \delta'_2 : \sin \delta_2 = \sin \varphi : \sin 90^0,$$

daher

$$\frac{\sin \delta'_1}{\sin \delta'_2} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Fig. 279.



Bei einer Bewegung der beiden Kegel A und B in dem ihnen zukommenden Verhältnisse $\alpha : \beta$ der Winkelgeschwindigkeiten nehmen somit die Hülfskegel A_1 und B_1, welche wohl als Verhältnißkegel bezeichnet werden, Drehungen an, deren Beträge in demselben Verhältnisse zu einander stehen, daraus folgt die Richtigkeit obiger Behauptung ähnlich wie in §. 73 für Stirnräder.

Zahnreibung conischer Räder. Es ist aus der vorstehenden Darstellung klar, daß die erzeugende Linie in jeder ihrer Lagen die Berührungslinie der mit einander arbeitenden Zähne darstellt, und wenn man daher, wie vorstehend vorausgesetzt ist, die erzeugende Linie in der Oberfläche des Hülfsaxoids liegend annimmt, so stellt diese letztere Fläche auch die Eingrifffläche vor. Man kann aus dieser Betrachtung auch sogleich ein Urtheil über die Art und Größe der bei dem Zahneingriffe auftretenden Reibung gewinnen. Es findet eine Reibung zwischen den Zähnen offenbar nicht statt, sobald sich dieselben in der Momentanaxe OM berühren, weil die relative Bewegung dann lediglich in einer Wälzung um diese Berührungslinie besteht. Denkt man aber das Rad A, dessen mittlerer Halbmesser r_1 sein möge, aus dieser Lage um einen gewissen kleinen Winkel α gedreht, §. 84.