$$\frac{x}{y} = \frac{tang\,\delta_1}{d_1}\,z \text{ oder } x = k\,y\,z,$$

unter k die dem zu Grunde gelegten Hauptaxoidenpaare A und B entsprechende Constante

$$k = \frac{tang\,\delta_1}{d_1} = \frac{tang\,\delta_2}{d_2}$$

verstanden.

Die durch diese Gleichung festgelegte Regelfläche ist ein hyperbolisches Paraboloid. Dasselbe wird von irgend einer mit der XY-Ebene im Abstande $z = c$ parallel gelegten Ebene in der Axe des Hülfsaxoid vom Kehlkreishalbmesser c geschnitten, während alle der XZ-Ebene parallelen Ebenen gerade, die Momentanaxe schneidende Schnittlinien von der Form $x = k c_1 z$ liefern, wenn der Abstand der betreffenden Schnittebene zu $y = c_1$ angenommen ist. Eine im Abstande $x = c_2$ endlich parallel mit der YZ-Ebene gelegte Ebene giebt als Durchschnitt mit dieser Fläche eine gleichseitige Hyperbel von der Form $yz = \frac{c_2}{k}$. Man kann diese Fläche etwa die Drehaxenfläche der zu zwei gegebenen Hauptaxoiden zugehörigen Hülfsaxoide nennen.

Es ist klar, daß diese Fläche bei parallelen Axen oder Stirnrädern sowohl wie bei sich schneidenden Axen oder conischen Rädern in eine Ebene, nämlich in die Axenebene, übergeht. Im ersteren Falle kann jede in dieser Ebene den Axen parallele Gerade als Axe des Hülfsaxoids auftreten, während im letzteren Falle jede in der Axenebene gelegene und durch den Schnittpunkt der Axen gehende Gerade als Axe für das Hülfsaxoid angesehen werden kann.

Allgemeines Zahnbildungsgesetz. Man denke sich nun für irgend zwei Räder, deren Axoide A und B seien, ein beliebiges drittes oder Hülfsaxoid C, und mit demselben fest verbunden irgend eine gerade oder krumme Linie L. Diese letztere wird dann, wenn man allen drei Axoiden die ihnen zugehörigen Drehungen ertheilt, relativ gegen die beiden Axoide A und B zwei gewisse Flächen erzeugen. Für die Anschauung kann man sich etwa die erzeugende Linie L als eine scharfe Schneide oder einen dünnen Draht und die Axen A und B mit plastischen Massen umkleidet vorstellen, in denen die Schneide bei der vorausgesetzten Bewegung ihre Spuren in Gestalt der beiden Flächen F_1 und F_2 hinterläßt. §. 82.

Diese beiden Flächen haben die Erzeugende L in jedem Augenblicke gemein, und ist für die Verwendbarkeit der Flächen zu Zahnbegrenzungen erforderlich, daß sie in dieser Linie eine Berührung eingehen, sowie ferner, daß sie den Axoiden A und B die diesen eigenthümlich zugehörige relative Bewegung gegen einander gestatten. Die letztere Bedingung ist wegen der nach dem vorhergehenden Paragraphen dem Hülfsaxoide zukommenden Eigenschaft immer erfüllt, wie man sich übrigens auch durch folgende Rechnung speciell überzeugen kann. Zu dem Ende denke man sich, wie schon öfter geschehen, das Hülfsaxoid C durch eine dem ganzen System ertheilte zusätzliche Drehung um die Axe CC_1 im Betrage $-\gamma$ in Stillstand gebracht und ersetze die beiden Drehungen, welche das Axoid A dadurch erhält (α um A und $-\gamma$ um C) durch eine Schraubung um die Momentanaxe MM_1, deren Drehungsbetrag ω_a nach §. 46 sich bestimmt aus

$$\alpha : \omega_a = \sin \delta_3 : \sin(\delta_1 + \delta_3)$$

zu

$$\omega_a = \alpha \frac{\sin(\delta_1 + \delta_3)}{\sin \delta_3}$$

und deren Schiebung s_a beträgt:

$$s_a = (d_1 + d_3)\, \alpha \sin \delta_1.$$

In gleicher Weise sind die beiden Drehungen des Axoids B (β um B und $-\gamma$ um C) gleichbedeutend mit einer Schraubung um dieselbe Axe MM_1 im Drehungs- resp. Schiebungsbetrage

$$\omega_b = \beta \frac{\sin(\delta_2 - \delta_3)}{\sin \delta_3}$$

und

$$s_b = -(d_2 - d_3)\, \beta \sin \delta_2.$$

Hieraus ergiebt sich nun ferner die relative Bewegung der beiden Axoide A und B gegen einander ebenfalls als eine Schraubenbewegung um die Momentanaxe MM_1. Die Drehung dieser Schraubung beträgt:

$$\omega = \omega_a - \omega_b = \alpha \frac{\sin(\delta_1 + \delta_3)}{\sin \delta_3} - \beta \frac{\sin(\delta_2 - \delta_3)}{\sin \delta_3}$$

$$= \alpha \sin \delta_1 \frac{\sin(\delta_1 + \delta_3)}{\sin \delta_1 \sin \delta_3} - \beta \sin \delta_2 \frac{\sin(\delta_2 - \delta_3)}{\sin \delta_2 \sin \delta_3}$$

oder da $\alpha \sin \delta_1 = \beta \sin \delta_2$ ist:

$$\omega = \alpha \sin \delta_1 (\cotg \delta_1 + \cotg \delta_2) = \alpha \frac{\sin(\delta_1 + \delta_2)}{\sin \delta_2}.$$

Für die Verschiebung der gedachten Schraubung hat man

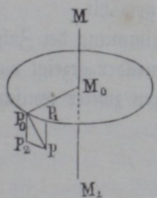
$$s = s_a - s_b = (d_1 + d_2)\, \alpha \sin \delta_1 = d \,.\, \alpha \sin \delta_1 = d \,.\, \beta \sin \delta_2.$$

Nun stimmen aber diese Beträge der relativen Drehung und Verschiebung, welchen die Axoide A und B bei der gedachten Flächenerzeugung unterworfen sind, genau überein mit derjenigen relativen Schraubenbewegung, welche den

Axoiden A und B in Folge des verlangten Bewegungszustandes zukommt. Da also die mit einander correspondirenden Elemente der Flächen F_1 und F_2 gerade durch solche Bewegungen erzeugt sind, wie sie der für die Axen A und B verlangte Bewegungszustand erfordert, so liegt hierin der Beweis, daß diese Flächen richtige Zahnflächen abgeben können, vorausgesetzt, daß sie in der ihnen gemeinsamen Linie L jederzeit eine Berührung eingehen.

Um zu untersuchen, wann dies der Fall ist, kann man bemerken, daß irgend ein Punkt p_0 der erzeugenden Linie, Fig. 277, bei den gedachten Schraubungen des Hülfsaxoides um die Momentanaxe MM_1 in jedem Augenblicke Bahnelemente p_0p beschreibt, welche auf dem von p_0 auf die Momentanaxe gefällten Polstrahle p_0M_0 senkrecht stehen. Sei nun etwa T die Tangente an die erzeugende Linie L im Punkte p_0 und seien T_1 und T_2 die Tangenten an die Bahnen p_0p, welche derselbe Punkt p_0 in irgend einem Augenblicke zufolge der Schraubungen beschreibt, so müssen die beiden Berührungsebenen Tp_0T_1 und Tp_0T_2 der beiden gedachten Flächen F_1 und F_2 zusammenfallen, wenn diese Flächen in p_0, d. h. in der Erzeugenden L sich berühren sollen. Diese Bedingung ist bei Stirnrädern und conischen Rädern offenbar immer erfüllt, da hier die beiden Bahntangenten T_1 und T_2 zusammenfallen. Bei den hyperboloidischen Axoiden windschiefer Axen dagegen, wo die Tangenten T_1 und T_2 der schraubenförmigen Bahnen von einander abweichen, ist die Berührung der Flächen in p_0 nur möglich, wenn daselbst die Tangente T an die Erzeugende auf dem Polstrahle p_0M_0 senkrecht steht, wie es mit den beiden Bahntangenten T_1 und T_2 immer der Fall ist, d. h. also, wenn die Erzeugende eine Gerade ist, welche der Momentanaxe parallel ist.

Fig. 277.



Hiernach läßt sich das allgemeine Bildungsgesetz für Zahnflächen wie folgt aussprechen:

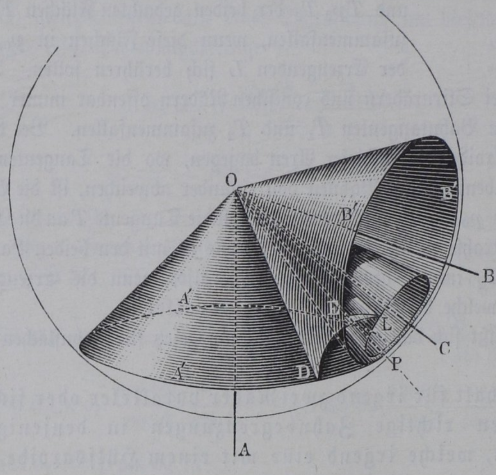
„Man erhält für irgend zwei Räder paralleler oder sich schneidender Axen richtige Zahnbegrenzungen in denjenigen beiden Flächen, welche irgend eine mit einem Hülfsaxoide fest verbundene beliebige Linie relativ gegen die Axen erzeugt, wenn man allen drei Axoiden die ihnen zugehörigen Drehungen ertheilt denkt. Bei windschiefen Axen ist die Erzeugende jedoch an die Bedingung geknüpft, eine mit der Momentanaxe stets parallel bleibende Gerade zu sein.“ Wie der letztgedachte Fall zu einem besonderen (spiraloidischen) Zahneingriffe führt, wird in §. 86 gezeigt werden.

Bei windschiefen Axen kann die Schraubung eines beliebigen Hülfsaxoids nach Obigem nur angenäherte Flächen mit punktweiser Berührung, nämlich in denjenigen Punkten ergeben, in welchen die Tangente an die Erzeugende normal auf dem Polstrahle steht.

§. 83. **Conische Räder.** Mit Hülfe dieses ganz allgemein gültigen Gesetzes für die Bildung richtiger Zahnflächen, von welchem das in §. 67 für Stirnräder angegebene Gesetz nur als ein specieller Fall erscheint, ist es nun leicht, die Zahnflächen für conische Räder zu bestimmen. Hierbei gehen die Momentanaxenflächen der Räder eben so wie das anzuwendende Hülfsaxoid in normale Kreiskegelflächen über, deren gemeinschaftliche Spitze im Axendurchschnitte liegt. Der Einfachheit wegen sei auch hier, wie bei den Stirnrädern, eine G e r a d e als Erzeugungslinie der Zahnflächen und zwar eine in der Fläche des Hülfskegels liegende, also eine Seite desselben gewählt.

Dies vorausgesetzt, ergiebt sich nun die Regel zur Bestimmung der Zahnflächen in ähnlicher Art, wie dies in §. 70 für die Stirnräder gezeigt worden ist. Sind OA und OB, Fig. 278, wieder die Axen zweier conischen

Fig. 278.



Räder, deren Axoide sich in der Geraden OP berühren, so nehme man als Hülfsaxoid einen dritten Kegel von der Axe OC an, welcher die Kegel A und B ebenfalls in dieser Momentanaxe berührt. Irgend eine Seite, z. B. OL dieses Hülfskegels, wird nun bei der im vorigen Paragraphen angenommenen Drehung aller drei Kegel relativ gegen die Axoide A und B zwei krumme Flächen beschreiben, welche ebenfalls als allgemeine Kegelflächen sich charakterisiren, da die Erzeugungslinie OL stets durch denselben festen Punkt O hindurchgeht. Es ist nach dem Früheren ersichtlich, daß