einen veränderlichen Abstand haben müssen. Aus allen diesen Gründen kann man wohl die Evolventenzähne zu den vollkommensten rechnen.

Was die kreisbogenförmigen Zähne anbetrifft, so ist ein Vortheil derselben nicht einzusehen, da sie erstens doch als Annäherungsformen nur in einer oder zwei Berührungslinien genau richtige Bewegungsübertragung ergeben und ihre einfachere Begrenzung bei der Darstellung der Räder keineswegs Erleichterung verschafft; letzteres gilt höchstens für die Anfertigung der Zeichnungen, für welche man sich daher wohl dieses Verfahrens bedienen kann, wenn dieselben nicht zur unmittelbaren Ausführung dienen. Nur in besonderen Fällen wird die Kreisbogenverzahnung räthlich erscheinen, wenn aus Festigkeits- oder sonstigen Rücksichten eine Form wünschenswerth ist, der man mit Kreisbögen sich am besten annähern kann. Ein besonderer Nachtheil des nach §. 74 aus zwei Kreisbögen zusammengesetzten Zahnprofils liegt darin, daß diese Bögen im Theilkreise nicht tangential in einander übergehen, sondern eine stumpfe Ecke bilden, welche sich bald abnutzen muß, wenn man nicht von vornherein eine entsprechende Abrundung vornimmt.

Schließlich mag hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß in neuerer Zeit, wo die vorzüglich arbeitenden Räderformmaschinen sich mehr und mehr in den Gießereien einführen, der Constructeur von Triebwerken weniger abhängig von den Modellböden ist, und daß aus diesem Grunde die Satzrädersysteme wesentlich an ihrer früheren Bedeutung verlieren. Da bei der Herstellung der Räder durch Formmaschinen die gewählte Zahnform für die Anfertigungskosten so gut wie gleichgültig ist, so ist bei der Veranlagung von Triebrädern eine größere Freiheit gelassen, und es werden die früher meist festgehaltenen starren Regeln namentlich über die Höhe der Zahnkronen 2c. weniger maßgebend sein.

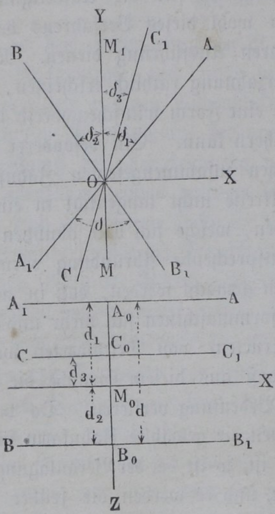
Räder für nicht parallele Axen. Für den Fall, daß die Axen der Räder nicht parallel sind, ist die Form der zugehörigen Momentanaxenflächen bereits in §§. 45 und 46 näher untersucht und insbesondere gefunden worden, daß bei sich schneidenden Axen die Axoide zwei bestimmte Kegelmäntel sind, deren gemeinsame Spitze im Axendurchschnitte liegt, während bei windschiefen Axen die Momentanaxenflächen durch zwei gewisse Umdrehungshyperboloide dargestellt werden. Auch die conischen und hyperboloidischen Räder werden in ähnlicher Weise mit Zähnen versehen, wie dies im Vorstehenden betreffs der Stirnräder gezeigt ist, und es handelt sich wie dort auch hierfür um die Untersuchung der Begrenzungen, die diesen Zähnen zu geben sind, wenn durch den Zahneingriff der gleichmäßigen Bewegungsübertragung kein Eintrag geschehen soll. Hinsichtlich der Construction richtiger Zahnflächen läßt sich nun ein allgemein gültiges Bildungsgesetz aufstellen, aus welchem die Regeln für die einzelnen speciellen Fälle, also §. 81.

26*

auch für die Stirnräder sich ergeben. Um dieses Gesetz zu erkennen, sei zuerst ein Hülfslehrsatz bewiesen, welcher eine merkwürdige Eigenschaft ergiebt, die den Momentanaxenflächen zweier Räder ganz allgemein zukommt.

Zu dem Ende seien wieder ganz allgemein zwei zu einander windschiefe Axen AA_1 und BB_1, Fig. 276, vorausgesetzt, deren kürzester Abstand $A_0 B_0 = d$ und deren Neigungswinkel gleich δ sein mag. Bezeichnet man wieder mit α und β die Drehungswinkel der Axen in der Zeiteinheit, so erhält man nach §. 46 die zugehörige Momentanaxe der relativen Bewegung in einer Geraden MM_1, welche in einer Ebene liegt, die parallel ist mit dem durch AA_1 und BB_1 möglichen parallelen Ebenenpaar, und deren Abstände von den Axen gegeben sind durch die Beziehung

Fig. 276.



$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{tang\,\delta_1}{tang\,\delta_2},$$

wenn unter δ_1 und δ_2 wiederum die Neigungen der Axen AA_1 und BB_1 gegen die Momentanaxe verstanden sind, für welche man hat:

$$\frac{sin\,\delta_1}{sin\,\delta_2} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Denkt man sich diese Momentanaxe MM_1 einmal um AA_1 und einmal um BB_1 unter Festhaltung ihrer Neigung und ihres Abstandes herumgedreht, so werden nach dem Früheren zwei Umdrehungshyperboloide erzeugt, die sich in MM_1 berühren und welche in dem vorliegenden Falle als die Momentanaxenflächen anzusehen sind. Man kann bemerken, daß diese beiden Axoide zwei ganz bestimmte sind, sobald die gegenseitige Lage der Axen, d. h. d und δ, sowie das Umsetzungsverhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ gegeben sind, und es mögen diese Hyperboloide die für das Umsetzungsverhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ einander **zugeordneten Axoide** genannt werden. Man denke sich nunmehr zu dem einen dieser Axoide, etwa zu demjenigen mit der Axe AA_1, ein drittes Axoid für ein beliebiges anderes Umsetzungsverhältniß etwa $\frac{\alpha}{\gamma}$ zugeordnet, und denke dasselbe in solcher Lage, daß die Berührung zwischen dem ersten und dritten in derselben Geraden MM_1 geschieht, wie zwischen den betrachteten ersten Axoiden der Axen AA_1 und BB_1. Man hat, um zu einem solchen dritten Axoide zu gelangen, nur nöthig, auf der gemeinsamen Normale $A_0 B_0$ in einem Abstande $d_3 = C_0 M_0$ von M_0 eine Axe CC_1 anzunehmen, welche in einer Ebene parallel mit den Axen AA_1 und BB_1 liegt und mit MM_1 einen Winkel δ_3 bildet, für welchen man hat

$$\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_3} = \frac{\gamma}{\alpha},$$

während gleichzeitig d_3 an die Bedingung geknüpft ist:

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{\operatorname{tang} \delta_1}{\operatorname{tang} \delta_3}.$$

Dieses dritte Hyperboloid ist dann offenbar von solcher Beschaffenheit, daß es bei einer Drehung um den Winkel γ eine Drehung des Hyperboloids A um den Winkel α zur Folge haben würde, wenn man diese Hyperboloide wie zwei Frictionsräder auf einander wirken ließe, mit anderen Worten, die beiden Hyperboloide sind die richtigen Momentanaxenflächen für die zwei Axen AA_1 und CC_1 und entsprechend einem Umsetzungsverhältnisse $\alpha : \gamma$.

Betrachtet man nun das dritte Hyperboloid zur Axe CC_1 in Beziehung zu dem zweiten, der Axe BB_1 zugehörigen, so findet sich leicht, daß auch diese beiden Flächen die richtigen Momentanaxenflächen für die beiden Axen BB_1 und CC_1 sind, und zwar entsprechend einem Umsetzungsverhältnisse $\beta : \gamma$. Man erkennt dies sofort, wenn man

$$\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_3} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{durch} \quad \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

und

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{\operatorname{tang} \delta_1}{\operatorname{tang} \delta_3} \quad \text{durch} \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{\operatorname{tang} \delta_1}{\operatorname{tang} \delta_2}$$

dividirt, wodurch man zu

$$\frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_3} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{und} \quad \frac{d_2}{d_3} = \frac{\operatorname{tang} \delta_2}{\operatorname{tang} \delta_3}$$

gelangt, welche Gleichungen die Bedingungen enthalten, denen die Momentanaxenflächen der beiden Axen BB_1 und CC_1 für ein Umsetzungsverhältniß $\beta : \gamma$ genügen müssen. Die hieraus folgende Eigenschaft der Momentanaxenflächen für Räder läßt sich daher folgendermaßen aussprechen:

Wenn zwei Axen A und B von bestimmter Lage, deren Umsetzungsverhältniß $\alpha : \beta$ ist, gegeben sind, und man denkt zu der einen Momentanaxenfläche der Axe A ein drittes Axoid C entsprechend dem Umsetzungsverhältnisse $\alpha : \gamma$, so ist dieses dritte Axoid C auch die dem zweiten B zugeordnete Momentanaxenfläche und zwar für das Umsetzungsverhältniß $\beta : \gamma$.

Zur Veranschaulichung dieses Gesetzes kann man sich etwa vorstellen, die gedachten drei Hyperboloide A, B und C seien als materielle Flächen von äußerst dünnem Metallbleche gefertigt und in der gemeinsamen Berührungslinie MM_1 mit solcher Pressung gegeneinander gedrückt, daß mittelst der Friction nach Art wie bei Reibungsrädern die Drehung des einen eine entsprechende Drehung jedes anderen zur Folge hat. Wird nun das dritte Axoid C um einen Winkel γ gleichmäßig gedreht, so veranlaßt dasselbe eine gleichmäßige Drehung des Axoids A um den Winkel α und gleichzeitig eine gleichmäßige Drehung des Axoids B um den Winkel β, und zwar geschehen diese Drehungen α und β genau in denselben Beträgen, welche sie annehmen würden, wenn die beiden Axoide A und B direct aufeinander als Frictionsräder einwirkten. Die Drehung der letzteren geschieht also in dieser Weise mit Hülfe eines dritten Axoids, welches man daher mit dem Namen Hülfsaxoid belegen kann. Dieses Hülfsaxoid kann nun zwar in unendlich verschiedener Art gewählt werden, es ist dasselbe indessen keineswegs ganz willkürlich anzunehmen, sondern an die ganz bestimmten Bedingungen

$$\frac{\sin\delta_1}{\sin\delta_3} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{d_1}{d_3} = \frac{\operatorname{tang}\delta_1}{\operatorname{tang}\delta_3}$$

geknüpft, welche überhaupt für zwei windschiefe Axen gelten. Denkt man sich daher alle möglichen Hülfsaxoide zu dem Axoidenpaar A und B, so legen die Axen C aller dieser Hülfsaxoide eine gewisse Regelfläche im Raume fest, deren Charakter sich in folgender Art bestimmt.

Betrachtet man die Momentanaxe MM_1 der Axoide zweier windschiefen Axen A und B als Y-Axe und den kürzesten Axenabstand A_0B_0 als Z-Axe eines rechtwinkeligen Coordinatensystems, so gilt für irgend ein Hülfsaxoid, dessen Axe den Abstand $M_0C_0 = z$ von der Momentanaxe MM_1 hat, die Gleichung

$$\frac{z}{d_1} = \frac{\operatorname{tang}\delta_3}{\operatorname{tang}\delta_1},$$

wenn d_1 den Kehlkreishalbmesser des Axoids A, und δ_3 und δ_1 die Neigungen der Momentanaxe gegen die Axen C und A bezeichnen.

Hierin nun $\operatorname{tang}\delta_3 = \dfrac{x}{y}$ gesetzt, erhält man als Gleichung der besagten Fläche für die Drehaxen aller möglichen Hülfsaxoide

$$\frac{x}{y} = \frac{tang\,\delta_1}{d_1} z \text{ oder } x = k y z,$$

unter k die dem zu Grunde gelegten Hauptaxoidenpaare A und B entsprechende Constante

$$k = \frac{tang\,\delta_1}{d_1} = \frac{tang\,\delta_2}{d_2}$$

verstanden.

Die durch diese Gleichung festgelegte Regelfläche ist ein hyperbolisches Paraboloid. Dasselbe wird von irgend einer mit der XY-Ebene im Abstande $z = c$ parallel gelegten Ebene in der Axe des Hülfsaxoid vom Kehlkreishalbmesser c geschnitten, während alle der XZ-Ebene parallelen Ebenen gerade, die Momentanaxe schneidende Schnittlinien von der Form $x = k c_1 z$ liefern, wenn der Abstand der betreffenden Schnittebene zu $y = c_1$ angenommen ist. Eine im Abstande $x = c_2$ endlich parallel mit der YZ-Ebene gelegte Ebene giebt als Durchschnitt mit dieser Fläche eine gleichseitige Hyperbel von der Form $yz = \frac{c_2}{k}$. Man kann diese Fläche etwa die Drehaxenfläche der zu zwei gegebenen Hauptaxoiden zugehörigen Hülfsaxoide nennen.

Es ist klar, daß diese Fläche bei parallelen Axen oder Stirnrädern sowohl wie bei sich schneidenden Axen oder conischen Rädern in eine Ebene, nämlich in die Axenebene, übergeht. Im ersteren Falle kann jede in dieser Ebene den Axen parallele Gerade als Axe des Hülfsaxoids auftreten, während im letzteren Falle jede in der Axenebene gelegene und durch den Schnittpunkt der Axen gehende Gerade als Axe für das Hülfsaxoid angesehen werden kann.

Allgemeines Zahnbildungsgesetz. Man denke sich nun für irgend zwei Räder, deren Axoide A und B seien, ein beliebiges drittes oder Hülfsaxoid C, und mit demselben fest verbunden irgend eine gerade oder krumme Linie L. Diese letztere wird dann, wenn man allen drei Axoiden die ihnen zugehörigen Drehungen ertheilt, relativ gegen die beiden Axoide A und B zwei gewisse Flächen erzeugen. Für die Anschauung kann man sich etwa die erzeugende Linie L als eine scharfe Schneide oder einen dünnen Draht und die Axen A und B mit plastischen Massen umkleidet vorstellen, in denen die Schneide bei der vorausgesetzten Bewegung ihre Spuren in Gestalt der beiden Flächen F_1 und F_2 hinterläßt. §. 82.

Diese beiden Flächen haben die Erzeugende L in jedem Augenblicke gemein, und ist für die Verwendbarkeit der Flächen zu Zahnbegrenzungen erforderlich, daß sie in dieser Linie eine Berührung eingehen, sowie ferner, daß sie den Axoiden A und B die diesen eigenthümlich zugehörige relative Bewegung gegen einander gestatten. Die letztere Bedingung ist wegen der