

oder, wenn wieder

$$r_1 e_1 = e_1 = e_2 = \frac{e}{2} = \frac{v t}{2} \quad \text{und} \quad \frac{t}{2r} = \frac{\pi}{z}$$

gesetzt wird,

$$F = \pi \varphi K \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{v}{2} = \pi \varphi \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{v}{2}.$$

Der gefundene Ausdruck

$$F = \pi \varphi \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{v}{2}$$

kann daher als allgemein gültig angesehen werden, und wenn man $\sin \gamma = 1$ setzt, so erhält man:

$$F = \pi \varphi P \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{v}{2}.$$

Man erkennt übrigens, daß die Reibung der Evolventenzähne etwas größer sein wird, als diejenige der Cycloidenzähne, insofern bei ersteren der Winkel γ meist etwas kleiner ist als bei letzteren.

Allgemeines über die verschiedenen Zahnformen. Was die §. 80. Anwendung der im Vorhergehenden betrachteten Zahnformen betrifft, so kann man zunächst bemerken, daß auf möglichst genaue und richtige Zahnformen vorzugsweise bei schnellgehenden Axen besondere Aufmerksamkeit verwendet werden muß, da eine ungenaue und unrichtige Form nothwendig ein veränderliches Umsehungsverhältniß zur Folge hat, aus welchem Stoßwirkungen entstehen, die um so beträchtlicher ausfallen, je größer die in den Axen aufgespeicherten lebendigen Kräfte sind. Bei langsam gehenden Axen, wie z. B. bei den Wellen der Windwerke, sind die Nachtheile, welche aus incorrecten Zahnformen entstehen, nur unerheblich, und kann für solche Fälle die Anwendung von Rädern zugelassen werden, deren Zahnprofile nicht genau den obigen Bedingungen einer gleichmäßigen Bewegungsmittelung entsprechen, wenn dies aus praktischen Gründen, etwa wegen Benutzung vorhandener Modelle, wünschenswerth erscheint. Niemals indessen sollte man bei den schnellgehenden Triebwerksrädern, welche große Kräfte zu übertragen und bedeutende Massen in Umschwung zu setzen haben, derartige Gründe maßgebend sein lassen, wenn die Zahnprofile den Bedingungen einer gleichmäßigen Bewegungsübertragung nicht so genau wie nur irgend möglich genügen. Die Nachtheile unrichtiger Zahnformen lassen sich in diesem Falle leicht übersehen. Stellt man sich vor, eine Ase A , die sich gleichmäßig mit der Winkelgeschwindigkeit α dreht, solle eine andere Ase B mit der Winkelgeschwindigkeit β bewegen, und seien zu dem Zwecke zwei Zahnräder von den Halbmessern a und b , also so, daß $a\alpha = b\beta$ ist, angeordnet. Sind nun die Zahnformen nicht richtig gewählt, so daß also die Druckrichtung nicht stets durch das Momentancentrum geht, vielmehr die Centrale abwechselnd in größerem (a_1) oder geringerem (a_2) Abstände als a von der Ase A schneidet,

so nimmt die Welle *B* dem entsprechend eine schwankende Winkelgeschwindigkeit und zwar eine größere als β im ersteren Falle an, d. h. wenn $a_1 > a$, und eine kleinere im letzteren Falle, wo $a_2 < a$ ist. In Folge dessen wird der ganzen mit der Welle *B* verbundenen Masse bald eine Beschleunigung ertheilt, wozu ein größerer Druck zwischen den Zähnen erforderlich ist, als der dem durchschnittlichen Arbeitswiderstande der Welle *B* entsprechende, bald wird die Welle *B* vermöge der in ihr aufgespeicherten lebendigen Kraft derjenigen *A* voranzueilen bestrebt sein, indem sie zur Ueberwindung des Nutzwiderstandes jene lebendige Kraft theilweise verwendet. In diesem Augenblicke wird der Zahn des Rades *b* nicht mehr von demjenigen des Rades *a* gedrückt, sondern er drückt bei seinem Voreilen mit seiner Hinterfläche gegen die Rückfläche des Zahns von *a*. Hiermit ist ein gewisser Stoß verbunden wegen des zwischen den Zähnen unvermeidlichen Flankenspielraums, welchen der Zahn von *b* erst durchlaufen muß, ehe seine Rückfläche auf die Hinterfläche des Zahns von *a* trifft. Unmittelbar darauf bei Einwirkung des nächsten Zähnpaars wird der Zahn von *b* wieder von dem von *a* eingeholt, wobei wieder ein kleiner Stoß zwischen den Vorderflächen eintritt. Da dieser Vorgang in jeder Minute nz mal sich wiederholt, unter n die Umdrehungszahl und unter z die Zähnezahl eines der Räder verstanden, so erklärt sich zur Genüge das klappernde Geräusch, welches bei schnellem Gange und Anwendung unrichtiger Zahnformen sich einstellen muß. Daß durch die fortwährend sich wiederholenden Vibrationen, denen das Material hierbei ausgesetzt ist, die Festigkeit desselben auf die Dauer sehr gefährdet wird, ist eine bekannte Thatsache. Man erkennt hieraus auch, daß der erwähnte Nachtheil um so beträchtlicher sich äußern muß, je größer die Umfangsgeschwindigkeit der Räder, je größer die bewegten Massen und je größer der Flankenspielraum ist, welchen letzteren thunlichst herabzuziehen ebenfalls eine möglichst genaue Ausführung namentlich Theilung der Räder erforderlich ist. Insbesondere fallen, wie leicht erklärlich ist, jene Nachtheile ins Gewicht, wenn schwere Schwungräder, wie bei Walzwerken zuweilen üblich, der größeren Geschwindigkeit wegen, nicht auf der Dampfmaschinenwelle, sondern auf einer von dieser durch Zahnräder betriebenen Axe umgedreht werden, ein Losrütteln der Räder auf dieser Axe und Warmlaufen ihrer Lager ist in solchem Falle selbst bei der sorgsamsten Ausführung oft kaum zu vermeiden.

Aus dem Vorstehenden erklärt sich auch die Vorzüglichkeit hölzerner Zähne bei schnellgehenden Triebrädern, da das Holz gerade gegen lebendige Kräfte eine so große Arbeitsthätigkeit zu äußern vermag, und zwar versteht man immer nur das eine von zwei zusammenarbeitenden Rädern, meistens das treibende, mit Holzzähnen. Giebt man dem größeren Rade die hölzernen Zähne, so widerstehen dieselben wegen des weniger häufigen Angriffs allerdings länger, bei der nach Zahnen aber doch nöthigen Erneuerung sind die

Kosten indeß auch entsprechend größer, und der Zeitverlust oft bedeutend. Trotz der oft gegebenen entgegengesetzten Regel scheint es daher zweckmäßiger zu sein, das kleinere Rad mit den hölzernen Zähnen zu versehen, da man von diesem auch ein Reserverad leicht vorrätzig halten kann.

Für die Räder, von denen das eine mit Holzzähnen versehen ist, eignet sich besonders die Geradflankenverzahnung, und zwar sowohl wegen der leichteren Bearbeitung der Flächen, als auch deswegen, weil bei diesen nahezu parallelen Flächen die Flanken Langholz zeigen können, während bei nach außen sich stark verjüngenden Zähnen, wie namentlich die nach Evolventen geformten Zähne des kleineren Rades es sind, unvermeidlich einzelne Fasern als Hirnholz auf den Flanken zu Tage treten. In Folge dessen werden solche Zähne durch das eingreifende eiserne Rad sehr schnell abgenutzt, insbesondere wenn die stemmende Wirkung vor der Centrale beträchtlich ist, wobei der eiserne Zahn wie ein Werkzeug gegen den Spahn arbeitet. Im Uebrigen sind die Geradflankenzähne bei eisernen Rädern nicht zu empfehlen, da insbesondere bei den kleineren Rädern mit wenig Zähnen wegen der starken Convergenz der Flanken die Zähne hinten im Bruchquerschnitte sehr geschwächt werden, daher man behufs genügender Festigkeit die Theilung und damit die Zahnlänge vergrößern und somit die Nachtheile größerer Zahnreibung und eines weniger sanften Ganges in Kauf nehmen muß. Nur bei ganz kleinen aus Schmiedeeisen zu fertigenden Getrieben für Hebzuge, bei denen es auf die Möglichkeit der Verwendung einer sehr geringen Zähnezahl (bis zu 3 herab) ankommt, wendet man zuweilen wohl gerade Flanken an, da diese allein eine so geringe Zähnezahl gestatten, und das verwendete Material doch die genügende Festigkeit gewährt. Auch die Triebstockverzahnung empfiehlt sich nur für schmiedeeiserne Räder, in welchem Falle eine ausgezeichnete Festigkeit durch sie zu erlangen ist; die hölzernen Stockgetriebe, wie sie in älteren Mühlen-einrichtungen vorkommen, werden heute kaum noch ausgeführt. In Uhren und Winden dagegen sind Triebstöcke vielfach noch im Gebrauche.

Hinsichtlich der Festigkeit sind die nach Evolventen geformten Zähne vorzüglichste zu nennen, da deren Form am meisten der Form von Balken gleichen Widerstandes sich nähert. Man kann in Folge dessen die Theilung bei demselben Kraftübertrag geringer machen und erhält dadurch die mit größeren Zähnezahlen verbundenen Vortheile geringerer Reibung und sanfteren Ganges. Nur für sehr geringe Zähnezahlen (Windengetriebe etc.) sind die Evolventenzähne weniger gut zu gebrauchen, da die Minimalzahl eine größere ist, als bei Cycloidenzähnen. Auch wenn die beiden mit einander arbeitenden Räder sehr ungleiche Größe haben, werden meist die Zähne des kleinen Rades so spitz, daß ein Abbrechen der oberen Kanten zu befürchten ist, und pflegt man aus diesem Grunde bei Rädern, deren Verhältniß etwa die Zahl 5 übersteigt, eine andere Zahnform zu wählen. Man macht den Evolventenzähnen zu

weisen den Vorwurf, daß sie wegen der schrägen Druckrichtung einen verstärkten Axendruck geben, ein Nachtheil, der aber viel weniger beträchtlich ist, als es scheint. Denn setzt man die übliche Neigung der Druckrichtung gegen die Centrale von 75° voraus, so bestimmt sich der aus einem Umfangswiderstande P folgende Axendruck nur zu

$$\frac{P}{\sin 75^\circ} = \text{circa } 1,04 P.$$

Auch bei den Cycloidenzähnen ist die Druckrichtung im Allgemeinen geneigt gegen die Centrale, und zwar unter einem veränderlichen Winkel, welcher nur in einem einzigen Augenblicke zu einem Rechten wird, wenn die Zähne sich in der Momentanaxe berühren. Wenn nun auch die durchschnittliche Abweichung der Druckrichtung von der Tangente der Theilkreise bei den Cycloidenzähnen etwas geringer sein wird, als bei der Evolventenverzahnung, so ist doch im ersteren Falle die Schwankung dieser Druckrichtung und damit die Veränderlichkeit der Druckkraft für den Verschleiß der Zähne und den ruhigen Gang der Räder nicht besonders günstig und die daraus folgenden Nachtheile werden meist größer sein als der aus der unbedeutenden Vergrößerung des Axendrucks bei Evolventenzähnen hervorgehende.

Zu den Vortheilen der letzteren Verzahnungsmethode muß insbesondere noch der Umstand gerechnet werden, daß die nach Evolventen gebildeten Zahnprofile richtige bleiben, auch wenn man die Axen um eine gewisse geringe Größe einander nähert oder von einander entfernt. Eine geringe Entfernung der Axen tritt in den meisten Fällen in Folge des Lagerverschleißes von selbst ein, und andere als Evolventenzähne können dann nicht mehr richtig zusammenarbeiten. Andererseits ist in der Eigenthümlichkeit, die Axen ein wenig nähern zu können, die Möglichkeit geboten, bei der Montirung den schädlichen Flankenspielraum auf das thunlich kleinste Maß zu verringern. Daß eine solche geringe Verschiebung der Axen unbeschadet der Wichtigkeit der Zahnprofile geschehen kann, ergibt sich leicht daraus, daß die für die Zahnformen zu Grunde gelegten Evolutenkreise stets eine gemeinschaftliche Tangente behalten, welche die Centrale in einem solchen Punkte schneidet, dessen Abstände von den Axen sich wie die Halbmesser der Evolutenkreise verhalten. Eine Näherung der Axen wird also nur den Einfluß haben, daß die beiden Kreise gleicher Geschwindigkeit oder die Theilkreise etwas kleiner werden, ohne daß ihr gegenseitiges Verhältniß geändert wird, und daß die Druckrichtung eine etwas größere Neigung gegen die Centrale annimmt; die Eingriffsbögen werden dabei unbedeutend größer, da die Kopfhöhen der Zähne es werden. Das Entgegengesetzte findet bei einer Entfernung der Axen von einander statt. Diese Eigenschaft läßt die Evolventenzähne in solchen Fällen sehr geeignet erscheinen, wo, wie bei Walzwerken, die Axen

einen veränderlichen Abstand haben müssen. Aus allen diesen Gründen kann man wohl die Evolventenzähne zu den vollkommensten rechnen.

Was die Kreisbogenförmigen Zähne anbetrißt, so ist ein Vortheil derselben nicht einzusehen, da sie erstens doch als Annäherungsformen nur in einer oder zwei Berührungslinien genau richtige Bewegungsübertragung ergeben und ihre einfachere Begrenzung bei der Darstellung der Räder keineswegs Erleichterung verschafft; letzteres gilt höchstens für die Anfertigung der Zeichnungen, für welche man sich daher wohl dieses Verfahrens bedienen kann, wenn dieselben nicht zur unmittelbaren Ausführung dienen. Nur in besonderen Fällen wird die Kreisbogenverzahnung räthlich erscheinen, wenn aus Festigkeits- oder sonstigen Rücksichten eine Form wünschenswerth ist, der man mit Kreisbögen sich am besten annähern kann. Ein besonderer Nachtheil des nach §. 74 aus zwei Kreisbögen zusammengesetzten Zahnprofils liegt darin, daß diese Bögen im Theilkreise nicht tangential in einander übergehen, sondern eine stumpfe Ecke bilden, welche sich bald abnutzen muß, wenn man nicht von vornherein eine entsprechende Abrundung vornimmt.

Schließlich mag hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß in neuerer Zeit, wo die vorzüglich arbeitenden Räderformmaschinen sich mehr und mehr in den Gießereien einführen, der Constructeur von Triebwerken weniger abhängig von den Modellböden ist, und daß aus diesem Grunde die Satzräderysysteme wesentlich an ihrer früheren Bedeutung verlieren. Da bei der Herstellung der Räder durch Formmaschinen die gewählte Zahnform für die Anfertigungskosten so gut wie gleichgültig ist, so ist bei der Veranlagung von Triebrädern eine größere Freiheit gelassen, und es werden die früher meist festgehaltenen starren Regeln namentlich über die Höhe der Zahnkronen u. weniger maßgebend sein.

Räder für nicht parallele Axen. Für den Fall, daß die Axen §. 81. der Räder nicht parallel sind, ist die Form der zugehörigen Momentanaxenflächen bereits in §§. 45 und 46 näher untersucht und insbesondere gefunden worden, daß bei sich schneidenden Axen die Aroide zwei bestimmte Kegelmäntel sind, deren gemeinsame Spitze im Axendurchschnitte liegt, während bei windschiefen Axen die Momentanaxenflächen durch zwei gewisse Um-drehungshyperboloide dargestellt werden. Auch die conischen und hyperboloidischen Räder werden in ähnlicher Weise mit Zähnen versehen, wie dies im Vorstehenden betreffs der Stirnräder gezeigt ist, und es handelt sich wie dort auch hierfür um die Untersuchung der Begrenzungen, die diesen Zähnen zu geben sind, wenn durch den Zahneingriff der gleichmäßigen Bewegungsübertragung kein Eintrag geschehen soll. Hinsichtlich der Construction richtiger Zahnflächen läßt sich nun ein allgemein gültiges Bildungsgesetz aufstellen, aus welchem die Regeln für die einzelnen speciellen Fälle, also