meter, welchem ein genauer Durchmesser von $\frac{4800}{3,14} = 1,528$ Meter entspricht. Macht man die Zahnköpfe $0,3\,t = 15$ Millimeter und die Zahnfüße $0,4\,t = 20$ Millimeter lang, so erhält der Kopfkreis einen Durchmesser von

$$1528 + 2\,.\,15 = 1558 \text{ Millimeter}$$

und der Fußkreis einen solchen von

$$1528 - 2\,.\,20 = 1488 \text{ Millimeter.}$$

2) Das 5 Meter im Durchmesser große gezahnte Schwungrad einer 40 pferdigen Dampfmaschine, welche 30 Umdrehungen in der Minute macht, greift in ein Getriebe der Betriebswelle von 1,5 Meter Durchmesser, welches mit hölzernen Zähnen versehen werden soll. Welche Abmessungen müssen dieselben erhalten?

Die erforderliche Theilung bestimmt sich hier nach Reuleaux zu:

$$t = 92,4 \sqrt[4]{\frac{40}{30}} = 98,9,$$

wofür rund 100 Millimeter zu nehmen ist, wobei eine Breite zu Grunde liegt von

$$b = 10,6\; t \sqrt{\frac{N}{r}} = 10,6 \sqrt{\frac{40}{750}}\,.\; t = 2,44\; t = 244 \text{ Millimeter.}$$

Die Ermittelung der Zahndimensionen, Zähnezahlen und des genauen Theilkreisdurchmessers wie oben.

Zahnreibung. Wenn die Räder zweier parallelen Axen sich in einer §. 79
Geraden berühren, welche mit der ihrem Bewegungszustande zugehörigen Momentanaxe zusammenfällt, so tritt wegen der rein wälzenden Bewegung eine gleitende Reibung an der Berührungsstelle nicht ein. Bei den Frictionsscheiben, sowohl denen mit directer Uebertragung, wie bei den Riemenrädern findet die Berührung fortwährend in der Momentanaxe statt, so daß dabei, eine vollständige Bewegungsmittheilung ohne Rutschen vorausgesetzt, eine gleitende Reibung an den Umfängen auch nicht eintreten kann. Bei den Zahnrädern indessen berühren sich zwei Zähne während ihrer Einwirkung auf einander nur in einem einzigen Augenblicke in der Momentanaxe P, Fig. 270 (a. S. 391), indem die Berührungslinie während der gedachten Einwirkung die Eingriffslinie GPH von einem Endpunkte bis zum anderen durchwandert. Es ist nun klar, daß hierdurch gewisse Reibungswiderstände hervorgerufen werden müssen, denn wenn beispielsweise die Berührung in einer durch J gehenden, den Axen parallelen Geraden geschieht, so findet anstatt der augenblicklichen kleinen Drehung um die Momentanaxe P eine ebenso große Drehung um die Gerade in J statt, verbunden mit einer Verschiebung der beiden Zahnflächen in J auf einander, in einer zu PJ senkrechten Richtung. Der Betrag dieser Verschiebung, also auch der Reibungsweg beträgt nach Einleitung §. 4, $\lambda \partial \omega$, wenn λ den Abstand PJ und $\partial \omega$ den Drehungswinkel um die Momentanaxe bezeichnet. Ist nun durch K der Druck zwischen den Zahnflächen in der Richtung PJ und durch φ der

Reibungscoefficient bezeichnet, so ist die in dem betrachteten Augenblicke zu überwindende Reibungsarbeit durch $\varphi K \lambda \partial \omega$ gegeben. Bedeuten ferner $l_1 = GP$ und $l_2 = PH$ die Abstände des Anfangs- und Endpunktes der Eingrifflinie GH von der Momentanaxe P, so drückt sich die gesammte Reibungsarbeit, welche zwischen den beiden Zähnen auftritt, aus durch:

$$A = \int_0^{l_1} \varphi K \lambda \partial \omega + \int_0^{l_2} \varphi K \lambda \partial \omega = A_1 + A_2.$$

Hierin bedeutet der erste Ausdruck

$$A_1 = \int_0^{l_1} \varphi K \lambda \partial \omega$$

die Reibung, welche vor der Centrale auf GP sich einstellt, und der andere

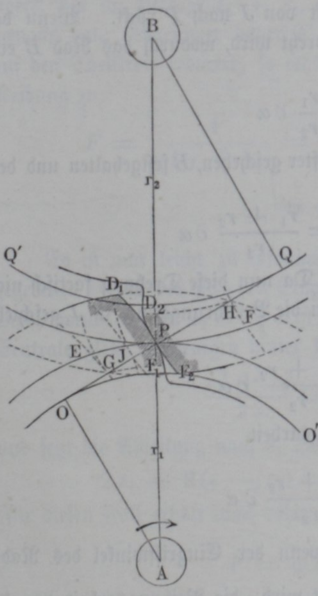
$$A_2 = \int_0^{l_2} \varphi K \lambda \partial \omega$$

die hinter der Centrale auf der Strecke PH stattfindende Reibung.

Es ist leicht ersichtlich, daß diese beiden Reibungen in entgegengesetzten Richtungen wirkend auftreten. Nachdem nämlich bei Beginn des Eingriffs in G der Zahn $D_1 F_1$ des treibenden Rades A mit dem Punkte F_1 den Punkt F_2 des getriebenen Zahns $D_2 F_2$ erfaßt hat, wird sich die Zahnfläche $F_1 P$ auf der Zahnfläche $F_2 P$ in der Richtung von F_2 nach P hin verschieben, bis die beiden Flächen mit den Punkten P in der Centrale zusammenfallen. Die ganze Verschiebung während dieser Periode ist offenbar durch die Differenz der Curvenlängen $PF_2 - PF_1$ gegeben. Ebenso findet während der zweiten Periode des Eingriffs hinter der Centrale eine Verschiebung der Zahnfläche PD_1 auf derjenigen PD_2 in der Richtung von D_2 nach P, also der vorherigen entgegengesetzt, statt, und ist diese Verschiebung gleich der Differenz der Curvenstücke $PD_1 - PD_2$. Man kann diese verschiedenen Richtungen der relativen Bewegungen dahin kennzeichnen, daß die Zahnflächen jedes Rades vor der Centrale sich gegen die Axe des anderen Rades hin schieben, dagegen hinter der Centrale von dieser Axe hinweg ziehen. Man bezeichnet die erste Art der Wirkung wohl als das Stemmen, die letztere als das Ausstreichen der Zähne.

Die Erfahrung hat ergeben, daß die Reibung vor der Centrale das Material der Zähne weit mehr angreift, als die Reibung hinter der Centrale, und ist schon oben angegeben worden, daß es aus diesen Gründen rathsam erscheinen muß, die Höhe der Köpfe des getriebenen Rades geringer zu machen als die des treibenden, um das Stemmen möglichst zu vermindern. Aus diesem Grunde hat man sich auch zu erklären, warum man bei den Rädern, welche mit Stockgetrieben oder Drehlingen zusammen arbeiten, immer dem treibenden Rade die Zähne und dem getriebenen Rade die Stöcke giebt, weil die Stöcke hauptsächlich als Zahnfüße zu betrachten sind, indem nur der kleine zwischen dem Theilkreise und seiner Tangente liegende Theil der Oberfläche eines Stockes als Zahnkopf wirkt, entsprechend einem Eingriffbogen vor der Centrale von noch nicht einem Viertel der Theilung (s. §. 77). Im Allgemeinen steht jedoch der gänzlichen Weglassung der Zahnköpfe bei dem getriebenen Rade das Bedenken entgegen, daß dann die Eingriffstrecke hinter der Centrale, somit die Größe l_2, um so größer gemacht werden muß, daher der Weg der Reibung wieder vergrößert wird. Auch muß man bemerken, daß die Anordnung von Zähnen überhaupt bei der nie absoluten Genauigkeit der Ausführung gewisse Abweichungen von dem idealen Bewegungszustande, wie er den Axoiden entspricht, herbeiführen wird, welche Abweichungen um so größer werden müssen, je größer der Abstand von der Momentanaxe ist, in welchem die Zähne zur Berührung kommen. Deswegen pflegt man trotz der schädlichen Wirkung des Stemmens doch dem getriebenen Rade ebenfalls Zahnköpfe zu geben, und ist schon (§. 77) darauf hingewiesen, wie die Rücksichten auf Benutzung der Modelle und Fräsen dazu führen, die beiderseitigen Köpfe sogar von gleicher Höhe zu machen.

Fig. 270.



Aus den oben gefundenen Ausdrücken

$$A_1 = \int_0^{l_1} \varphi K \lambda \partial \omega$$

und

$$A_2 = \int_0^{l_2} \varphi K \lambda \partial \omega$$

für die Reibungsarbeit vor und hinter der Centrale erkennt man zunächst, daß diese Arbeitsverluste von der Form der Zahnflächen abhängig sein müssen, da die Größe λ sich nach dieser Form richtet; doch ist, wie sich aus dem Folgenden ergiebt, die Verschiedenheit bei den gebräuchlichen Zahnprofilen nur unbedeutend. Es seien zunächst evolventenförmige Profile, Fig. 270, zu Grunde gelegt, die Druckrichtung OQ bilde den Winkel $OPA = \gamma$ mit der Centrale, und sei $e_1 = \widehat{EP}$ der Eingriffbogen vor und $e_2 = \widehat{PF}$ derjenige hinter der Centrale. Es ist dann aus dem Früheren bekannt, daß die Strecken der Eingrifflinie

$$GP = e_1 \sin\gamma \quad \text{und} \quad PH = e_2 \sin\gamma$$

sind, da diese Längen zufolge der Entstehung der Zahnprofile durch Abwickelung der Kreise O' und Q' gleich den den Eingriffwinkeln zugehörigen Bogen der Evolutenkreise von den Halbmessern

$$A\,O = r_1 \sin\gamma \quad \text{und} \quad B\,Q = r_2 \sin\gamma$$

sein müssen. Ebenso ist klar, daß in irgend einer Stellung der Zähne, wo der Berührungspunkt ihrer Profile zwischen G und P etwa in J sich befindet, der Abstand

$$\lambda = PJ = r_1 \sin\gamma \,.\, \alpha$$

ist, unter α den Winkel verstanden, um welchen das Rad A noch gedreht werden muß, bis der Berührungspunkt von J nach P rückt. Wenn das Rad A aus dieser Stellung um $\partial\alpha$ gedreht wird, wodurch das Rad B eine Drehung um

$$\partial\beta = -\frac{r_1}{r_2}\,\partial\alpha$$

erhält, so kann man, wie früher schon öfter geschehen, B festgehalten und dem Rade A eine Drehung gleich

$$\partial\omega = -\partial\beta + \partial\alpha = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\partial\alpha$$

um die Momentanaxe P ertheilt denken. Da nun diese Drehung factisch nicht um die Momentanaxe in P, sondern um die Berührungslinie in J geschieht, so wird die erwähnte Verschiebung

$$\lambda\,\partial\omega = \lambda\,\frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\partial\alpha$$

stattfinden, daher die elementare Reibungsarbeit

$$\varphi\, K \lambda\, \frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\partial\alpha$$

zu verrichten sein. Man hat daher, wenn der Eingriffwinkel des Rades A vor der Centrale $\frac{e_1}{r_1}$ mit ε_1 bezeichnet wird, die Reibungsarbeit vor der Centrale:

$$A_1 = \int_0^{\varepsilon_1} \varphi\, K \lambda\, \frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\partial\alpha = \varphi\,\frac{r_1 + r_2}{r_2}\, r_1 \sin\gamma \int_0^{\varepsilon_1} K\alpha\,\partial\alpha$$

zu setzen.

Wegen der unveränderlichen Druckrichtung von K ist dieser Druck bei Evolventenzähnen constant, und man hat, unter P die Umfangskraft am

Theilkreise verstanden, $K \sin \gamma = P$, daher ergiebt sich:

$$A = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} r_1 \int\limits_0^{\varepsilon_1} \alpha \partial \alpha = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{r_1 \varepsilon_1^2}{2}.$$

In derselben Art findet man die Arbeit der Reibung während des Eingriffs hinter der Centrale:

$$A_2 = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{r_1 \varepsilon_2^2}{2}$$

und somit die gesammte Reibungsarbeit:

$$A = A_1 + A_2 = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} r_1 \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2}.$$

Diese Arbeit wird überwunden, während das Rad eine Drehung um die eigene Axe im Betrage $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, also der Umfang einen Weg $r_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ gemacht hat. Bezeichnet daher F die durchschnittliche Größe der Reibung auf den Theilkreis reducirt, so erhält man aus $A = F r_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ diese Reibung zu:

$$F = \frac{A}{r_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

$$= \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2 \varepsilon}.$$

Es ist nun leicht zu erkennen, daß dieser Werth bei einer gewissen gegebenen Größe des ganzen Eingriffwinkels $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ein Minimum wird, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \varepsilon$ ist, d. h. wenn der Eingriffwinkel vor der Centrale gleich demjenigen hinter der Centrale ist, denn schreibt man:

$$\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2 \varepsilon} = \frac{\varepsilon_1^2 + (\varepsilon - \varepsilon_1)^2}{2 \varepsilon}$$

und setzt die Ableitung nach ε_1 gleich Null, so erhält man:

$$2 \varepsilon_1 - 2 (\varepsilon - \varepsilon_1) = 0, \quad \text{oder} \quad \varepsilon_1 = \tfrac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon_2.$$

Für diesen Fall erhält man daher die auf den Theilkreis reducirte Reibung:

$$F = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{\varepsilon}{4}.$$

Der Winkel ε muß nun mindestens gleich dem Theilungswinkel $\tau_1 = \frac{t}{r_1}$ sein, wenn überhaupt die Bewegungsübertragung ununterbrochen vor sich gehen soll, man pflegt indessen den Eingriffwinkel wie in §. 77 näher ausgeführt, meist größer anzunehmen. Setzt man für den Eingriffbogen eine Größe $e = \nu t$ voraus, unter ν eine Zahl größer als 1 verstanden, so ist:

$$\varepsilon = \frac{e}{r_1} = \frac{\nu t}{r_1},$$

und man erhält durch Einführung dieses Werthes:

$$F = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{\nu t}{4 r_1} = \varphi K \left(\frac{1}{2 r_1} + \frac{1}{2 r_2} \right) \frac{\nu t}{2}.$$

Führt man schließlich hierin

$$\frac{t}{2 r_1} = \frac{\pi}{z_1} \text{ und } \frac{t}{2 r_2} = \frac{\pi}{z_2}$$

ein, so wird

$$F = \varphi \pi K \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{\nu}{2}.$$

In der Regel pflegt man für die Rechnung $\nu = 2$ anzunehmen, d. h. man setzt voraus, daß der Eingriff in dem Abstande t vor der Centrale beginne und um ebenso weit hinter derselben endige, und es geht dann obiger Ausdruck über in:

$$F = \varphi \pi K \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{1}{3} \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right),$$

wenn man den Reibungscoefficienten zwischen gußeisernen Zähnen $\varphi = 0{,}11$ und daher $\varphi \pi = \frac{1}{3}$ annimmt.

Aus der vorstehenden Entwickelung ist auch sogleich klar, daß bei innerem Eingriffe der Ausdruck

$$F = \varphi \pi \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \frac{\nu}{2}$$

folgt, da hierbei die Bewegung des inneren Rades bei festgehaltenem äußeren Rade in jedem Augenblicke auf eine Drehung

$$\partial \omega = \frac{r_2 - r_1}{r_2} \partial \alpha$$

hinausläuft, und ebenso wird für eine Zahnstange, für welche man r_2 oder z_2 unendlich groß anzusehen hat,

$$F = \varphi \pi \frac{P}{\sin \gamma} \frac{1}{z_1} \frac{\nu}{2}$$

folgen.

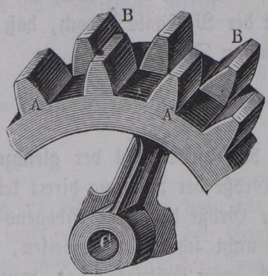
Diese Formeln gelten, wie aus der Entwickelung hervorgeht, nur unter der Voraussetzung, daß der Eingriff vor und hinter der Centrale in gleichen Abständen $\frac{\nu}{2} t$ beginne und endige. Es ist bei dieser Untersuchung stillschweigend vorausgesetzt worden, daß der ganze zu übertragende Druck $K = \frac{P}{\sin \gamma}$ immer nur von einem einzigen Zahne aufgenommen werde, was offenbar nur dann stattfindet, wenn $\nu = 1$ ist, d. h. wenn der Eingriff nur auf einer Strecke gleich der Theilung stattfindet. Im Allgemeinen wird indeß, da man e stets größer als die Theilung annimmt, auch mehr als ein einziges Zähnepaar gleichzeitig im Eingriffe sein. Wählt man z. B. $\nu = 2$, so wird der Druck P stets auf zwei Zähne sich vertheilen, daher auch an zwei Zähnen gleichzeitig Reibung stattfinden, mit der Maßgabe jedoch, daß auf jeden Zahn auch nur etwa die Hälfte des ganzen Druckes, also:

$$\frac{K}{2} = \frac{P}{2 \sin \gamma}$$

übertragen wird. Es geht daraus hervor, daß die Anzahl der gleichzeitig im Eingriffe stehenden Zähnepaare auf die Größe der Reibung direct keinen Einfluß hat, sondern nur insofern, als die Größe des Eingriffbogens νt damit in Beziehung steht. Es ist übrigens nicht schwer zu beweisen, daß diese letztere Behauptung allgemein, also auch dann Gültigkeit hat, wenn ν nicht durch eine ganze, sondern durch eine gebrochene Zahl, z. B. 1,6, dargestellt ist. In diesem Falle wird der Druck abwechselnd durch ein einziges Zähnepaar in ganzer Größe auf einem Wege $0{,}4\,t$ und dann durch zwei Zähnepaare von jedem in halber Größe auf einem Wege $0{,}6\,t$ übertragen werden, u. s. f.

Wenn aber dennoch nach den entwickelten Formeln die Reibung um so kleiner ausfällt, je größer die Zähnezahlen z_1 und z_2 der Räder sind, so liegt der Grund hiervon einfach darin, daß bei größeren Zähnezahlen, d. h. bei kleinerer Theilung der Eingriffwinkel ebenfalls kleiner gemacht werden kann, wodurch die Reibung sich vermindert. Mit Rücksicht hierauf ist es daher gerathen, die Theilung so klein zu machen, als die nach §. 78 zu beurtheilende Festigkeit der Zähne überhaupt gestattet. Da diese Festigkeit eine gewisse Größe der Theilung bedingt, welche man wenigstens annehmen muß, so hat man, theils zur Verminderung der Reibung, hauptsächlich aber zur Erreichung eines möglichst gleichmäßigen Ganges für gewisse Arbeitsmaschinen (z. B. Hobelmaschinen), zuweilen die Construction der sogenannten Stufenräder gewählt. Denkt man sich ein gewöhnliches Zahnrad mit z_1 Zähnen von der Theilung t durch eine zur Axe senkrechte Mittelebene in zwei Räder zerschnitten und diese, genau um die halbe Theilung gegen einander verdreht, wieder vereinigt, so erhält man ein **Zweistufenrad**, Fig. 271 (a. f. S.), und es ist klar, daß ein solches Rad mit seinem entsprechenden Partner genau so arbeitet, als ob es $2\,z_1$ Zähne, d. h. eine Theilung $\frac{t}{2}$ hätte. Wenn man nun an Räder überhaupt die Bedingung stellt, daß der Eingriffbogen gleich der νfachen Theilung sein soll, so wird bei dem zweistufigen Rade mit z_1 Zähnen dieser Bogen offenbar nur $\nu\,\frac{t}{2}$, d. h. wie für ein Rad derselben Größe, aber mit $2 z_1$ Zähnen zu sein brauchen, und es folgt ohne Weiteres, daß die Reibung zwischen diesem Rade und seinem gleichfalls zweistufigen Partner mit z_2 Zähnen sich berechnet zu

Fig. 271.



$$F_1 = \pi \varphi \frac{P}{sin \gamma} \left(\frac{1}{2 z_1} + \frac{1}{2 z_2}\right) \frac{\nu}{2} = \frac{1}{2} F,$$

also nur halb so groß, als für die einstufigen Räder mit gleichen Zähnezahlen. Dies setzt aber natürlich voraus, daß bei den zweistufigen Rädern die Länge der Zähne derartig verringert wird, daß der Eingriffbogen nur $\nu \frac{t}{2}$ beträgt. Hierzu ist beiläufig nur etwa $1/4$ von der dem einstufigen Rade zukommenden Zahnkopfhöhe erforderlich. Wollte man diejenige Zahnlänge, welche dem einstufigen Rade zukommt, auch für das zweistufige beibehalten, so würde eine Verminderung der Zahnreibung nicht erreicht werden, da diese von dem Eingriffwinkel ε abhängt, welcher bei unveränderter Zahnhöhe auch unverändert bleibt. Hierbei würde auch der andere Vortheil verloren gehen, welchen man durch Stufenräder erreichen will, der nämlich eines gleichmäßigeren Ganges. Bedenkt man nämlich, daß die Einwirkung zweier Zähne um so mehr von dem idealen Bewegungszustande, wie er den Axoiden entspricht, abweichen wird, in je größerem Abstande von der Momentanaxe die Zähne zur Berührung kommen, so erkennt man sofort, daß die Anordnung der Stufenräder nur dann jene Unregelmäßigkeiten herabzuziehen gestattet, wenn gleichzeitig die Länge der Zähne, d. h. deren Hervorragungen über die Momentanaxenflächen verringert werden. Unter dieser Voraussetzung, daß $e = \nu \frac{t}{3}$ sei, giebt das dreistufige Rad, Fig. 272, dann auch nur eine Reibung

$$F_1 = \pi \varphi \frac{P}{sin \gamma} \left(\frac{1}{3 z_1} + \frac{1}{3 z_2}\right) \frac{\nu}{2} = \frac{1}{3} F.$$

Denkt man ein solches Stufenrad aus sehr vielen sehr schmalen Rädern bestehend, so nehmen bei einer unendlich großen Anzahl die Zähne eine schräge Stellung gegen die Axe an, Fig. 273. Diese zuerst von White*) angegebenen Räder gestatten offenbar, durch eine sehr geringe Länge der Zähne die Reibung herabzuziehen, wogegen indessen durch

*) White, Century of Inventions. 1822.

die schräge Stellung der Zahnflächen schädliche Seitendrücke nach den Axenrichtungen erzeugt werden, welche zu neuen Reibungswiderständen

Fig. 272.

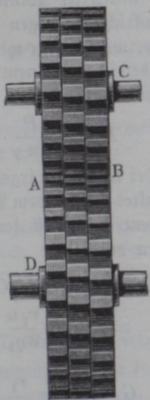


Fig. 274.

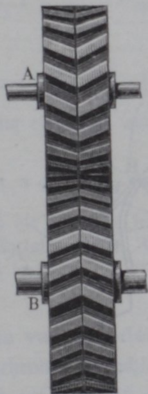


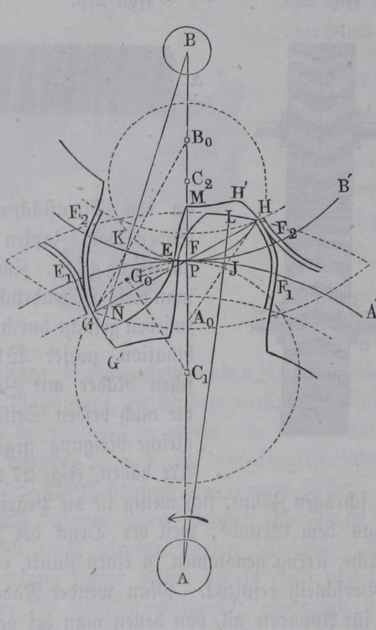
Fig. 273.

an den Stirnflächen und Enden der Zapfen Veranlassung geben. Zwar hat man diese Seitendrücke aufzuheben gesucht durch Combination zweier White'schen Räder mit Zähnen, die nach beiden Seiten hin gleiche Neigung gegen die Axe haben, Fig. 274, doch haben diese, wie überhaupt die schrägen Zähne, sich wenig in die Praxis eingeführt, hauptsächlich wohl aus dem Grunde, weil der Druck der Zähne immer auf eine sehr geringe Fläche, streng genommen in einen Punkt, concentrirt ist, woraus ein schneller Verschleiß resultirt. Man wendet Räder mit einseitig schrägen Zähnen meist für Apparate an, von denen man bei geringer zu übertragender Kraft einen möglichst gleichmäßigen Gang erfordert, z. B. bei den sogenannten Universaldrehstühlen der Uhrmacher. Räder mit nach beiden Seiten hin schrägen Zähnen hat man unter anderem auch für Eisenbahnen mit steiler Steigung vorgeschlagen.

Es ist übrigens leicht zu erkennen, daß die Form der schrägen Zähne diejenige stark ansteigender Schraubenflächen sein muß, weswegen man solche Räder auch oft als Schraubenräder bezeichnet, obwohl von einer eigentlichen Schraubenwirkung nicht die Rede sein kann.

Anmerkung. Wenn die Zahnprofile andere als evolventenförmige Gestalt haben, so bestimmt sich die Reibung in ähnlicher Art, wie für diese im Obigen geschehen. Es sei beispielsweise die allgemeine cycloidische Verzahnung zu Grunde gelegt, bei welcher die Profile durch Abwälzung der beiden Kreise C_1 und C_2, Fig. 275 (a. f. S.), von den Halbmessern ϱ_1 und ϱ_2 auf den Theilkreisen A' und B' erzeugt werden, und seien wieder $GP = e_1$ und $PH = e_2$ die Eingriffstrecken, also $E_1 P = E_2 P = e_1$ und $PF_1 = PF_2 = e_2$ die Eingriffbogen auf den Theilkreisen. Hier bildet die Druckrichtung mit der Centrale einen veränderlichen Winkel, welcher 90° beträgt, wenn die Berührung in P stattfindet, während für die äußersten Berührungspunkte G und H die Richtung des Druckes durch GP und PH gegeben ist. Bezeichnet γ den mittleren Winkel dieser Druckrichtung gegen die Centrale, welcher nur wenig verschieden ist von einem rechten, so hat man

Fig. 275.



$$K = \frac{P}{\sin\gamma}.$$

Der Abstand λ irgend eines Punktes G_0 von dem Momentancentrum P ist ferner gegeben durch

$$P\,G_0 = 2\,\varrho_1 \sin {}^1\!/_2\, G_0\, C_1\, P$$
$$= 2\,\varrho_1 \sin\frac{r_1\,\alpha}{2\,\varrho_1},$$

da

$$G_0\,C_1\,P = \frac{r_1}{\varrho_1}\,\alpha$$

ist, unter α wieder den Winkel verstanden, um welchen das Rad A gedreht werden muß, wenn der Berührungspunkt von G_0 nach P fortrücken soll. Da im Uebrigen wieder

$$\theta\,\omega = \frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\partial\alpha$$

bei äußerem Eingriffe ist, $\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2}\right.$ bei innerem Eingriffe$\left.\right)$, so hat man wie oben wieder:

$$A_1 = \int_0^{\varepsilon_1} \varphi K \lambda\,\partial\omega = \varphi K \int_0^{\varepsilon_1} 2\,\varrho_1 \sin\frac{r_1\,\alpha}{2\,\varrho_1}\,\frac{r_1 + r_2}{r_2}\,\partial\alpha$$
$$= \varphi K\, 4\,\varrho_1^{\,2}\,\frac{r_1 + r_2}{r_1\,r_2}\left(\cos 0 - \cos\frac{r_1\,\varepsilon_1}{2\,\varrho_1}\right).$$

Setzt man hierin annähernd

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2},$$

so folgt:

$$A_1 = \varphi K\, 4\,\varrho_1^{\,2}\,\frac{r_1 + r_2}{r_1\,r_2}\,\frac{r_1^{\,2}\,\varepsilon_1^{\,2}}{8\,\varrho_1^{\,2}} = \varphi K\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\frac{r_1^{\,2}\,\varepsilon_1^{\,2}}{2}.$$

Da der Weg, auf welchem diese Arbeit verrichtet wird, $r_1\,\varepsilon_1$ ist, so folgt die auf den Theilkreis reducirte Reibung:

$$F = \frac{A_1}{r_1\,\varepsilon_1} = \varphi K\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\frac{r_1\,\varepsilon_1}{2},$$

oder, wenn wieder

$$r_1 \varepsilon_1 = e_1 = e_2 = \frac{e}{2} = \frac{\nu t}{2} \text{ und } \frac{t}{2r} = \frac{\pi}{z}$$

gesetzt wird,

$$F = \pi \varphi K \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \frac{\nu}{2} = \pi \varphi \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \frac{\nu}{2}.$$

Der gefundene Ausdruck

$$F = \pi \varphi \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \frac{\nu}{2}$$

kann daher als allgemein gültig angesehen werden, und wenn man $\sin \gamma = 1$ setzt, so erhält man:

$$F = \pi \varphi P \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \frac{\nu}{2}.$$

Man erkennt übrigens, daß die Reibung der Evolventenzähne etwas größer sein wird, als diejenige der Cycloidenzähne, insofern bei ersteren der Winkel γ meist etwas kleiner ist als bei letzteren.

Allgemeines über die verschiedenen Zahnformen. Was die Anwendung der im Vorhergehenden betrachteten Zahnformen betrifft, so kann man zunächst bemerken, daß auf möglichst genaue und richtige Zahnformen vorzugsweise bei schnellgehenden Axen besondere Aufmerksamkeit verwendet werden muß, da eine ungenaue und unrichtige Form nothwendig ein veränderliches Umsetzungsverhältniß zur Folge hat, aus welchem Stoßwirkungen entstehen, die um so beträchtlicher ausfallen, je größer die in den Axen aufgespeicherten lebendigen Kräfte sind. Bei langsam gehenden Axen, wie z. B. bei den Wellen der Windewerke, sind die Nachtheile, welche aus incorrecten Zahnformen entstehen, nur unerheblich, und kann für solche Fälle die Anwendung von Rädern zugelassen werden, deren Zahnprofile nicht genau den obigen Bedingungen einer gleichmäßigen Bewegungsmittheilung entsprechen, wenn dies aus praktischen Gründen, etwa wegen Benutzung vorhandener Modelle, wünschenswerth erscheint. Niemals indessen sollte man bei den schnellgehenden Triebwerksrädern, welche große Kräfte zu übertragen und bedeutende Massen in Umschwung zu setzen haben, derartige Gründe maßgebend sein lassen, wenn die Zahnprofile den Bedingungen einer gleichmäßigen Bewegungsübertragung nicht so genau wie nur irgend möglich genügen. Die Nachtheile unrichtiger Zahnformen lassen sich in diesem Falle leicht übersehen. Stellt man sich vor, eine Axe A, die sich gleichmäßig mit der Winkelgeschwindigkeit α dreht, solle eine andere Axe B mit der Winkelgeschwindigkeit β bewegen, und seien zu dem Zwecke zwei Zahnräder von den Halbmessern a und b, also so, daß $a\alpha = b\beta$ ist, angeordnet. Sind nun die Zahnformen nicht richtig gewählt, so daß also die Druckrichtung nicht stets durch das Momentancentrum geht, vielmehr die Centrale abwechselnd in größerem (a_1) oder geringerem (a_2) Abstande als a von der Axe A schneidet, §. 80.