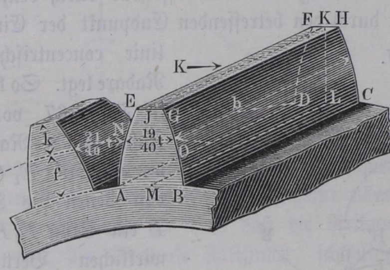
oft kleiner sind als die Evolutenkreise und daß man daher die Wurzelenden der Flanken nach Belieben annehmen muß. In den Figuren 263 und 267 sind die wirklich zur Berührung kommenden Strecken der Zahnprofile durch Doppellinien gekennzeichnet.

Daß übrigens die Theilkreise zweier Räder **nicht durch die Mitten der Zahnhöhen** gehen können, auch selbst wenn man beiden Rädern gleiche Kopfhöhen k giebt, folgt ohne Weiteres aus dem Vorhandensein des Scheitelspielraums. Um die Theilkreise zweier vorhandenen Räder in jedem Falle genau zu bestimmen, hat man nur nöthig, den Axenabstand der zusammenarbeitenden Räder in dem Verhältnisse der Zähnezahlen zu theilen.

§. 78. **Zahnquerschnitt.** Die Zähne eines Rades müssen solche Abmessungen erhalten, daß sie dem zu übertragenden Drucke mit hinreichender Sicherheit widerstehen können. Der auf den Zahn $AGFC$, Fig. 268, wirkende Druck K ist bestrebt, den Zahn in der Anhaftungsfläche $ABCD$ desselben an den Radkranz abzubrechen, da für diese Fläche das Bruchmoment am größten, nämlich Kl ist, unter l die ganze Zahnlänge MJ verstanden. Der Druck

Fig. 268.



K ist wegen der nahezu tangentialen Richtung nur wenig von der Umfangskraft P verschieden und kann gleich dieser gesetzt werden. Nimmt man ferner an, der Druck P, welcher als gleichmäßig über die ganze Breite $EF = b$ des Zahns vertheilt zu denken ist, wirke an der äußersten Kante EF in der Richtung des Radumfanges, also senkrecht zur radialen Mittelebene $JKLM$ des Zahns, so ist hierin die für die Festigkeit ungünstigste Voraussetzung enthalten, da der Druck P im Allgemeinen mehr oder weniger geneigt und näher nach dem Wurzelende des Zahns wirksam ist. Bezeichnet man mit h die Dicke AB des Zahns an der Wurzel, so hat man für denselben wie für die Festigkeit eines einseitig befestigten, am freien Ende belasteten Balkens (Th. I. §. 235)

$$Pl = \frac{W}{e} k = \frac{b h^2}{6} k,$$

worin k die höchstens zulässige Faserspannung des Materials bedeutet.

Die Dicke h des Zahns an der Wurzel wird im Allgemeinen, mit Ausnahme der Geradflankenzähne, um weniges größer sein, als die Dicke $\delta = NO$ im Theilkreise, und da diese letztere Größe mit Rücksicht auf nicht vollkommen genaue Arbeit und zwischen die Zähne tretende Verunreinigungen (Schmiere, Staub ꝛc.) etwas geringer angenommen wird, als die halbe Theilung, meist gleich $\frac{19}{40} t$, so daß also der Flankenspielraum der Zähne in den Lücken $^1/_{20}\, t$ beträgt, so darf man die Dicke am Fußende $h = {^1/_2}\, t$ für die Rechnung annehmen.

Auch die Breite AD der Zähne in axialer Richtung pflegt man der Theilung proportional anzunehmen, in der Regel zwischen $2\,t$ und $3\,t$, und zwar giebt man die geringere Breite $2\,t$ den langsam gehenden durch Menschenhand bewegten Rädern bei Winden ꝛc., die größere Breite $2{,}5\,t$ bis $3\,t$ und zuweilen noch mehr den schnellgehenden Triebwerksrädern. Die ganze Länge des Zahns l pflegt man ebenfalls nach dem vorigen Paragraph von der Theilung abhängig zu machen und

$l = k + f = 0{,}7\,t$ bis $0{,}75\,t$ zu wählen.

Unter Annahme der Verhältnisse

$$l = 0{,}75\,t,\; b = 2\,t \;\text{ und }\; h = 0{,}5\,t$$

erhält man aus obiger Formel:

$$P\,.\,0{,}75\,t = \frac{2\,t\,.\,0{,}25\,t^2}{6}\,k$$

den Werth

$$t = 3\sqrt{\frac{P}{k}}.$$

Gestattet man bei gußeisernen Zähnen eine höchstens zulässige Spannung $k = 3^k$, so erhält man

$$t = 1{,}73\,\sqrt{P}.$$

Für hölzerne Zähne kann man wegen der Vorzüglichkeit des ausgesuchten Eschen- oder Weißbuchenholzes $k = 1^k$ annehmen, und hat daher dafür

$$t = 3\,\sqrt{P},$$

während bei schmiedeisernen Rädern, wie sie in kleinen Abmessungen namentlich bei Winden vorkommen, die Theilung sich bestimmt zu

$$t = 3\sqrt{\frac{P}{6}} = 1{,}22\,\sqrt{P}.$$

Unter P ist in den vorstehenden Formeln der ganze von einem Rade auf das andere zu übertragende Druck zu verstehen, denn wenn auch, sobald der Eingriffbogen größer als die Theilung ist, gleichzeitig der Druck sich auf mehrere Zähne überträgt, so ist doch eine kleine Ungenauigkeit in dem Abstande der Zähne bei dem wenig biegsamen Gußeisen schon genügende Veranlassung, daß ein einziger Zahn durch den gesammten Druck belastet werde.

Höchstens darf man bei den elastischeren Holzzähnen darauf rechnen, daß der Druck von zwei Zähnen gleichzeitig aufgenommen werde, und demgemäß mit einer geringeren Theilung sich begnügen, aber auch nur dann, wenn der Eingriffbogen mindestens gleich $2t$ ist, weil nur daran fortwährend zwei Zahnpaare im Eingriff stehen. Da nun das übertragene Kraftmoment Pr, unter r den Theilkreishalbmesser verstanden, zu der Leistung von N Pferdekräften bei n Umdrehungen des Rades pro Minute in der Beziehung steht:

$$Pr = 716\,200 \frac{N}{n},$$

so findet man die erforderliche Theilung auch durch:

$$t = 1470 \sqrt{\frac{N}{nr}} \text{ für Gußeisen,}$$

$$t = 1050 \sqrt{\frac{N}{nr}} \text{ für Schmiedeeisen,}$$

$$t = 2540 \sqrt{\frac{N}{nr}} \text{ für Holz.}$$

Bei den vorangehenden Ermittelungen ist die Größe der Zahnstärke und daher der Theilung lediglich mit Rücksicht auf die Bruchfestigkeit des Zahns aus dem übertragenen Drucke P bestimmt, ohne auf die Geschwindigkeit des Radumfanges und die damit in Verbindung stehende Abnutzung zu rücksichtigen. Dies ist auch immer bei geringer Umfangsgeschwindigkeit zulässig, wie sie z. B. bei den durch Menschenhand bewegten Rädern von Winden, Pressen ꝛc. meist nur vorkommt. Bei den größeren Geschwindigkeiten, wie sie den Rädern von Transmissionswellen in der Regel eigen sind, hat man aber auch auf die Abnutzung und die in solchen Fällen unvermeidlichen Stoßwirkungen Rücksicht zu nehmen. Zur Verminderung der Abnutzung empfiehlt es sich daher, durch vergrößerte Breite b der Zähne den Druck pro Flächeneinheit möglichst herabzuziehen, während mit Bezug auf Stoßwirkungen es gerathen erscheint, die höchstens zulässige Materialspannung k mit steigender Geschwindigkeit v zu vermindern. Dementsprechend nimmt Reuleaux für gußeiserne Triebwerkräder

$$b = 0{,}01\, t \sqrt{Pn} = 8{,}5 \sqrt{\frac{N}{r}}$$

und

$$k = \frac{const.}{\sqrt{v}}$$

an, wenn v die Umfangsgeschwindigkeit der Theilkreise in Millimetern und

n die minutliche Umdrehungszahl des **kleineren** Rades bezeichnet, bei welchem die Abnutzung der Zähne wegen des häufiger sich wiederholenden Angriffs die größere ist. Hieraus ist der Ausdruck gefolgert:

$$t = 2{,}1 \sqrt[4]{Pr} = 60 \sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

welchem also ein Werth der Constanten in $k = \frac{const.}{\sqrt{v}}$ von 120 zu Grunde liegt.

Für hölzerne Zähne, welche beiläufig fast nur bei schnellgehenden Triebwerksrädern vorkommen, soll man

$$b = 0{,}0125\ t \sqrt{Pn} = 10{,}6\ t \sqrt{\frac{N}{r}}$$

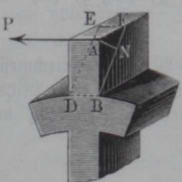
und

$$t = 3{,}23 \sqrt[4]{Pr} = 92{,}4 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$$

annehmen.

Bei nicht genau paralleler Axenlage oder, wenn ein kleiner fremder Körper zufällig zwischen die Zähne gelangt, kann die Inanspruchnahme derselben unter Umständen eine noch ungünstigere werden, als der oben gemachten Voraussetzung entspricht. Wenn nämlich der Druck P vornehmlich eine Ecke A des Zahns, Fig. 269, trifft, so ist ein Abbrechen desselben nach der schrägen Fläche $DBFE$ zu befürchten. Setzt man für diesen Fall in obiger Formel

Fig. 269.



$$Pl = \frac{bh^2}{6}\ k$$

für l die normale Entfernung

$$AN = AB\ .\ sin\ ABN = l\ .\ sin\ \varphi$$
$$= 0{,}75\ t\ .\ sin\ \varphi,$$

für b die Länge

$$BF = \frac{l}{cos\ \varphi} = \frac{0{,}75\ t}{cos\ \varphi}$$

und für h die Zahndicke im Theilkreise

$$\delta = {}^{19}/_{40}\ t = 0{,}475\ t,$$

so erhält man die in der Bruchfläche auftretende äußerste Faserspannung k_1 aus

$$P\ .\ 0{,}75\ t\ .\ sin\ \varphi = \frac{0{,}75\,t\ .\ 0{,}475^2\,t^2}{6\ cos\ \varphi}\ k_1$$

zu

$$k_1 = \frac{6}{0,226} \sin \varphi \cos \varphi \frac{P}{t^2} = 13,3 \sin 2 \varphi \frac{P}{t^2}.$$

Dieser Werth wird ein größter für $\varphi = ABN = 45^0$ und zwar

$$k_1 = 13,3 \frac{P}{t^2}.$$

Setzt man hierin aus der oben gefundenen Formel

$$t = 3 \sqrt{\frac{P}{k}}$$

den Werth

$$\frac{P}{t^2} = \frac{k}{9},$$

so erhält man:

$$k_1 = 1,48\, k.$$

Es kann also in diesem Falle die größte Anstrengung des Materials nahezu 1,5 mal so groß werden, als die in den früheren Formeln zu Grunde gelegte Spannung beträgt, d. h. z. B. bei Gußeisen 4,5^k. Da dieser Werth immer noch hinreichend weit von dem der Elasticitätsgrenze zugehörigen entfernt ist, so braucht man mit Rücksicht auf diesen doch nur ausnahmsweise auftretenden Fall eine Vergrößerung der Zahndicke nicht vorzunehmen, denn da, wie aus dem nächsten Paragraph folgt, die Reibungswiderstände mit der Größe der Theilung wachsen, so muß es gerathen erscheinen, die letztere nicht überflüssig groß anzunehmen, um so mehr als auch der Gang zweier Zahnräder um so gleichmäßiger und sanfter sein wird, je kleiner die Theilung ist, d. h. je mehr die Räder mit wachsender Zähnezahl sich dem idealen Zustande der Frictionsräder nähern.

Beispiele. 1) Wie groß hat man die Theilung eines 1,5 Meter im Durchmesser haltenden gußeisernen Zahnrades zu machen, welches zur Umdrehung einer Windetrommel dient, an deren Halbmesser von 180 Millimeter ein Kettenzug von 3000^k wirksam ist?

Hier ist

$$P = \frac{3000\,.\,180}{750} = 720\,k,$$

daher die erforderliche Theilung

$$t = 1,73 \sqrt{720} = 46,4 \text{ Millimeter},$$

wofür man abgerundet 50 Millimeter nehmen wird. Die Breite der Zähne beträgt $b = 2\,t = 100$ Millimeter, die Höhe $l = 0,75\ t = 37,5$ Millimeter, die Dicke $\delta = {}^{19}/_{40}\ t = 23,7$ Millimeter, die Breite der Lücke im Theilkreise daher 26,3 Millimeter, und der Flankenspielraum 2,6 Millimeter. Der Umfang des Theilkreises beträgt 1500 . 3,14 = 4712 Millimeter, daher ergiebt sich die Zähnezahl zu $\frac{4712}{50} = 94,24$. Nimmt man bei Anwendung von 6 Armen eine Zähnezahl von 96, so erhält man einen Theilkreisumfang 96 . 50 = 4800 Millimeter, welchem ein genauer Durchmesser von $\frac{4800}{3,14} = 1,528$ Meter entspricht. Macht man die Zahnköpfe $0,3\,t = 15$ Millimeter und die Zahnfüße $0,4\,t = 20$ Millimeter lang, so erhält der Kopfkreis einen Durchmesser von

$$1528 + 2 \,.\, 15 = 1558 \text{ Millimeter}$$

und der Fußkreis einen solchen von

$$1528 - 2 \,.\, 20 = 1488 \text{ Millimeter.}$$

2) Das 5 Meter im Durchmesser große gezahnte Schwungrad einer 40 pferdigen Dampfmaschine, welche 30 Umdrehungen in der Minute macht, greift in ein Getriebe der Betriebswelle von 1,5 Meter Durchmesser, welches mit hölzernen Zähnen versehen werden soll. Welche Abmessungen müssen dieselben erhalten?

Die erforderliche Theilung bestimmt sich hier nach Reuleaux zu:

$$t = 92,4 \sqrt[4]{\frac{40}{30}} = 98,9,$$

wofür rund 100 Millimeter zu nehmen ist, wobei eine Breite zu Grunde liegt von

$$b = 10,6\, t \sqrt{\frac{N}{r}} = 10,6 \sqrt{\frac{40}{750}} \,.\, t = 2,44\, t = 244 \text{ Millimeter.}$$

Die Ermittelung der Zahndimensionen, Zähnezahlen und des genauen Theilkreisdurchmessers wie oben.

Zahnreibung. Wenn die Räder zweier parallelen Axen sich in einer §. 79 Geraden berühren, welche mit der ihrem Bewegungszustande zugehörigen Momentanaxe zusammenfällt, so tritt wegen der rein wälzenden Bewegung eine gleitende Reibung an der Berührungsstelle nicht ein. Bei den Frictionsscheiben, sowohl denen mit directer Uebertragung, wie bei den Riemenrädern findet die Berührung fortwährend in der Momentanaxe statt, so daß dabei, eine vollständige Bewegungsmittheilung ohne Rutschen vorausgesetzt, eine gleitende Reibung an den Umfängen auch nicht eintreten kann. Bei den Zahnrädern indessen berühren sich zwei Zähne während ihrer Einwirkung auf einander nur in einem einzigen Augenblicke in der Momentanaxe P, Fig. 270 (a. S. 391), indem die Berührungslinie während der gedachten Einwirkung die Eingriffslinie GPH von einem Endpunkte bis zum anderen durchwandert. Es ist nun klar, daß hierdurch gewisse Reibungswiderstände hervorgerufen werden müssen, denn wenn beispielsweise die Berührung in einer durch J gehenden, den Axen parallelen Geraden geschieht, so findet anstatt der augenblicklichen kleinen Drehung um die Momentanaxe P eine ebenso große Drehung um die Gerade in J statt, verbunden mit einer Verschiebung der beiden Zahnflächen in J auf einander, in einer zu PJ senkrechten Richtung. Der Betrag dieser Verschiebung, also auch der Reibungsweg beträgt nach Einleitung §. 4, $\lambda \partial \omega$, wenn λ den Abstand PJ und $\partial \omega$ den Drehungswinkel um die Momentanaxe bezeichnet. Ist nun durch K der Druck zwischen den Zahnflächen in der Richtung PJ und durch φ der