**Beispiel.** Es sollen die Modelle zu einem Satz Rädern von 30 Millimeter Theilung mit kreisbogenförmigen Zahnprofilen angefertigt werden, wie groß sind die Abstände $a_1$ und $a_2$ der Mittelpunkte für die Zahnköpfe und Füße für das Rad von 40 Zähnen anzunehmen, wenn der Winkel der Kraftrichtung gegen die Centrale $\gamma$ zu $75^0$ angenommen wird und das kleinste Rad von 12 Zähnen radiale Flanken erhalten soll?

Man hat hier für das Rad von 40 Zähnen:

$$a_1 = \frac{12 \;.\; 40 \;.\; \cos 75^0 \;.\; 30 \text{ Millim.}}{2 \;.\; 3{,}14 \;.\; (40 + 12)} = 0{,}382 \;.\; 30 = 11{,}5 \text{ Millim.}$$

und

$$a_2 = \frac{12 \;.\; 40 \;.\; \cos 75^0 \;.\; 30 \text{ Millim.}}{2 \;.\; 3{,}14 \;.\; (40 - 12)} = 0{,}707 \;.\; 30 = 21{,}2 \text{ Millim.}$$

Allgemein ist bei einer Theilung von $t$ für das 40zähnige Rad

$$a_1 = 0{,}382\, t \quad \text{und} \quad a_2 = 0{,}707\, t.$$

Der der Construction zu Grunde gelegte Polabstand ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$p = r \sin 75^0 = \frac{12 \;.\; t}{2 \;.\; 3{,}14}\, 0{,}966 = 1{,}84\, t = 55{,}2 \text{ Millimeter.}$$

In gleicher Weise hätte die Rechnung für jede andere Zähnezahl zu geschehen, die Construction der Zähne mit den gefundenen Größen $a_1$ und $a_2$ ist in §. 74 angegeben.

**Zähnezahl.** Da die Theilung, d. h. die auf dem Theilkreise gemessene Entfernung zweier gleichgerichteten Zahnflächen für beide Theilkreise wegen deren gleicher Umfangsgeschwindigkeit genau dieselbe Größe $t$ hat, so folgt daraus zunächst, daß die Zähnezahlen $z_1$ und $z_2$ zweier Räder $A$ und $B$ sich wie die Umfänge und also auch wie die Halbmesser $r_1$ und $r_2$ dieser Theilkreise verhalten müssen. Ueberhaupt hat man $z t = 2 \pi r$, und daher §. 76.

$$t = 6{,}28\, \frac{r_1}{z_1} = 6{,}28\, \frac{r_2}{z_2}.$$

Man kann daher als das Umsetzungsverhältniß $n = \frac{r_1}{r_2}$ zweier Räder jederzeit auch das Verhältniß der Zähnezahlen $n = \frac{z_1}{z_2}$ annehmen.

Hieraus folgt für dieses Umsetzungsverhältniß zweier Zahnräder, daß dasselbe immer nur einen rationalen, durch ganze Zahlen ausdrückbaren Werth haben kann, welcher Beschränkung die Reibungsräder und Riemscheiben nicht unterworfen sind.

Aus der Beziehung $z t = 2 \pi r$ ist es in jedem Falle leicht, eine der drei Größen, Theilung, Zähnezahl und Theilkreishalbmesser aus den beiden anderen zu finden, und bedient man sich bei häufigem Vorkommen dieser Bestimmung mit Vortheil einer Tabelle, welche die Werthe $\frac{z}{2\pi} = 0{,}1592\, z$ für die gewöhnlich vorkommenden Zahlen von $z$ (bis etwa 300) enthält.

Giebt man die Theilung, wie es in manchen Fabriken geschieht, anstatt in einfachen Maßeinheiten in dem $\pi$fachen derselben an, und bezeichnet alsdann $(t)$ die Maßzahl für die Theilung, also entsprechend 3,14 $(t)$ Millimeter, Zoll, Linien ꝛc., so erhält man den Halbmesser $r$ direct zu $z\,(t)$ einfachen Maßeinheiten (Millimeter, Zoll, Linien ꝛc.).

Beim Zeichnen der Räder kann man sich vortheilhaft eines sogenannten Peripheriemaßstabes bedienen, welcher zwei Scalen nebeneinander und zwar neben einer gewöhnlichen eine andere mit $\pi$facher Einheit enthält. Offenbar erleichtert dieser Maßstab die betreffende Reduction der Größen, indem die Längen, welche auf beiden Scalen gleich bezeichnet sind, sich wie $1 : \pi$ verhalten.

Da man beim Auftragen der Theilung $t$ auf den Theilkreis natürlich nur die Sehne $s$ des Theilungsbogens in den Zirkel fassen kann, so wird man, wenn man es nicht vorzieht, den ganzen Theilkreis in $z$ gleiche Theile zu theilen, zwischen die Zirkelspitzen eine Länge

$$s = 2\,r\,sin\,\frac{\tau^0}{2}$$

zu fassen haben, wenn $\tau^0$ den Theilungswinkel (Theilwinkel), d. h. den zu einer Theilung $t$ gehörigen Mittelpunktswinkel

$$\tau^0 = \frac{360^0}{z} = \frac{180^0}{\pi\,r}\,t = 57,296^0\,\frac{t}{r}$$

bedeutet.

Setzt man hierin annähernd

$$sin\,\frac{\tau^0}{2} = \frac{\tau}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 = \frac{\tau}{2}\left(1 - \frac{\tau^2}{24}\right) = \frac{t}{2\,r}\left(1 - \frac{t^2}{24\,r^2}\right),$$

so erhält man die Sehne

$$s = t\left(1 - \frac{t^2}{24\,r^2}\right) = 2\,\pi\,\frac{r}{z}\left(1 - \frac{4\,\pi^2}{24\,z^2}\right) = \frac{6,283\,r}{z}\left(1 - \frac{1,645}{z^2}\right).$$

Sicherer wird man aber immer durch Eintheilung des Theilkreises in $z$ gleiche Theile zum Ziele kommen, da jener berechnete Werth von $s$ nur angenähert ist und die kleinen Fehler bei oftmaligem Abtragen auf dem Theilkreise sich summiren, so daß bei dem letzten Zahne eine beträchtliche Abweichung sich bemerklich macht.

Da die Größe der Zahntheilung, wie aus dem Späteren sich ergiebt, mit Rücksicht auf die Festigkeit der Zähne in jedem Falle bestimmt ist, so ergeben sich hieraus und aus den gewählten Halbmessern der Räder deren Zähnezahlen.

Wenn nun auch im Allgemeinen die Wahl der Theilkreishalbmesser noch beliebig getroffen werden kann und Räder sich in den verschiedensten Größen ausführen lassen, so ist doch das gegenseitige Verhältniß der Halbmesser resp. der Zähnezahlen zweier mit einander arbeitenden Räder an gewisse Bedingungen geknüpft, wie sie theilweise aus praktischen Constructionsrücksichten sich ergeben, hauptsächlich aber in Bezug auf die Möglichkeit der Bewegungsübertragung überhaupt gestellt werden müssen. Letzteres gilt insbesondere in Betreff der kleinsten zulässigen Zähnezahlen, bei welchen der Betrieb noch möglich bleibt. Was zunächst das Verhältniß zweier zusammenarbeitenden Räder anbetrifft, so muß bemerkt werden, daß von zwei verschieden großen Rädern die einzelnen Zähne des kleineren in demselben Verhältnisse öfter zum Angriff kommen als diejenigen des größeren Rades, in welchem die Halbmesser oder Zähnezahlen zu einander stehen. Es ist daher wegen der schnelleren Abnutzung der Zähne des kleineren Rades eine gerechtfertigte und in der Praxis ziemlich allgemein befolgte Regel, bei Triebwerken für größere Geschwindigkeiten dieses Verhältniß nicht zu groß zu nehmen, und wählt man dasselbe in solchen Fällen meist nicht größer als 4 bis 5. Dagegen pflegt man bei Winden und überhaupt bei langsam gehenden, besonders bei durch Menschenkraft bewegten Rädern wohl ein Verhältniß der beiden Halbmesser von 8 und noch mehr zuzulassen, bei der Anwendung einer Zahnstange ist ja eigentlich das Verhältniß unendlich groß, wobei man indessen berücksichtigen muß, daß hier wegen der hin- und hergehenden Bewegung der Zahnstange für die Häufigkeit des Angriffs der Zähne das Verhältniß des Radumfanges zur ganzen Verschiebung der Zahnstange das maßgebende ist.

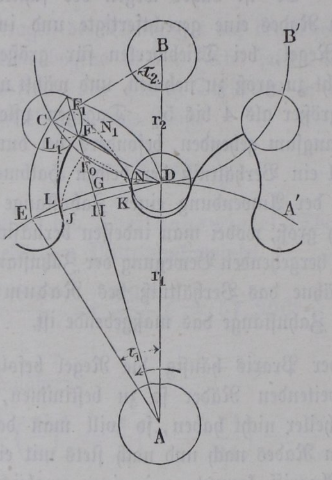
Wenn man in der Praxis häufig die Regel befolgt, die Zähnezahlen zweier zusammenarbeitenden Räder so zu bestimmen, daß dieselben einen gemeinschaftlichen Theiler nicht haben, so will man dadurch erreichen, daß jeder Zahn des einen Rades nach und nach stets mit einem anderen Zahne des anderen zum Angriff kommt, um einer ungleichmäßigen Abnutzung vorzubeugen. Daher giebt man den kleineren Getrieben sehr häufig absolute Primzahlen (11, 13, 17, 19 ꝛc.) zu Zähnezahlen, während bei den größeren Zahnrädern die Rücksicht auf die Herstellung meist eine Zähnezahl wünschenswerth erscheinen läßt, welche durch die Zahl der Radarme theilbar ist. Uebrigens ist die strenge Durchführung jener obigen Regel nicht von großer Bedeutung und oft, z. B. bei Satzrädern, überhaupt nicht für alle Fälle möglich.

Daß die Möglichkeit einer ununterbrochenen Bewegungsübertragung durch Zähne an das Vorhandensein einer gewissen Minimalzahl von Zähnen für jedes Rad geknüpft ist, erkennt man leicht aus der Betrachtung, daß in jedem Falle die Einwirkung eines Zahnes während eines Drehungsbetrages stattfinden muß, welcher mindestens dem Theilwinkel dieses Rades gleich ist, und daß also bei einer zu geringen Zähnezahl $z$ der Theilwinkel

$\tau^0 = \frac{360}{z}$ so groß ausfallen kann, daß bei den den Zähnen möglicherweise zu gebenden Abmessungen die Einwirkung des Zahns während eines so großen Drehungswinkels sich nicht mehr erreichen läßt. Diese Minimalzahl $z^0$ für die Zähne eines Rades hängt außer von der Form der Zähne insbesondere von der Zähnezahl des eingreifenden Partners, also von dessen verhältnißmäßiger Größe ab und seien im Folgenden die Regeln für die Bestimmung dieser Zahl im Wesentlichen angegeben.

Es sei zunächst vorausgesetzt, daß das Rad $A$ mit $z_1$ Zähnen, Fig. 259,

Fig. 259.




in ein anderes $B$ mit $z_2$ cylindrischen Triebstöcken $D$ von der Dicke $\delta_2$ eingreife, wobei nach §. 72 der Zahnquerschnitt durch die Curve $FLJ$ zu begrenzen ist, welche zu der vom Theilkreise $B'$ beim Rollen auf $A'$ erzeugten Epicycloide $CE$ im Abstande $\frac{\delta_2}{2}$ parallel ist.

Ein Triebstock kommt nach dem Früheren zur Wirkung, wenn sein Mittelpunkt in die Centrale nach $D$ tritt, und es darf, wenn die Bewegung ununterbrochen übertragen werden soll, der vorhergehende Triebstock $C$ erst in demjenigen Augenblicke von dem ihn antreibenden Zahne $FL$ des Rades $A$ verlassen werden, in welchem der Mittelpunkt des folgenden Zahns nach $D$ in die Centrale gelangt. Diesen Moment stellt die Figur dar, und es erhellt nach dem Früheren, daß der Berührungspunkt $F$ des Zahns mit dem Triebstocke in der Druckrichtung $DC$ liegen muß.

Bezeichnet nun wieder $t$ die Theilung und

$$\tau_1 = \frac{t}{r_1} = \frac{2\pi}{z_1}$$

sowie

$$\tau_2 = \frac{t}{r_2} = \frac{2\pi}{z_2}$$

die Theilwinkel, so hat man die Sehnen

$$s_1 = DE = 2 r_1 \sin \frac{\tau_1}{2},$$

annähernd

$$= r_1 \tau_1 - r_1 \frac{\tau_1^3}{24} = t\left(1 - \frac{\tau_1^2}{24}\right),$$

wenn man

$$\sin \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{2} - \frac{\tau^3}{2.3.8}$$

setzt, da die höheren Potenzen bei der Kleinheit von $\tau$ vernachlässigt werden dürfen.

In gleicher Weise folgt

$$s_2 = DC = t\left(1 - \frac{\tau_2^2}{24}\right).$$

Setzt man nun voraus, daß die Stärke $\delta_1$ der Zähne, d. h. $LN$ oder, was nahezu dasselbe ist, $JK$ ebenso wie die Dicke $\delta_2$ der Triebstöcke, gleich der halben Theilung sein solle, also

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{t}{2},$$

so erhält man:

$$\delta_1 = 2\,JH = 2\,(DJ - DF \cos CDE)$$

$$= 2\left[s_1 - \frac{\delta_1}{2} - \left(s_2 - \frac{\delta_2}{2}\right) \cos \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right],$$

da der Winkel

$$CDE = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$$

ist. Für $s_1$ und $s_2$ die Werthe eingeführt und

$$\cos \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = 1 - \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{8}$$

gesetzt, erhält man nach geringer Reduction:

$$\delta_1 = \frac{t}{2} = 2t\left(\frac{3}{4} - \frac{\tau_1^2}{24}\right) - 2t\left(\frac{3}{4} - \frac{\tau_2^2}{24}\right)\left(1 - \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{8}\right)$$

$$= \frac{t}{4}\left[-\frac{\tau_1^2}{3} + \frac{\tau_2^2}{3} + \frac{3}{4}(\tau_1 + \tau_2)^2\right].$$

Hierin

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1} \text{ und } \tau_2 = \frac{2\pi}{z_2}$$

gesetzt, folgt

$$\delta_1 = \frac{t}{2} = \frac{\pi^2 t}{12}\left(\frac{5}{z_1^2} + \frac{18}{z_1 z_2} + \frac{13}{z_2^2}\right).$$

Damit also $\delta_1$ den Werth $\frac{t}{2}$ erlange, muß die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{5}{z_1^2} + \frac{18}{z_1 z_2} + \frac{13}{z_2^2} = \frac{12}{2\pi^2} = 0{,}608.$$

Für $z_1 = z_2$ erhält man

$$\frac{36}{z_1^2} = 0{,}608,$$

oder

$$z_1 = z_2 = \sqrt{\frac{36}{0{,}608}} = 7{,}7, \text{ d. i. mindestens } 8.$$

Man ersieht hieraus, daß bei gleicher Größe der Theilkreise die geringste Anzahl der Zähne und der Triebstöcke zu 8 angenommen werden muß, um der Bedingung zu genügen, daß die Dicke derselben $\delta_1 = \delta_2 = \frac{t}{2}$ werden soll. Bei einer geringeren Anzahl von Zähnen oder Triebstöcken würde nämlich der Zahn $LFN$ zu kurz werden, indem die beiden den Zahn begrenzenden Curven $LF$ und $NF$ sich schon vor dem Punkte $F$, etwa in $F_0$, schneiden würden, und daher eine Wirkung des Zahns auf den betreffenden Triebstock nicht mehr während einer vollen Theilung möglich wäre.

Ein größerer Werth von $z_1$ oder $z_2$ als 8 wird dagegen den Einfluß haben, daß diese beiden Zahnprofile sich erst außerhalb des Punktes $F$, etwa in $F_1$, treffen, und daher würde die Einwirkung des Zahns $GF_1$ auf den Triebstock während eines Bogens stattfinden, welcher größer als die Theilung $t$ ist, folglich wird die Bewegungsübertragung bei größerer Anzahl der Zähne oder Triebstöcke gesichert sein. Man könnte in diesem Falle die Zähne bis zu dem Punkte $F$ verkürzen, so daß dieselben nicht mehr spitz ausfallen, sondern durch die Fläche $L_1 N_1$ abgestumpft werden. Es ist daher klar, daß jene obige Bedingungsgleichung die Minimalzahl der Stöcke resp. Zähne ergiebt, daher größere Werthe für $z_1$ und $z_2$ unbedenklich angenommen werden können.

Während bei gleichen Rädern die Minimalzahl der Zähne und Stöcke durch 8 gefunden wird, ändert sich dieser Werth mit dem Umsetzungsverhältnisse, und zwar, wie aus der Bedingungsgleichung ersichtlich ist, derart, daß durch eine Vergrößerung von $z_1$ der Minimalwerth von $z_2$ kleiner als 8 ausfällt, und umgekehrt eine Vergrößerung von $z_2$ eine kleinere Zahl als 8 für $z_1$ zuläßt. Um die äußersten Grenzen für $z_2$ und $z_1$ zu erkennen, hat man nur $z_1$ resp. $z_2$ unendlich groß anzunehmen, in welchem Falle aus dem betreffenden Rade eine Zahnstange mit Zähnen oder Triebstöcken wird. Für $z_1 = \infty$, also für eine Zahnstange, erhält man:

$$z_2 = \sqrt{\frac{13}{0,608}} = 4,6,$$

so daß also 5 die geringste Anzahl der Stöcke ist, welche ein mit einer Zahnstange eingreifender Drehling wenigstens haben muß. Setzt man andererseits $z_2 = \infty$, d. h. giebt man der Stange die Triebstöcke, so erhält man die geringste Zähnezahl für ein dazu passendes Zahnrad

$$z_1 = \sqrt{\frac{5}{0,608}} = 2,9, \text{ also rund } 3.$$

Während also für eine Zahnstange der eingreifende Drehling mindestens 5 Stöcke haben muß, kann schon ein 3 zähniges Getriebe in eine Zahnstange mit Stöcken regelrecht eingreifen. Ueber die erforderliche geringste Stockzahl für 3—8 zähnige Räder, und die Zähnezahl für 5—8 stöckige Drehlinge giebt nachstehende aus der obigen Bedingungsgleichung berechnete Tabelle Aufschluß.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zähnezahl $z_1$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 14 | 48 ($\infty$) |
| Stockzahl $z_2$ | 117 $\infty$ | 18 | 12 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 |

Man erkennt hieraus, daß ein dreizähniges Rad nicht nur für die Zahnstange, sondern auch für einen Drehling mit 117 Zähnen genügt, und daß ein fünfstöckiges Getriebe auch schon mit einem Rade von 48 Zähnen im Eingriffe stehen kann.

Wenn die beiden Räder in einem innerlichen Eingriffe stehen, und das Rad $A$ das äußere sein möge, so bleibt die vorstehende Entwickelung dieselbe, mit dem einzigen Unterschiede, daß der Winkel der beiden Sehnen $CDE$ jetzt gleich $\frac{\tau_2 - \tau_1}{2}$ sich bestimmt, und man erhält die Bedingungsgleichung

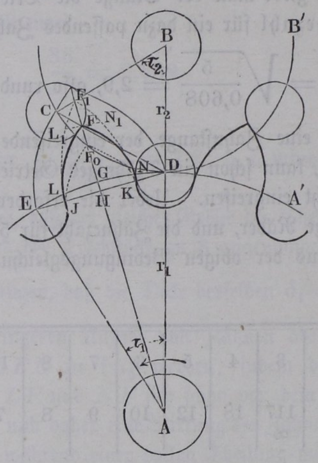
$$\frac{5}{z_1^2} - \frac{18}{z_1 z_2} + \frac{13}{z_2^2} = 0,608,$$

worin wieder $z_1$ die Anzahl der Zähne und $z_2$ die Anzahl der Stöcke bedeutet. Nimmt man das Zahnrad als äußeres und den Drehling als inneres Rad an, so erhält man für 4 Triebstöcke, also $z_2 = 4$, aus der Bedingungsgleichung $z_1 = 21$. Diese Zahl giebt hier die größtmögliche Zähnezahl des Rades, denn wollte man $z_1$ größer machen, so würde man für

$$\frac{5}{z_1^2} - \frac{18}{z_1 z_2} + \frac{13}{z_2^2}$$

einen Werth erhalten, welcher größer als 0,608 würde, d. h. die Dimension $JK$, Fig. 260, wäre größer als $\frac{t}{2}$. Man erkennt auch leicht, daß bei

Fig. 260.




innerem Zahneingriffe mit wachsendem Durchmesser des äußeren Rades der zugehörige Eingriffsbogen abnimmt.

Ebenso erhält man für $z_2 = 3$, $z_1 = 7$, und für $z_2 = 2$, $z_1 = 3$, d. h. ein dreistöckiges Getriebe könnte nur von einem äußeren Rade von weniger als 7 Zähnen und ein zweistöckiges Getriebe nur von einem solchen Rade, das nicht mehr als 3 Zähne hätte, umgedreht werden, wenn eine solche Anordnung überhaupt möglich wäre. Nimmt man endlich $z_2$ so groß, daß $\frac{13}{z_2^2} \lesseqgtr 0,608$ wird, also mindestens $z_2 = 5$, so erhält man $z_1 = 1,4$,

d. h., schon ein äußeres Rad mit 2 Zähnen würde der Theorie nach genügen, einen fünfstöckigen inneren Drehling umzutreiben, wenn eine solche Anordnung überhaupt denkbar wäre.

Jedenfalls erkennt man, daß man in diesem Falle, wo $\frac{13}{z_2^2} < 0{,}608$, also $z_2$ wenigstens 5 ist, für $z_1$ jede beliebige Zahl annehmen kann, denn man überzeugt sich leicht, daß für diesen Fall der Ausdruck

$$\frac{5}{z_1^2} - \frac{18}{5\,z_1} + \frac{13}{5^2}$$

stets kleiner bleibt als 0,608, so daß man hieraus schließt, daß ein Stockgetriebe mit wenigstens 5 Stöcken mit jedem äußeren Zahnrade von beliebig großer Zähnezahl in innerlichem Eingriffe sein kann, sowie daß ein in eine Zahnstange eingreifendes Stockgetriebe wenigstens 5 Stöcke haben muß.

Wenn man dem größeren Rade die Stöcke ($z_2$) und dem inneren Getriebe die Zähne ($z_1$) giebt, so ist die Untersuchung dieselbe. Man findet dabei ganz wie oben, daß bei einer Zähnezahl $z_1$ von solcher Größe, daß $\frac{5}{z^2} \lesseqgtr 0{,}608$ ist, also für $z_1$ gleich mindestens 3, wofür $z_2 = 2$ folgt, der Ausdruck

$$\frac{5}{z_1^2} - \frac{18}{z_1\,z_2} + \frac{13}{z_2^2}$$

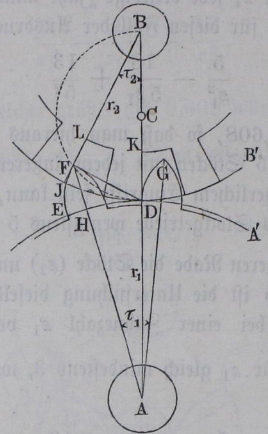
für jede beliebige Zahl $z_2$ größer als 2, einen Werth kleiner als 0,608 annimmt, wie es für die Möglichkeit der Zahnbildung erforderlich ist. Es kann also ein dreizähniges Rad von innen in ein Stockrad von beliebig großer Stockzahl also auch in eine Stange mit Stöcken eingreifen. Setzt man dagegen $z_1 = 2$, so erhält man als die größte mögliche Anzahl der dem größeren Rade zu gebenden Triebstöcke $z_2 = 13$.

In ähnlicher Weise wie für Stockräder bestimmen sich auch bei anderen Zahnformen die geringsten Zähnezahlen. Sei Fig. 261 (a. f. S.) das Rad $B$ mit radialen Zahnfüßen $DK$ versehen, und seien daher die Köpfe $EF$ des Rades $A$ durch die Epicycloide des Kreises $C$ vom Durchmesser $DB = r_2$ auf dem Theilkreise $A'$ begrenzt, und sei angenommen, daß $A$ nur Zahnköpfe und $B$ nur Zahnfüße habe, so darf der Zahn $EF$ mit seinem äußersten Punkte $F$ den Zahnfuß $JL$ nicht früher verlassen, als bis der folgende Zahnkopf $DG$ den folgenden Fuß $DK$ in der Centrale $D$ ergriffen hat. Bedeuten daher wieder $s_1, s_2, \tau_1, \tau_2, \delta_1$ und $\delta_2$ dasselbe wie vorher, so hat man, da $FDE = \tau_2 + \frac{\tau_1}{2}$ ist, für den Grenzfall eines in eine Spitze $F$ auslaufenden Zahnkopfes die Zahndicke desselben:

$$\delta_1 = \frac{t}{2} = 2\, s_1 - 2\, DF \,.\, \cos\left(\frac{\tau_1}{2} + \tau_2\right)$$

$$= 4\, r_1 \sin \frac{\tau_1}{2} - 2\, r_2 \sin \tau_2 \cos \frac{\tau_1 + 2\,\tau_2}{2};$$

Fig. 261.




oder wie zuvor:

$$\delta_1 = \frac{t}{2} = 2\, r_1 \tau_1 - \frac{r_1 \tau_1^3}{12} - \left(2\, r_2 \tau_2 - \frac{1}{3}\, r_2 \tau_2^3\right)\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau_1 + 2\,\tau_2}{2}\right)^2\right]$$

$$= t\left[-\frac{\tau_1^2}{12} + \frac{\tau_2^2}{3} + \left(\frac{\tau_1 + 2\,\tau_2}{2}\right)^2\right] = t\left(\frac{\tau_1^2}{6} + \tau_1 \tau_2 + \frac{4\,\tau_2^2}{3}\right).$$

Setzt man wieder $\tau = \frac{2\pi}{z}$, so erhält man als Bedingungsgleichung:

$$\frac{2\,\pi^2}{3}\left(\frac{1}{z_1^2} + \frac{6}{z_1 z_2} + \frac{8}{z_2^2}\right) \leqq \frac{1}{2},$$

oder

$$\frac{1}{z_1^2} + \frac{6}{z_1 z_2} + \frac{8}{z_2^2} \leqq 0{,}076.$$

Für $z_1 = z_2$ folgt

$$z = \sqrt{\frac{15}{0{,}076}} = 14.$$

Gleich große Räder müssen daher bei der vorliegenden Zahnconstruction mindestens 14 Zähne erhalten.

Für eine Zahnstange mit geraden Zahnfüßen erhält man die mindestens erforderliche Zähnezahl $z_1$ des Getriebes, wenn man $z_2 = \infty$ setzt, zu

$$z_1 = \sqrt{\frac{1}{0{,}076}} = 3{,}6 \text{ abgerundet} = 4,$$

während für eine mit Zahnköpfen versehene Zahnstange das die radialen Füße tragende Rad mindestens

$$z_2 = \sqrt{\frac{8}{0{,}076}} = 10{,}25 = \text{rund } 11 \text{ Zähne}$$

erhalten muß. Wie für die Stockgetriebe geschehen, kann man auch hier leicht eine Tabelle berechnen, aus welcher zu entnehmen ist, wie viel Zähne das eine Rad mindestens erhalten muß, wenn das andere eine bestimmte Zähnezahl bekommen soll, wobei natürlich die Bedingung festgehalten werden muß, daß das Rad mit den geraden Flanken nicht unter 11, das mit den epicycloidischen Köpfen nicht unter 4 Zähne erhalten darf.

Für inneren Eingriff ändert sich die Rechnung nur insofern, als der Winkel

$$FDE = \tau_2 - \frac{\tau_1}{2}$$

ist, und daher als Bedingung für den Eingriff

$$\frac{1}{z_1^2} - \frac{6}{z_1 z_2} + \frac{8}{z_2^2} \gtreqless 0{,}076 \text{ folgt.}$$

Diese Bedingung giebt wieder die größten Zähnezahlen für das größere Rad, so lange die Zähnezahl des kleineren den Werth

$$z = \sqrt{\frac{8}{0{,}076}} = 10{,}25 = \text{rund } 11,$$

oder den Werth

$$z = \sqrt{\frac{1}{0{,}076}} = 3{,}6 = \text{rund } 4$$

nicht erreicht, je nachdem dieses innere Rad die geraden Flanken oder die gekrümmten Köpfe erhält.

**Zahnhöhe.** Die Untersuchungen des vorangegangenen Paragraphen beschränkten sich auf den Fall, wo das eine Rad nur mit Zahnköpfen, das andere nur mit Zahnfüßen versehen ist, so daß die Einwirkung zweier Zähne auf einander nur auf der einen Seite der Centrale stattfindet und zwar auf der im Sinne der Bewegung hinter der Centrale gelegenen Seite, wenn man, wie es in der Praxis aus Rücksicht auf die Zahnreibung fast immer geschieht, das Rad mit den Zahnköpfen zum treibenden macht. Daß auch die Triebstöcke in dieser Beziehung wesentlich als Zahnfüße anzusehen sind, ergiebt sich ohne Weiteres aus der Bemerkung, daß sie von den Zähnen des anderen Rades erst dann ergriffen werden, wenn ihre Mittelpunkte das Momentancentrum passirt haben. §. 77.