$$\mathfrak{a}_1 = \frac{a + \beta_1}{a + 2\,\beta_1}\,t; \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{a - \beta_2}{-2\,\beta_2}\,t;$$

$$\mathfrak{b}_1 = \frac{b + \beta_2}{b + 2\,\beta_2}\,t; \quad \mathfrak{b}_2 = \frac{b - \beta_1}{b - 2\,\beta_1}\,t.$$

Für die Geradflankenverzahnung hat man speciell $\beta_1 = \frac{1}{2}\,b$ und $\beta_2 = \frac{1}{2}\,a$ zu setzen, und man erhält daher die Halbmesser für die Zahnköpfe:

$$\mathfrak{a} = \frac{a + \frac{b}{2}}{a + b}\,t = \frac{n + \frac{1}{2}}{n + 1}\,t = \frac{2\,n + 1}{n + 1}\,\frac{t}{2}$$

und

$$\mathfrak{b} = \frac{b + \frac{a}{2}}{b + a}\,t = \frac{1 + \frac{n}{2}}{1 + n}\,t = \frac{2 + n}{n + 1}\,\frac{t}{2},$$

wenn das Umsetzungsverhältniß $\frac{a}{b} = n$ gesetzt wird.

§. 75. **Satzräder.** In dem Vorstehenden ist immer stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, daß ein Rad A immer nur mit einem gewissen Rade B in Eingriff kommen solle, und daß die Bewegungen beider stets in einem bestimmten Verhältnisse $\alpha : \beta$ zu einander stehen sollen, welches dem umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser $b : a$ gleich ist. In der Praxis ist es nun häufig erforderlich, daß von einer größeren Anzahl von Rädern $A, B, C, D \ldots$ irgend zwei mit einander arbeiten müssen, derart natürlich, daß jedesmal das Verhältniß ihrer Umdrehungsgeschwindigkeiten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ dem umgekehrten Verhältnisse ihrer Halbmesser $a, b, c, d \ldots$ gleich ist. Hierzu ist zuerst die Gleichheit der einzelnen Zahnabstände oder der Theilungen auf den einzelnen Theilkreisen, d. h. den Kreisen gleicher Geschwindigkeit gemessen, erforderlich, außerdem müssen aber auch die Zahnprofile irgend zweier Räder zu einander richtige, d. h. den vorstehend erörterten Bedingungen einer gleichförmigen Bewegungsübertragung entsprechende sein. Solche Räder nennt man Satzräder. Die praktische Wichtigkeit derselben im Allgemeinen geht besonders daraus hervor, daß die Herstellung der Zahnräder, wenigstens der größeren, durch den Abguß genau gearbeiteter Modelle erfolgt, und daher die Anzahl der erforderlichen theuren Radmodelle, die ohnehin wegen der verschiedenen Durchmesser sowohl wie wegen der verschiedenen Theilungen eine große ist, sehr bedeutend ausfallen würde, wenn jedes Rad immer nur zu einem einzigen passend sein könnte. Die Grundsätze, wonach die Bildung von Satzrädern zu geschehen hat, sind leicht erkennbar. Es ist klar, daß von zwei Rädern A und B, welche, nach einer der obigen Methoden gebildet, in richtigem Eingriffe mit einander stehen, das eine derselben, z. B. A, nicht mit einem dritten von B verschiedenen Rade C in richtigem Eingriffe stehen kann, sobald der Halbmesser jenes Rades B bei der

Bestimmung der Zahnprofile von A von Einfluß gewesen ist. Nur in dem Falle, wo die Zahncurven jedes Rades lediglich von den eigenen Dimensionen desselben abhängig sind, ist es denkbar, Satzräder zu bilden.

Daraus geht zunächst hervor, daß bei der Geradflankenverzahnung Satzräder nicht möglich sind, denn die geraden Flanken der Zähne erfordern für die Zahnköpfe von A als Profil die Epicycloide des Kreises, dessen Durchmesser gleich dem Halbmesser des anderen Rades ist, es kann also dieser Zahnkopf nur für einen einzigen bestimmten Durchmesser des anderen Rades festgestellt werden. Aehnliches gilt natürlich auch für die in §. 72 abgehandelte Triebstockverzahnung, soweit überhaupt bei den Stockgetrieben von Satzrädern die Rede sein kann.

Es läßt sich andererseits leicht übersehen, daß die allgemeine Cycloidenverzahnung, §. 70, mit beliebigen Rollkreisen C_1 und C_2 zur Bildung von Satzrädern Gelegenheit giebt, und daß man solche erhalten wird, wenn man die beiden innerlich und äußerlich abzuwälzenden Kreise C_1 und C_2 unter sich und für alle Räder gleich groß annimmt, denn nur dann wird die Zahnkrone jedes einzelnen Rades mit dem Zahnfuße irgend eines anderen Rades richtig zusammenarbeiten können, weil diese beiden Profile durch äußeres und inneres Wälzen desselben Kreises auf den beiden Theilkreisen entstanden sind. Der Beweis hierfür ist leicht zu führen. Sind A, B, D drei beliebige Räder, und die Köpfe von A nach Epicycloiden eines beliebigen Rollkreises C auf dem Theilkreise von A erzeugt, so erfordert das Rad B die Hypocycloide desselben Rollkreises C in seinem Theilkreise als Profil für die Zahnfüße. Aus dieser Profilform der Füße von B folgt aber wieder die Nothwendigkeit, die Köpfe von D als Epicycloide des Kreises C auf dem Theilkreise von D zu profiliren und diese Kopfform von D erheischt beim Zusammenarbeiten mit A für die Füße des letzteren Rades die Hypocycloide, welche eben derselbe Kreis C im Theilkreise von A erzeugt, ein Gleiches gilt für alle einzelnen Räder des Satzes.

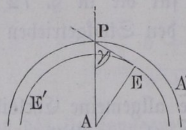
Man erkennt leicht, daß die Gültigkeit dieser Bemerkung auch auf innere Zahnräder und die Zahnstange sich erstreckt. Behufs Ausbildung eines solchen Satzes verschieden großer Räder hätte man daher nur über die Größe des zu wälzenden Kreises eine geeignete Annahme zu machen. Zu einer solchen Annahme führt die Bemerkung, daß schon bei radial gestellten Flanken die Zähne am Grunde sehr schwächlich ausfallen, und dieser Uebelstand noch mehr hervortritt, wenn der wälzende Kreis einen größeren Durchmesser annimmt, als der Halbmesser der Basis ist. Es dürfte daher passend sein, den Durchmesser des abzuwälzenden Erzeugungskreises höchstens gleich dem Halbmesser des kleinsten Rades im Satze, oder besser noch etwas kleiner anzunehmen. Nach Reuleaux soll man den Halbmesser des Erzeugungskreises zu 0,875 t annehmen, welchem Halbmesser eine Zähnezahl

$$z_0 = \frac{2\pi \,.\, 0{,}875\, t}{t} = 5{,}5$$

entsprechen würde.

Auch die Profilirung der Radzähne nach Kreisevolventen, §. 73, gestattet die Herstellung von Satzrädern *), denn hierbei ist die Zahnform eines Rades A vollkommen bestimmt, wenn man den Halbmesser AE, Fig. 257, des Evolutenkreises kennt, und dieser wird durch $a \sin \gamma$ gefunden, wenn a den Theilkreishalbmesser und γ den Winkel APE bedeutet, unter welchem die Wirkungslinie PE den Radius AP schneidet, welcher nach deren Durchschnittspunkte mit dem Theilkreise gezogen wird. Zum richtigen Zusammenarbeiten dieses Rades A mit irgend einem anderen ist nur erforderlich, daß die durch den Berührungspunkt gehende Wirkungslinie für beide in dieselbe Gerade fällt, d. h. daß der besagte Winkel für alle Räder des Satzes denselben Werth γ hat. Es ergiebt sich hieraus leicht, daß die Halbmesser der Evolutenkreise, welche sämmtlich in dem Verhältnisse $1 : \sin \gamma$ kleiner sind, als die Theilkreishalbmesser, sich unter einander ebenso verhalten, wie diese letzteren, sowie daß auch die auf die Evolutenkreise entfallende Theilung bei Satzrädern mit Evolventenzähnen durchweg gleich groß für alle Räder des Satzes sein muß. Obige Bemerkungen gelten auch hier für innerlich verzahnte Räder sowie für die Zahnstange.

Fig. 257.

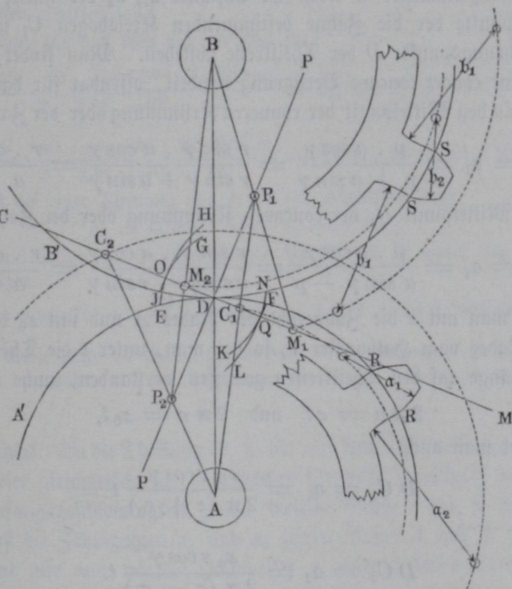


Es lassen sich endlich auch Satzräder nach der im §. 74 angegebenen Methode der Kreisbogenverzahnung ausführen. Es ist dazu nur nöthig, die Größen $DP_1 = p_1$ und $DP_2 = p_2$, Fig. 258, unter sich und für alle Räder des Satzes von gleicher Größe p zu machen, und den Winkel ADM ebenfalls bei allen Rädern gleich groß (etwa 75°) anzunehmen. Denn man erkennt aus der Figur sofort, daß unter dieser Voraussetzung der Durchmesser BD des Rades B auf die Lage der Mittelpunkte C_1 und C_2 für die Kreisbogen des Rades A ganz ohne Einfluß ist, und mit diesem Durchmesser nur die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Kreisbogen der eigenen Zähne sich in ihrem Abstande von D ändern. Es handelt sich also in diesem Falle nur um die Annahme geeigneter Werthe für den Winkel ADM und die Größe des Polabstandes $DP_1 = DP_2 = p$. Den Winkel ADM wird man mit Rücksicht darauf, daß die Gerade CM die Richtungslinie des

*) S. den Aufsatz von Büttner, Zeitschr. deutsch. Ing. Jahrg. 1871.

Druckes darstellt, nicht zu spitz nehmen dürfen, und ist eine Größe von 75° eine passende, weil bei einem geringeren Werthe die in die Centrale AB

Fig. 258.



fallende Componente des Räderdruckes und damit die schädlichen Axenreibungen unnöthig groß ausfallen würden. Der Werth für den Abstand $p = DP_1 = DP_2$ des Pols P vom Berührungspunkte D der Theilkreise bestimmt sich aus folgender Betrachtung. Wenn mit diesem Abstande p die Zahnconstruction für ein Rad gemacht wird, dessen Halbmesser $r = \frac{p}{\sin \gamma}$ ist, so fällt offenbar der vom Mittelpunkte dieses Rades nach dem Pole P gezogene Strahl parallel mit der Kraftrichtung CM aus, und der gesuchte Mittelpunkt M_1 für den die Flanken der Zähne begrenzenden Kreisbogen JH liegt im Unendlichen, d. h. diese Flanken nehmen eine radiale Begrenzung an. Wäre nun der Halbmesser r des Rades noch kleiner, so rückt der Mittelpunkt M_1 auf die andere Seite von D, und die Flanken des Rades B würden durch die gefundenen Kreisbogen beträchtlich unterschnitten, die Zähne selbst dadurch sehr verschwächt werden. Es liegt daher nahe, die Größe p so zu wählen, daß bei dem kleinsten Rade, welches im Satze vorkommt, die Flanken höchstens radial ausfallen. Bezeichnet daher r diesen kleinsten Halbmesser, so hat man p aus der obigen Beziehung $r = \frac{p}{\sin\gamma}$ zu $p = r \sin\gamma$ zu wählen. Nunmehr lassen sich nach den in §. 74 gegebenen Formeln für irgend ein Rad A vom Halbmesser a leicht die Abstände $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ berechnen, um welche die Mittelpunkte der die Zähne bestimmenden Kreisbogen C_1 und C_2 von dem Berührungspunkte D der Theilkreise abstehen. Man findet, da es sich hier um eine convex-concave Berührung handelt, offenbar für das Rad vom Halbmesser a den Mittelpunkt der convexen Krümmung oder der Zahnkrone aus

$$D C_1 = \mathfrak{a}_1 = \frac{p \,.\, a\cos\gamma}{p + a\sin\gamma} = \frac{r\sin\gamma \,.\, a\cos\gamma}{r\sin\gamma + a\sin\gamma} = \frac{r \,.\, a\cos\gamma}{a + r},$$

sowie den Mittelpunkt C_2 der concaven Krümmung oder der Zahnflanke aus

$$D C_2 = \mathfrak{a}_2 = \frac{p \,.\, a\cos\gamma}{a\sin\gamma - p} = \frac{r\sin\gamma \,.\, a\cos\gamma}{a\sin\gamma - r\sin\gamma} = \frac{r \,.\, a\cos\gamma}{a - r}.$$

Bezeichnet man mit z die Zähnezahl des Rades A und mit z_0 diejenige des kleinsten Rades vom Halbmesser r, so hat man, unter t die Theilung, d. h. die Bogenlänge auf den Theilkreisen gemessen, verstanden, auch

$$2\pi a = z t \quad \text{und} \quad 2\pi r = z_0 t,$$

daher findet man auch

$$D C_1 = \mathfrak{a}_1 = \frac{z_0\, z\cos\gamma}{2\pi\,(z + z_0)}\, t$$

und

$$D C_2 = \mathfrak{a}_2 = \frac{z_0\, z\cos\gamma}{2\pi\,(z - z_0)}\, t.$$

Nach diesen Formeln kann man für verschiedene Zähnezahlen der Räder und verschiedene Theilungen eine Tabelle der Werthe von $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ leicht berechnen, wie es von Willis*), von welchem diese Kreisbogenverzahnung zuerst angegeben wurde, auch unter Zugrundelegung eines Winkels $\gamma = 75^0$ und der kleinsten Zähnezahl $z_0 = 12$ geschehen ist. Zur Erleichterung der Construction hat Willis ferner ein kleines mit dem Namen Odontograph bezeichnetes Instrument angegeben, welches im Wesentlichen aus einem aus Zeichenpapier geschnittenen Winkelhaken, dessen Schenkel unter 75^0 geneigt sind, besteht. Auf dem einen Schenkel ist vom Scheitel aus nach jeder Seite eine nach dem Maßstabe der Zeichnung ausgeführte gleichmäßige Theilung aufgetragen. Die Theilung auf der einen Seite dient für die Werthe von $\mathfrak{a}_1$, die andere für die Werthe von $\mathfrak{a}_2$, welche aus der dazu gehörigen Tabelle zu entnehmen sind. Man kann diesen Apparat indessen bei der Construction füglich entbehren.

---

*) Principles of mechanism.

Beispiel. Es sollen die Modelle zu einem Satz Rädern von 30 Millimeter Theilung mit kreisbogenförmigen Zahnprofilen angefertigt werden, wie groß sind die Abstände a_1 und a_2 der Mittelpunkte für die Zahnköpfe und Füße für das Rad von 40 Zähnen anzunehmen, wenn der Winkel der Kraftrichtung gegen die Centrale γ zu 75^0 angenommen wird und das kleinste Rad von 12 Zähnen radiale Flanken erhalten soll?

Man hat hier für das Rad von 40 Zähnen:

$$a_1 = \frac{12 \,.\, 40 \,.\, \cos 75^0 \,.\, 30 \text{ Millim.}}{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, (40 + 12)} = 0{,}382 \,.\, 30 = 11{,}5 \text{ Millim.}$$

und

$$a_2 = \frac{12 \,.\, 40 \,.\, \cos 75^0 \,.\, 30 \text{ Millim.}}{2 \,.\, 3{,}14 \,.\, (40 - 12)} = 0{,}707 \,.\, 30 = 21{,}2 \text{ Millim.}$$

Allgemein ist bei einer Theilung von t für das 40zähnige Rad

$$a_1 = 0{,}382\, t \quad \text{und} \quad a_2 = 0{,}707\, t.$$

Der der Construction zu Grunde gelegte Polabstand ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$p = r \sin 75^0 = \frac{12 \,.\, t}{2 \,.\, 3{,}14}\, 0{,}966 = 1{,}84\, t = 55{,}2 \text{ Millimeter.}$$

In gleicher Weise hätte die Rechnung für jede andere Zähnezahl zu geschehen, die Construction der Zähne mit den gefundenen Größen a_1 und a_2 ist in §. 74 angegeben.

Zähnezahl. Da die Theilung, d. h. die auf dem Theilkreise gemessene Entfernung zweier gleichgerichteten Zahnflächen für beide Theilkreise wegen deren gleicher Umfangsgeschwindigkeit genau dieselbe Größe t hat, so folgt daraus zunächst, daß die Zähnezahlen z_1 und z_2 zweier Räder A und B sich wie die Umfänge und also auch wie die Halbmesser r_1 und r_2 dieser Theilkreise verhalten müssen. Ueberhaupt hat man $z t = 2 \pi r$, und daher §. 76.

$$t = 6{,}28\, \frac{r_1}{z_1} = 6{,}28\, \frac{r_2}{z_2}.$$

Man kann daher als das Umsetzungsverhältniß $n = \frac{r_1}{r_2}$ zweier Räder jederzeit auch das Verhältniß der Zähnezahlen $n = \frac{z_1}{z_2}$ annehmen.

Hieraus folgt für dieses Umsetzungsverhältniß zweier Zahnräder, daß dasselbe immer nur einen rationalen, durch *ganze* Zahlen ausdrückbaren Werth haben kann, welcher Beschränkung die Reibungsräder und Riemscheiben nicht unterworfen sind.

Aus der Beziehung $z t = 2 \pi r$ ist es in jedem Falle leicht, eine der drei Größen, Theilung, Zähnezahl und Theilkreishalbmesser aus den beiden anderen zu finden, und bedient man sich bei häufigem Vorkommen dieser Bestimmung mit Vortheil einer Tabelle, welche die Werthe $\frac{z}{2\pi} = 0{,}1592\, z$ für die gewöhnlich vorkommenden Zahlen von z (bis etwa 300) enthält.