eine Abwälzung dieser Linie $EF$ auf sich selbst beschreibt daher der Punkt $P$ eine zu $EF$ in $P$ normale Gerade $PH$, wonach die Flächen der Zähne

Fig. 252.

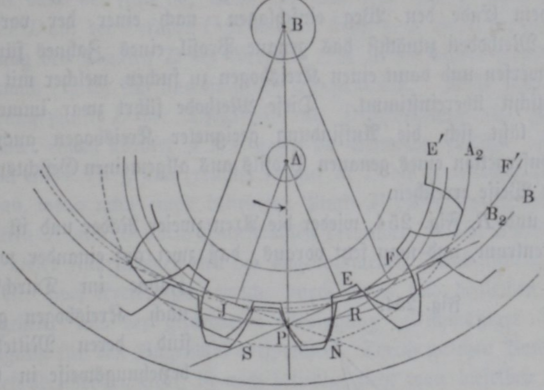
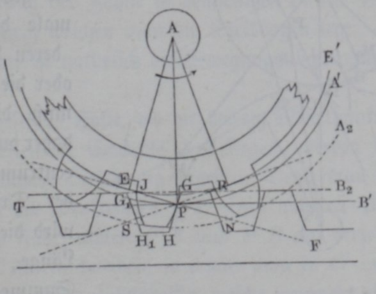



Fig. 253.



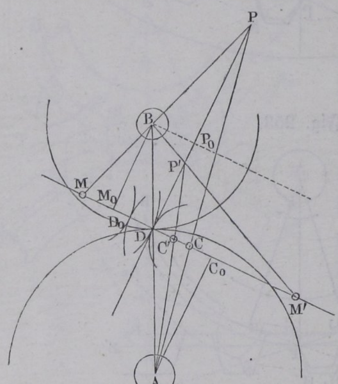

für die Zahnstange als Ebenen $GH$ und $G_1H_1$ sich ergeben, welche gegen die Zahnstange $B'$ unter dem Winkel $\gamma$ beiderseits geneigt sind. Da der Berührungspunkt zweier Zähne hierbei von $J$ nach $N$ beziehungsweise von $R$ nach $S$ fortschreitet, so erkennt man leicht, daß bei dieser Verzahnung der Druck eines Radzahnes sich allmälig auf eine größere Fläche vertheilt und nicht auf einen einzigen Punkt concentrirt, wie dies bei der Zahnstange, Fig. 244, der Fall ist, bei welcher nach §. 71 die Zahnköpfe des Rades ebenfalls durch Evolventen, aber diejenigen des Theilkreises profilirt sind.

**Kreisbogenverzahnung.** Da von den in den vorhergehenden Paragraphen ermittelten Curven immer nur ein verhältnißmäßig geringer Theil §. 74.

für die Profilirung der Zähne benutzt wird, so kann man in der Praxis diese Curven auch durch Kreisbogen ersetzen, welche jenen möglichst angenähert sind, und man erreicht bei passender Wahl der Mittelpunkte und Halbmesser dieser Kreisbogen eine für die meisten Fälle genügende Genauigkeit. Man kann zu dem Ende den Weg einschlagen, nach einer der vorstehend behandelten Methoden zunächst das genaue Profil eines Zahnes für jedes Rad zu entwerfen und dann einen Kreisbogen zu suchen, welcher mit diesem Profil möglichst übereinstimmt. Diese Methode führt zwar immer zum Ziele, doch läßt sich die Auffindung geeigneter Kreisbogen auch ohne zuvorige Construction eines genauen Profils aus allgemeinen Gesichtspunkten in folgender Weise erreichen.

Sind $A$ und $B$, Fig. 254, wieder die Axen zweier Räder und ist $D$ das Momentancentrum, und man setzt voraus, daß zwei auf einander wirkende Zähne im Durchschnitte nach Kreisbogen geformt sind, deren Mittelpunkte beziehungsweise in $C$ und $M$ liegen, so ist die Verbindungslinie $CM$ offenbar die gemeinschaftliche Normale der Zahnprofile in deren Berührungspunkte oder die Druckrichtung, und muß diese Gerade $CM$ daher durch das Momentancentrum $D$ gehen. Bei der Drehung der Räder wird diese gerade Linie ihre Länge, welche gleich der Summe der Halbmesser der beiden Kreisbogen ist, so lange unverändert beibehalten, als diese Kreisbogen miteinander in Berührung bleiben. Die Bewegung der Geraden $CM$ während dieser Zeit läßt sich nun nach dem in der Einleitung §. 7 Gesagten in jedem Augenblicke als eine kleine Drehung um den augenblicklichen Pol auffassen, welcher letztere bekanntlich im Durchschnittspunkte der Normalen liegt, die auf den Wegen zweier Punkte $C$ und $M$ errichtet werden. Da diese Normalen mit den Radien $AC$ und $BM$ übereinstimmen, so erhält man also in deren Durchschnittspunkte $P$ den Pol oder augenblicklichen Drehpunkt für die Bewegung der Geraden $CM$.

Fig. 254.



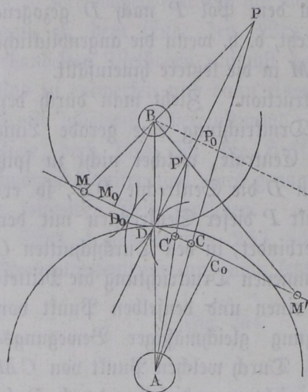

Die Bewegungsübertragung mittelst der kreisförmig profilirten Zahnflächen wird nun während einer kleinen Bewegung eine gleichförmige sein, wenn diese gemeinschaftliche Normale $CM$ der Zahncurven während dieser Bewegung immer durch den Berührungspunkt $D$ der Theilkreise hindurchgeht, was nur dann der Fall ist, wenn der von dem Pol $P$ nach $D$ gezogene Strahl $PD$ auf der Geraden $CM$ normal steht, d. h. wenn die augenblickliche Bewegung des Punktes $D$ der Geraden $CM$ in die letztere hineinfällt.

Hiernach ergiebt sich nun folgende Construction. Zieht man durch den Berührungspunkt $D$ der Theilkreise als Druckrichtung eine gerade Linie $MC$ unter einem Winkel $ADC$ gegen die Centrale, welcher nicht zu spitz ist (etwa unter 75°), und errichtet darauf in $D$ die Senkrechte $DP$, so erhält man, wenn man einen beliebigen Punkt $P$ dieser Senkrechten mit den Radmitten $A$ und $B$ durch Fahrstrahlen verbindet, in den Durchschnitten $C$ und $M$ dieser Fahrstrahlen mit der angenommenen Druckrichtung die Mittelpunkte für zwei Kreisbogen, welche durch einen und denselben Punkt von $CM$ gehen, und der geforderten Bedingung gleichmäßiger Bewegungsübertragung für den Augenblick entsprechen. Durch welchen Punkt von $CM$ man diese Kreisbogen führt, ist noch beliebig; zieht man dieselben durch $D$, so wird die vollkommen gleichmäßige Bewegungsübertragung stattfinden, wenn die Zähne sich in der Centrale, also in $D$, berühren, wogegen andererseits dies für die Berührung der Zähne in demjenigen Punkte $D_1$ vor oder hinter der Centrale gilt, durch welchen man die Kreisbogen legt. Für alle übrigen Stellungen der Zähne ist natürlich die Bewegungsübertragung nur annähernd eine gleichmäßige.

In dem vorausgesetzten Falle, wo die beiden Mittelpunkte $C$ und $M$ auf entgegengesetzten Seiten der Centrale $AB$ liegen, werden die beiden Kreisbogen eine convex-convexe Berührung eingehen. Denkt man sich jedoch anstatt des Punktes $P$ auf der Senkrechten $DP$ einen anderen Punkt $P'$ als Pol gewählt, so daß die Fahrstrahlen $P'A$ und $P'B$ auf derselben Seite von $D$ in die Drucklinie $CM$ einschneiden, so erhält man in $C'$ und $M'$ die Mittelpunkte für die kreisförmigen Zahnprofile, welche nunmehr eine convex-concave Berührung eingehen. Endlich würde eine solche Wahl des Pols auf $DP$ in $P_0$, bei welcher der Fahrstrahl $BP_0$ parallel zu $CM$ ausfällt, den Mittelpunkt $C$ ins Unendliche hinausrücken, d. h. das Zahnprofil von $B$ wäre durch eine zu $CM$ senkrechte Gerade zu begrenzen und das Centrum für das Profil des Zahns von $A$ findet sich dann in dem Durchschnitte von $AP_0$ mit $CM$.

Nimmt man die Entfernung des Pols $P$ von $D$ unendlich groß, so fallen die Polstrahlen nach den Radmitten $A$ und $B$ offenbar parallel mit $DP$ oder senkrecht zu $CM$ aus, und man erhält dann in $C_0$ und $M_0$ die Mittelpunkte für die beiden kreisförmigen Zahnprofile. Diese Punkte stimmen mit den Krümmungsmittelpunkten der beiden Evolventen in ihrem Berührungspunkte überein, welche man nach Anweisung des vorigen Paragraphen zu der Druckrichtung $CM$ zeichnen kann, denjenigen Augenblick natürlich vorausgesetzt, in welchem diese Evolventen sich in demselben Punkte $D$ oder $D_1$ berühren, durch welchen man die beiden Kreisbogen beschrieben hat. Aus den letzten Bemerkungen ergiebt sich eine einfache Construction zur Auffindung der gesuchten Mittelpunkte $C_0$ und $M_0$ zweier Kreisbogen, welche als angenäherte Zahnprofile benutzt werden können, dadurch, daß man die Radmitten $A$ und $B$ auf die angenommene Druckrichtung $CM$ projicirt; die Projectionen $C_0$ und $M_0$ sind die gesuchten Mittelpunkte, und wenn man die Kreisbogen durch den Berührungspunkt $D$ der Theilkreise legt, so geben die Zähne in demjenigen Augenblicke eine genau gleichmäßige Bewegungsübertragung, in welchem ihre Berührung in der Centrale $AB$ stattfindet.

Fig. 255.




Um die Lage der Mittelpunkte $C$ und $M$ resp. $C'$ und $M'$ zu bestimmen, seien (Fig. 255) mit $a$ und $b$ die Halbmesser der Theilkreise der Räder $A$ und $B$ bezeichnet, und bedeute $p$ den Abstand des Pols $P$ von $D$, ferner sollen die gesuchten Abstände für convex-convexe Berührung $CD$ mit $\mathfrak{a}$ und $MD$ mit $\mathfrak{b}$ bezeichnet werden. Dann hat man:

$$\mathfrak{a} = DC_0 - CC_0 = a\cos\gamma - CC_0,$$

oder, da aus

$$\mathfrak{a} : p = CC_0 : a\sin\gamma$$

sich

$$CC_0 = \frac{\mathfrak{a} \,.\, a\sin\gamma}{p}$$

ergiebt:

$$\mathfrak{a} = a\cos\gamma - \frac{\mathfrak{a} \,.\, a\sin\gamma}{p},$$

woraus

$$\mathfrak{a} = \frac{p \,.\, a\cos\gamma}{p + a\sin\gamma}$$

folgt.

Ebenso ist

$$\mathfrak{b} = DM_0 + M_0M = b\cos\gamma + M_0M,$$

oder, da aus

$$\mathfrak{b} : p = M_0M : b\sin\gamma$$

sich

$$M_0 M = \frac{\mathfrak{b} \,.\, b \sin\gamma}{p}$$

ergiebt:

$$\mathfrak{b} = b \cos\gamma + \frac{\mathfrak{b} \,.\, b \sin\gamma}{p},$$

woraus

$$\mathfrak{b} = \frac{p \,.\, b \cos\gamma}{p - b \sin\gamma}$$

folgt.

Ganz ebenso findet man für eine convex-concave Berührung, wenn der Polabstand $DP'$ mit $p'$ und die Abstände $DC'$ mit $\mathfrak{a}'$ sowie $DM'$ mit $\mathfrak{b}'$ bezeichnet werden:

$$DC' = \mathfrak{a}' = \frac{p' \,.\, a \cos\gamma}{p' + a \sin\gamma}$$

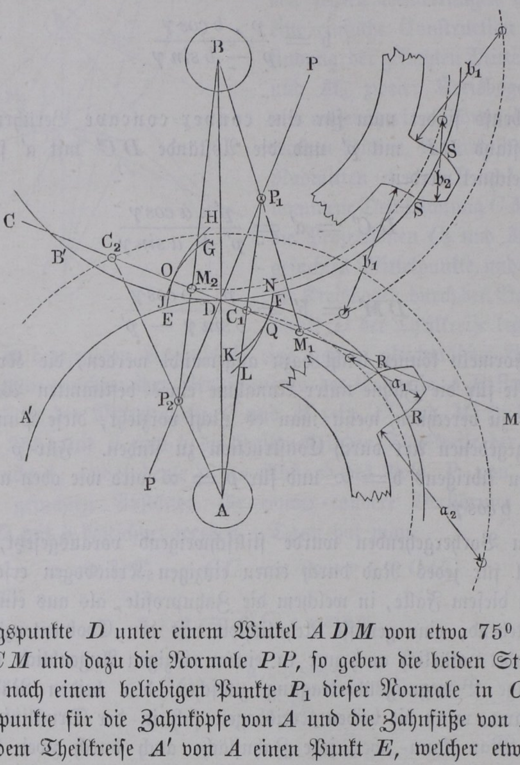
und

$$DM' = \mathfrak{b}' = \frac{p' \,.\, b \cos\gamma}{b \sin\gamma - p'}.$$

Diese Formeln können leicht dazu angewandt werden, die Krümmungsmittelpunkte für die Zähne unter Annahme eines bestimmten Werthes von $p$ resp. $p'$ zu berechnen, wenn man es nicht vorzieht, diese Punkte in der vorher angegebenen Art durch Construction zu finden. Für $p = b \sin\gamma$ erhält man übrigens $\mathfrak{b} = \infty$ und für $p = \infty$ wird wie oben $\mathfrak{a} = a \cos\gamma$ und $\mathfrak{b} = b \cos\gamma$.

In dem Vorhergehenden wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß das Zahnprofil für jedes Rad durch einen einzigen Kreisbogen ersetzt werden solle. In diesem Falle, in welchem die Zahnprofile, als aus einer einzigen Curve bestehend, eine gewisse Aehnlichkeit mit den Evolventenzähnen darbieten, findet natürlich auch nur in einem einzigen Augenblicke eine genau gleichförmige Bewegungsübertragung zwischen den beiden Rädern statt, nämlich dann, wenn die beiden Kreisbogen sich in der Drucklinie $MC$ berühren. Man kann aber jede Zahnfläche auch durch zwei Kreisbogen profiliren, welche, der eine für die Füße, der andere für die Köpfe dienend, den beiden verschiedenen Curven der Cycloidenzähne in gewissem Sinne entsprechen. Hierbei wird man erreichen, daß zwei miteinander arbeitende Zahnflächen während ihrer gegenseitigen Einwirkung in zwei verschiedenen Augenblicken eine genau gleichmäßige Bewegungsübertragung ergeben, nämlich dann, wenn das eine, und dann, wenn das andere Paar der zusammenarbeitenden Kreisbogen in der angenommenen Druckrichtung $CM$ zur Berührung gelangen. Hierdurch ist natürlich eine engere Uebereinstimmung der kreisförmigen Profile mit den genau richtigen zu erreichen, insbesondere wenn man die beiden Orte der besagten genau richtigen Bewegungsübertragung zwischen zwei Zähnen um dieselbe gleiche Größe, etwa um eine halbe Zahntheilung vor und hinter die Centrale verlegt. Um dies zu erreichen, ergiebt sich nach dem Vorhergehenden von selbst folgende Construction. Zieht man gegen die Centrale $AB$, Fig. 256, der beiden Räder $A$ und $B$ im

Fig. 256.




Berührungspunkte $D$ unter einem Winkel $ADM$ von etwa $75^0$ die Druckrichtung $CM$ und dazu die Normale $PP$, so geben die beiden Strahlen von $A$ und $B$ nach einem beliebigen Punkte $P_1$ dieser Normale in $C_1$ und $M_1$ die Mittelpunkte für die Zahnköpfe von $A$ und die Zahnfüße von $B$. Wählt man auf dem Theilkreise $A'$ von $A$ einen Punkt $E$, welcher etwa um die halbe Zahntheilung von $D$ entfernt ist, und beschreibt durch diesen Punkt um $C_1$ als Mittelpunkt einen Kreisbogen $EG$, so bestimmt derselbe das Kopfprofil für die Zähne von $A$, während ein um den Punkt $M_1$ beschriebener Kreisbogen $JH$, welcher den letztgedachten $EG$ in seinem Durchschnitte $O$ mit der Kraftrichtung $CM$ berührt, die Begrenzung der Füße des Rades $B$ ergiebt. In derselben Weise liefern die beiden durch einen anderen Punkt $P_2$ der Geraden $PP$ gezogenen Strahlen $AP_2$ und $BP_2$ in ihren Schnittpunkten $C_2$ und $M_2$ mit $CM$ zwei Mittelpunkte für die Kreisbogen, welche die Füße von $A$ und die Köpfe von $B$ begrenzen. Man wird daher entsprechend durch einen Punkt $F$ des Theilkreises $A'$, welcher etwa um die halbe Theilung von $D$ absteht, den Flankenbogen $FL$ um $C_2$ als Mittelpunkt beschreiben, und durch dessen Schnittpunkt $Q$ mit der Kraftrichtung $CM$ den um $M_2$ beschriebenen Kreisbogen $NK$ legen, welcher als Profil für die Zahnköpfe des Rades $B$ dient. Die weitere Verzeichnung der Zähne mit den gefundenen Halbmessern ergiebt sich nun leicht, wenn man bedenkt, daß die Kreise um $A$ durch $C_1$ und $C_2$ die geometrischen Oerter der Mittelpunkte für die Begrenzung der Zähne von $A$, und die zu $B$ concentrischen Kreise durch $M_1$ und $M_2$ diese Oerter für die Kreisbogen der Zähne von $B$ sind. Die Radien dieser Kreise $\mathfrak{a}_1 = C_1 O$, $\mathfrak{a}_2 = C_2 Q$; $\mathfrak{b}_1 = M_1 O$ und $\mathfrak{b}_2 = M_2 Q$ sind an den betreffenden Stellen eingetragen. Diese Kreisbogen gehen übrigens in den Punkten $R$ und $S$, wo sie sich in den Theilkreisen treffen, nicht tangential in einander über, daher eine leichte Abstumpfung der entstehenden Ecken sich empfehlen wird.

Anmerkung. Man kann auch als Halbmesser des Kreisbogens den Krümmungsradius eines genauen Zahnprofils in demjenigen Punkte desselben annehmen, in welchem die Bewegungsübertragung eine genau gleichmäßige werden soll. Wendet man dieses Verfahren z. B. auf die cycloidischen Profile an, welche man durch angenäherte Kreisbogen ersetzen will, so findet man die Halbmesser der letzteren durch Rechnung in folgender Weise:

Ist $a$ der Halbmesser eines Theilkreises und $\beta$ derjenige des darauf oder darin abzuwälzenden Kreises, so bestimmt sich der Krümmungsradius der durch Wälzung entstehenden Epicycloide und Hypocycloide nach den bekannten Eigenschaften dieser Curven*) in einem Punkte, welcher von dem Fußpunkte des wälzenden Kreises um einen Mittelpunktswinkel des letzteren gleich $\varphi$ absteht, zu:

$$r = 4\beta \frac{a \pm \beta}{a \pm 2\beta} \sin {}^1\!/_2 \varphi,$$

worin die positiven Zeichen für die Epicycloide und die negativen für die Hypocycloide gelten. Soll nun der betreffende Punkt des Zahnprofils, für welchen der Kreisbogen genau mit der correcten Profilform übereinstimmt, wieder um die halbe Theilung $\frac{t}{2}$ vom Momentancentrum abstehen, so hat man für denselben $\beta\varphi = \frac{t}{2}$ und daher $\frac{\varphi}{2} = \frac{t}{4\beta}$.

Wenn man bei der Kleinheit dieses Winkels nun $\sin \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\varphi$ setzt, so folgt

$$r = \frac{a \pm \beta}{a \pm 2\beta}\, t.$$

Aus dieser Formel erhält man daher die Abrundungshalbmesser $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ für zwei Räder von den Halbmessern $a$ und $b$, wenn die erzeugenden Kreise die Halbmesser $\beta_1$ und $\beta_2$ haben, durch:

---

*) S. u. A. Zehme: Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cycloiden.

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{a + \beta_1}{a + 2\beta_1} t; \quad \mathfrak{a}_2 = \frac{a - \beta_2}{-2\beta_2} t;$$

$$\mathfrak{b}_1 = \frac{b + \beta_2}{b + 2\beta_2} t; \quad \mathfrak{b}_2 = \frac{b - \beta_1}{b - 2\beta_1} t.$$

Für die Geradflankenverzahnung hat man speciell $\beta_1 = \frac{1}{2} b$ und $\beta_2 = \frac{1}{2} a$ zu setzen, und man erhält daher die Halbmesser für die Zahnköpfe:

$$\mathfrak{a} = \frac{a + \frac{b}{2}}{a + b} t = \frac{n + \frac{1}{2}}{n + 1} t = \frac{2n + 1}{n + 1} \frac{t}{2}$$

und

$$\mathfrak{b} = \frac{b + \frac{a}{2}}{b + a} t = \frac{1 + \frac{n}{2}}{1 + n} t = \frac{2 + n}{n + 1} \frac{t}{2},$$

wenn das Umsetzungsverhältniß $\frac{a}{b} = n$ gesetzt wird.

§. 75. **Satzräder.** In dem Vorstehenden ist immer stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, daß ein Rad $A$ immer nur mit einem gewissen Rade $B$ in Eingriff kommen solle, und daß die Bewegungen beider stets in einem bestimmten Verhältnisse $\alpha : \beta$ zu einander stehen sollen, welches dem umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser $b : a$ gleich ist. In der Praxis ist es nun häufig erforderlich, daß von einer größeren Anzahl von Rädern $A, B, C, D \ldots$ irgend zwei mit einander arbeiten müssen, derart natürlich, daß jedesmal das Verhältniß ihrer Umdrehungsgeschwindigkeiten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ dem umgekehrten Verhältnisse ihrer Halbmesser $a, b, c, d \ldots$ gleich ist. Hierzu ist zuerst die Gleichheit der einzelnen Zahnabstände oder der Theilungen auf den einzelnen Theilkreisen, d. h. den Kreisen gleicher Geschwindigkeit gemessen, erforderlich, außerdem müssen aber auch die Zahnprofile irgend zweier Räder zu einander richtige, d. h. den vorstehend erörterten Bedingungen einer gleichförmigen Bewegungsübertragung entsprechende sein. Solche Räder nennt man Satzräder. Die praktische Wichtigkeit derselben im Allgemeinen geht besonders daraus hervor, daß die Herstellung der Zahnräder, wenigstens der größeren, durch den Abguß genau gearbeiteter Modelle erfolgt, und daher die Anzahl der erforderlichen theuren Radmodelle, die ohnehin wegen der verschiedenen Durchmesser sowohl wie wegen der verschiedenen Theilungen eine große ist, sehr bedeutend ausfallen würde, wenn jedes Rad immer nur zu einem einzigen passend sein könnte. Die Grundsätze, wonach die Bildung von Satzrädern zu geschehen hat, sind leicht erkennbar. Es ist klar, daß von zwei Rädern $A$ und $B$, welche, nach einer der obigen Methoden gebildet, in richtigem Eingriffe mit einander stehen, das eine derselben, z. B. $A$, nicht mit einem dritten von $B$ verschiedenen Rade $C$ in richtigem Eingriffe stehen kann, sobald der Halbmesser jenes Rades $B$ bei der