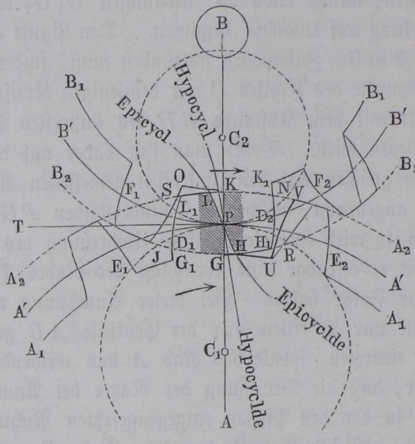
nicht weiter aufeinander einwirken können, und man hätte daher die Anordnung so zu treffen, daß in dem Augenblicke, in welchem zwei Zähne nach PG und PH gelangt sind, wo sie sich von einander trennen, bereits zwei folgende Zahnflächen, welche etwa die Stellungen $G_1 G_2$ und $H_1 H_2$ einnehmen, ihre Wirkung auf einander beginnen. Den Punkt J, in welchem dieser Angriff eines neuen Zahnpaars stattfinden muß, findet man leicht in dem Durchschnittspunkte des Kreises C mit demjenigen Kreise, welcher um B als Mittelpunkt mit dem Abstande BH des äußersten Punktes H der Zahnfläche beschrieben wird. Denkt man sich daher auf den Theilkreisen A' und B' in den gleichen auf den Umkreisen gemessenen Abständen PG_1 und PH_1 Zähne angebracht, welche die Cylinderflächen PG und PH zur Begrenzung haben, so wird eine gleichmäßige Umdrehung des Rades A mit der Geschwindigkeit α offenbar eine ebensolche des Rades B mit der Geschwindigkeit β zur Folge haben. Bei dieser Anordnung wird eine Einwirkung der Zähne nur in einem vor der Centrale AB gelegenen Bogen $G_1 P$ resp. $H_1 P$ eintreten, sobald das Rad A das treibende ist. Es ist aber ebenfalls klar, daß die Bewegung der Räder bei Annahme derselben Zahnflächen auch in der den Pfeilen entgegengesetzten Richtung stattfinden kann, vorausgesetzt, daß der Antrieb von dem Rade B ausgeht, und der Unterschied wird darin liegen, daß der Zahn PH dann zuerst in P auf den Zahn PG wirkt, und daß der Berührungspunkt der Zahndurchschnitte allmälig von P nach J wandert, wobei er immer auf dem Kreise durch C verbleibt. Die Berührung der Zähne findet daher dann nur hinter der Centrale AB statt, d. h. nachdem die Zahnflächen den Berührungspunkt P der Theilkreise durchschritten haben. Der dieser Einwirkung zweier Zähne zugehörige auf den Theilkreisen gemessene Bogen heiße der Eingriffbogen und der ihm zugehörige Mittelpunktswinkel eines Rades der Eingriffwinkel des letzteren.

Allgemeine Cycloidenverzahnung. Zwischen den beiden Rädern §. 70.
A und B existirt jetzt insofern ein Unterschied, als das eine B mit regelmäßigen nach PH geformten Hervorragungen über die Momentanaxenfläche versehen ist, während das andere Rad A entsprechende durch PG begrenzte Einschnitte zeigt, in welche jene Hervorragungen eintreten können. Es liegt nun auf der Hand, daß man ebenso gut auch dem Rade A Hervorragungen außerhalb des Theilkreises und dem Rade B dementsprechende Einschnitte nach dem Innern des Theilkreises wird geben können, wie dies aus der nachfolgenden Construction sich ergiebt.

Wälzt man auf den beiden Theilkreisen $A'A'$ und $B'B'$ der Axen A und B, Fig. 238 (a. f. S.), einen beliebigen Kreis C_1 äußerlich auf $B'B'$ und innerlich auf $A'A'$, so erhält man nach dem Vorstehenden in der Bewegung eines Punktes etwa P des wälzenden Kreises die Epicycloide PII

als Begrenzung für die Hervorragungen des Rades B und die Hypocycloide PG als Begrenzung der Einschnitte des Rades A. Wälzt man dann

Fig. 238.



in gleicher Weise einen beliebigen anderen Kreis C_2 äußerlich auf $A'A'$ und innerlich auf $B'B'$, so muß man in derselben Art in der Epicycloide PL die Begrenzung von Hervorragungen für das Rad A erhalten, zu welchen die erforderlichen Einschnitte in B durch die Hypocycloide PK in ihrer Form bestimmt sind. Wiederholt man nun die Zeichnung dieser Curven in regelmäßig auf einander folgenden Punkten $F_1 F_2 \ldots$ sowie $E_1 E_2 \ldots$ der Theilkreise, so zwar, daß die gestreckten Bögen PE_1, $PE_2 \ldots$ unter sich sowie mit den gestreckten Bögen PF_1, $PF_2 \ldots$ gleich lang sind, und begrenzt diese Curven durch die zu A und B concentrischen Kreise A_1, A_2, B_1 und B_2, so erhält man die Durchschnitte zugehöriger Zahnflächen für die Räder. Dabei wäre die Form gleichgültig, wonach man die Rückflächen $L_1 D_1 G_1$ und $H_1 D_2 K_1$ begrenzt, vorausgesetzt nur, daß sie nicht die folgenden Zahnflächen in ihrer Wirkung behindern, und könnte beispielsweise eine eben begrenzte sein wie bei den Zähnen E_2 und F_2 angedeutet ist, wenn bei der vorausgesetzten Drehungsrichtung von A und B der Antrieb immer von A, oder wenn bei der den Pfeilen entgegengesetzten Drehungsrichtung der Antrieb von B ausginge. Damit aber für jede der beiden Drehungsrichtungen beliebig A sowohl wie B das treibende Rad sein könne, ist eine symmetrische Form der Zähne allgemein in Gebrauch, derart nämlich, daß man, wenn DP_1 und PD_2 die Dicken der Zähne, in den Theilkreisen gemessen, vorstellen, in D_1 und D_2 die Begrenzungen der Zahnquerschnitte durch Curven bewirkt, welche mit den durch P gehenden in Hinsicht auf den durch die

Zahnmitte gelegten Radius symmetrisch sind, d. h. also hier durch dieselben Cycloiden, aber von dem entgegengesetzten Sinne der Wälzung.

Aus dem Vorstehenden folgt zunächst, daß jeder der so gebildeten Zähne wie LGG_1L_1 und HKK_1H_1 ungezwungen als aus zwei Theilen bestehend erscheint, welche durch die Momentanaxenflächen oder Theilkreiscylinder von einander getrennt sind. Die über die Theilkreise (bei äußerer Verzahnung) hinausragenden Vorsprünge wie PLL_1D_1 und PHH_1D_2 heißen Zahnkronen oder Köpfe, die nach innen gelegenen Theile, wie PGG_1D_1 und PKK_1D_2 Zahnwurzeln oder Füße, die seitlichen Begrenzungsflächen der letzteren, also PG, D_1G_1, PK und D_2K_1, nennt man auch Zahnflanken; der Zwischenraum zwischen zwei Zähnen, wie $LGUV$, heißt Zahnlücke. Die inneren Begrenzungskreise der Zahnwurzeln, also die Kreise A_1A_1 und B_1B_1, pflegt man Fußkreise, die äußeren Begrenzungen A_2A_2 und B_2B_2 der Zahnkronen auch wohl Kopfkreise zu nennen. Die radiale Ausdehnung eines Zahns, also der Abstand seines Fußkreises von seinem Kopfkreise, heißt Zahnhöhe oder auch Zahnlänge, während man unter seiner Breite die den Axen parallel gemessene Dimension versteht. Spricht man schlechtweg von der Dicke des Zahns, so pflegt man dieselbe in der Regel in den Theilkreisen gemessen zu verstehen, also die Bogenlänge PD_1 resp. PD_2, wofür man meist mit genügender Annäherung anstatt der Bögen auch die Sehnen setzen kann. Unter der Zahntheilung oder schlechtweg Theilung endlich versteht man den auf dem Theilkreise gemessenen Bogen zwischen zwei gleichgestellten Zahnflächen, also die Bögen PE_1, PF_1, PE_2, PF_2 . . . Wie aus dem Obigen hervorgeht, sind diese Bögen bei zwei miteinander arbeitenden Rädern sämmtlich einander gleich, während es sonst nicht zwei andere sich berührende Kreise in den Rädern giebt, in denen die Zahnabstände bei dem einen Rade so groß sein können wie bei dem anderen. Es hängt dies offenbar mit dem früher über die Axoide Gesagten zusammen, wonach lediglich in diesen, also in den Theilkreiscylindern die Geschwindigkeit beider Räder gleich groß ist. Wenn auch die Theilkreise bei ausgeführten Rädern nicht als materielle Ausführungen ins Auge fallen, so sind sie doch für den ganzen Bewegungszustand von durchgreifender Bedeutung, und keineswegs als etwas Willkürliches zu betrachten.

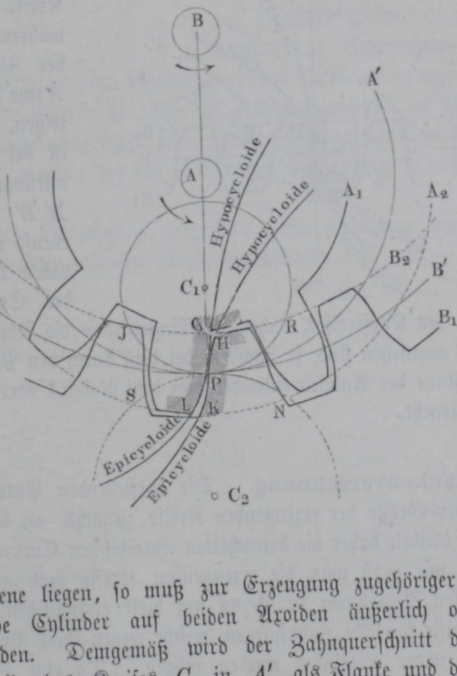
Der erzeugende Kreis C_1 ist nach dem Obigen die Eingrifflinie oder der geometrische Ort für den Berührungspunkt zweier Zahnquerschnitte und man erhält daher in dem Durchschnittspunkte J dieses Kreises mit dem Kopfkreise B_2 des Rades B den Anfangspunkt, in welchem zuerst eine Zahnkrone von B von einer Zahnflanke des Rades A ergriffen wird. Nachdem dann die Räder sich soweit gedreht haben, daß die beiden Zahncurven sich in der Centrale, also in P berühren, hört bei weiterer Bewegung die Einwirkung dieser Zähne noch nicht auf, wie es in dem Falle der Figur 237 der Fall war, wo die Zähne von A nur Füße, die von B nur Köpfe hatten, sondern es wird jetzt die Zahnkrone PL von A noch weiter auf die Zahnflanke PK von B einwirken, und letzteres Rad dadurch so lange weitergedreht werden, bis der Zahn von A den Zahn von B in N verläßt. Dieser Punkt N wird in dem Durchschnitte des zweiten erzeugenden Kreises C_2 mit dem Kopfkreise A_2 des Rades A gefunden, denn es leuchtet ein, daß für diese letztgedachte Wirkung von PL auf PK der erzeugende Kreis C_2 die Eingrifflinie ist. Durch die hier gewählte Construction, wonach man den Zähnen jedes Rades sowohl Köpfe als Füße giebt, erreicht man daher eine Wirkung des treibenden Zahns auf den getriebenen, sowohl **vor** als **hinter** der Centrale, indem der Berührungspunkt in dem vorliegenden Falle, wo A treibt, von J durch P nach N wandert, während unter der Voraussetzung entgegengesetzter Drehungen und wenn von B der Antrieb auf A erfolgt, dieser Berührungspunkt den entgegengesetzten Weg auf den Erzeugungskreisen also von N durch P nach J verfolgt. Es ist auch klar, daß, wenn der Antrieb bei dieser entgegengesetzten Bewegung von A ausgeht, wegen der symmetrischen Gestaltung der Zähne der Berührungspunkt der Zahncurven von R aus auf dem Kreise C_1 nach P und von da weiter auf dem Kreise C_2 nach S wandert, während der Weg des Berührungspunktes der entgegengesetzte SPR ist, sobald das Rad B in der Richtung des eingezeichneten Pfeils auf das Rad A treibend wirkt. Wenn daher in einer beliebigen Stellung der Zähne deren Querschnitte sich in irgend einem Punkte dieser Doppelbögen JPN beziehungsweise RPS berühren, so findet man die augenblickliche Richtung des Druckes zwischen den Zähnen nothwendig in der von diesem Punkte aus nach dem Berührungspunkte P der Theilkreise gezogenen Geraden.

Man erkennt hieraus, daß, während diese Druckrichtung nur in einem einzigen Augenblicke, nämlich bei der Berührung in der Centrale zu dieser normal steht, dieselbe im Allgemeinen bis zu den Richtungen JP und PN resp. RP und PS von der normalen Richtung TP abweicht. Diese Abweichungen sind offenbar um so größer, je weiter die Punkte J, N, S und R von P abgelegen sind, oder je weiter die Zahnkronen über die Theilkreise hinwegragen. Man erkennt daher, daß es jedenfalls vortheilhafter ist, die hier angegebene Construction zu wählen, wonach jedes Rad sowohl Zahnköpfe als Zahnfüße erhält, als wenn man nach Fig. 237 dem einen Rade nur Kronen, dem anderen nur Wurzeln geben wollte, da in diesem letzteren Falle die Abweichung der Druckrichtung von der Normale TP größer ausfällt. Die Abweichung bringt nämlich schädliche Reibungen der Axen hervor und wächst mit ihr, wie aus dem Späteren hervorgehen wird, auch die Friction zwischen den Zähnen.

Man ersieht aus den vorstehenden Bemerkungen auch ohne Weiteres, daß die Einwirkung der Zähne zweier Räder stets in der Weise erfolgt, daß ein Zahnkopf mit einem Zahnfuße zusammenarbeitet und daß niemals Köpfe mit Köpfen, oder Wurzeln mit Wurzeln in gegenseitiger Einwirkung stehen können, wenn der Bedingung der gleichmäßigen Bewegungsübertragung Genüge geschehen soll.

Die Abweichungen der Zahnformen bei Voraussetzung eines inneren Radeingriffes, Fig. 239, von den bei äußerem Eingriffe gefundenen ergeben sich nach der in §. 67 darüber gemachten Bemerkung ganz von selbst. Da hier die Axen der beiden Räder auf derselben Seite der gemeinsamen

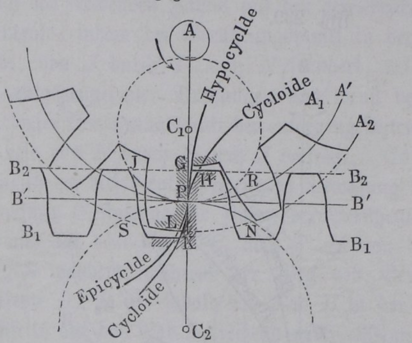
Fig. 239.



Berührungsebene liegen, so muß zur Erzeugung zugehöriger Zahnflächen der erzeugende Cylinder auf beiden Axoiden äußerlich oder innerlich abgewälzt werden. Demgemäß wird der Zahnquerschnitt des Rades A die Hypocycloide des Kreises C_1 in A' als Flanke und die Epicycloide des Kreises C_2 auf A' als Krone erhalten, wie im vorigen Falle, doch wird der Zahn für das Rad B im Querschnitte die Hypocyloide von C_1 in B' für die Krone und die Epicycloide von C_2 auf B' für die Flanke bekommen. Wieder ist der Doppelbogen JPN auf den erzeugenden Kreisen C_1 und C_2 der geometrische Ort für den Berührungspunkt der Zahncurven, welcher in der Richtung von J über P nach N vorrückt, wenn bei der durch die Pfeile angedeuteten Drehungsrichtung der Antrieb von A ausgeht. Ist bei derselben Drehungsrichtung das größere Rad B das treibende, so findet die Berührung zweier Zahnquerschnitte in der Eingrifflinie SPR statt.

Zwischen den beiden Fällen des äußeren und inneren Zahneingriffs bildet derjenige gewissermaßen einen Uebergang, bei welchem das eine Rad einen unendlich großen Halbmesser annimmt und dadurch in eine gerade Zahnstange übergeht. Auch hierfür ergeben sich die für die Zahnquerschnitte zu wählenden Curven ganz von selbst aus dem allgemeinen Gesetze, und es gehen hier die Begrenzungslinien PH und PK, Fig. 240, für die Köpfe und Füße der Zahnstange in die gemeinen Cycloiden der Kreise C_1 und C_2 über, während die Zahncurven der Zähne des Rades A eine Abweichung nicht zeigen. Als Theilkreis ist bei der Zahnstange offenbar die Gerade $B' B'$ anzusehen, und ebenso vertreten die Geraden $B_1 B_1$ und $B_2 B_2$ die Stelle des Fußkreises und des Kopfkreises, daher als Eingrifflinie die Doppelbogen JPN resp. SPR anzusehen sind, je nachdem bei dem durch den Pfeil angedeuteten Bewegungssinne der Antrieb entweder von dem Rade A oder von der Zahnstange B ausgeht.

Fig. 240.



§. 71. **Geradflankenverzahnung.** Die vorstehenden Entwickelungen sind hinsichtlich der Größe der erzeugenden Kreise zunächst an keine Bedingung geknüpft, es bleiben daher die betrachteten cycloidischen Curven richtige Zahnquerschnitte, wie groß man die erzeugenden Kreise auch annehmen möge. Unter gewissen Annahmen in Bezug auf diese erzeugenden Kreise ergeben sich nun gewisse specielle Zahnformen, welche wegen ihrer Bedeutung für die Praxis hier näher angeführt werden mögen. Da eine Hypocycloide bekanntlich in eine gerade Linie und zwar in einen Durchmesser des Grundkreises übergeht, sobald der Durchmesser des wälzenden Kreises halb so groß ist als derjenige des Grundkreises, so ist hierdurch ein Mittel geboten, richtige Zahnformen mit einer theilweise ebenen Begrenzung zu bilden.

Nimmt man nämlich den Halbmesser AP, Fig. 241, des Theilkreises von A zum Durchmesser des erzeugenden Kreises, so erhält die Flanke des