Legt man durch den Punkt P, in welchem die Berührung zweier Zähne in der Centrale geschieht, die zwei sich in P berührenden Kreise A' und B' concentrisch zu den Axen, so ergiebt sich aus dem Vorstehenden, daß die Umfangsgeschwindigkeiten beider Räder in diesen Kreisen, aber auch nur in ihnen von gleicher Größe sind, wie dies bei zwei Frictionsrädern von diesen Halbmessern auch der Fall ist. In einem Kreise A_1 des Rades A, welcher einen größeren Halbmesser als a hat, wird offenbar die Umfangsgeschwindigkeit größer sein als in demjenigen zu B concentrischen Kreise, welcher ihn berührt, da dessen Halbmesser kleiner ist als b, und ebenso muß in dem Kreise A_2, dessen Halbmesser kleiner als a ist, eine geringere Umfangsgeschwindigkeit vorhanden sein, als in dem ihn berührenden Kreise des Rades B. Während daher die beiden durch P gelegten Kreise A' und B' wegen der gleichen Geschwindigkeit einfach auf einander rollen, oder sich ohne Gleitung abwälzen, so findet zwischen je zwei anderen in Berührung kommenden Kreisen wegen der verschiedenen Geschwindigkeiten offenbar ein Gleiten statt, dessen Betrag um so größer sein muß, je größer die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten, d. h. je größer der Abstand dieser Kreise von den durch P gelegten ist. Hieraus ergiebt sich nun weiter, daß auch die Entfernung zweier aufeinanderfolgenden Zähne, auf den durch den Punkt P gelegten Kreisumfängen gemessen (d. h. die Bogenlänge), bei beiden Rädern gleich groß sein muß, während die Entfernung zweier Zähne selbstverständlich in allen anderen mit einander in Berührung kommenden Kreisen bei beiden Rädern von verschiedener Größe ist. Die Entfernung zweier Zähne von Mitte zu Mitte, oder überhaupt zwischen zwei gleichgelegenen Flächen, auf jenen durch P gelegten Kreisen gleicher Geschwindigkeit als Bogenlänge gemessen, nennt man die Zahntheilung oder schlechtweg Theilung, und daher führen diese mehrgedachten Kreise gleicher Geschwindigkeit, auf welchen man diese Theilung bei der Construction abzutragen pflegt, allgemein den Namen Theilkreise. Wie aus dem Vorstehenden hervorgeht, erscheinen diese Kreise bei den ausgeführten Rädern nicht als materielle Bildungen, sondern es sind ideale Kreise, welche zwischen den Kopfkreisen A_1 resp. B_1 und den Fußkreisen A_2 resp. B_2 der Räder so gelegen sind, daß das Verhältniß ihrer Halbmesser mit dem umgekehrten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten übereinkommt. Man hat offenbar nach dem in §§. 40 und 41 Gesagten die Theilkreise der Räder als die Polbahnen zu betrachten, welche dem relativen Bewegungszustande der beiden Räder entsprechen, und es ist in dem Berührungspunkte P der Pol, oder in der Geraden, welche durch P parallel zu den Axen gedacht werden kann, die Momentanaxe zu erkennen.

Bildungsgesetz für die Zahnflächen der Stirnräder. §. 67.
Unter Berücksichtigung des in der Einleitung §. 26 über Axoide

Gesagten ist es leicht, die Bedingungen allgemein zu entwickeln, denen die Begrenzungsflächen der Zähne von Stirnrädern genügen müssen. Bezeichnen wieder α und β die Winkelgeschwindigkeiten der parallelen Axen A und B,

Fig. 233.

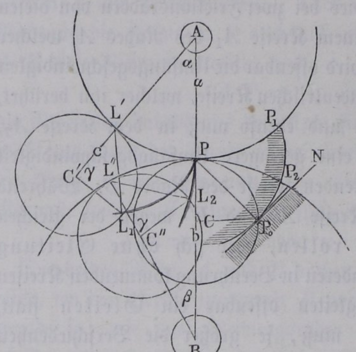


Fig. 233, und nimmt man auf der Centrale AB den Punkt P so an, daß seine Abstände PA oder a und PB oder b sich umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten verhalten, daß also $a\alpha = b\beta$ ist, so stellen nach dem Früheren die beiden durch P gehenden, zu den Axen A und B concentrischen Cylinderflächen die Axoide der relativen Bewegung zwischen A und B vor. Man kann sich insbesondere diese Bewegung so vorstellen, als ob die Axe A mit ihrem Cylinder AP vollständig festgehalten werde, und auf diesem Cylinder als Momentanaxenfläche die andere Axe B mit ihrem Axoide oder Cylinder BP herumgewälzt werde, und zwar mit einer Geschwindigkeit $\alpha + \beta$, wie dies in der Einleitung, §. 27, mehrfach auch angenommen wurde. Wären die beiden Räder als glatte, Frictionsräder ausgeführt, so würde in der That eine solche directe Rollung auch eintreten, da die Umflächen der Frictionsräder nichts anderes sind, als die körperlich dargestellten Momentanaxenflächen. Bei den Zahnrädern sind diese zu den Theilkreisen gehörigen Cylinder AP und BP aber körperlich gar nicht vorhanden, und die beiden Räder berühren sich daher auch nicht in P, sondern irgendwo anders in P_0, nämlich in der Berührungslinie zweier aufeinander wirkenden Zähne. Diese Zähne sind ebenfalls als Cylinderflächen parallel den Axen A und B zu denken, deren normale Durchschnitte durch die ebenen Curven $P_0 P_1$ und $P_0 P_2$ gegeben sind, welche in dem Punkte P_0 sich berühren, daher dort eine gemeinsame Tangente NP_0 haben. Die Berührung der Zahnflächen geschieht daher in einer geraden Linie L, welche parallel den Axen A und B ist und in P_0 senkrecht zur Ebene der Zeichnung, d. h. der Ebene der Curven $P_0 P_1$ und $P_0 P_2$ steht. Denkt man sich nunmehr wieder das Rad A festgehalten, und das Rad B um A herumgewälzt, so kann die Bewegung jetzt nicht mehr um die Momentanaxe in P stattfinden, sondern um die in P_0 befindliche Berührungslinie L, da diese Linie dem Rade B jetzt als Stützlinie dient. Man ersieht aus dieser Betrachtung, daß die augenblickliche Bewegung der Zahnräder in Wirklichkeit eine kleine Drehung um die Axe in P_0 ist, während die Bedingung der zu erfüllenden Aufgabe eine kleine Drehung um die Momentanaxe in P vorschreibt. Diese beiden Axen in P und P_0 sind unter sich parallel, und da zwei gleichgroße und gleichgerichtete Drehungen um parallele Axen sich nach Einleitung, §. 4, durch eine Verschiebung senkrecht zur Ebene der Axen in dem daselbst angegebenen Betrage unterscheiden, so zieht man daraus den Schluß, daß die in Wirklichkeit hier stattfindende Drehung um die Axe in P_0 die durch die Aufgabe vorgeschriebene momentane Drehung um die Axe P nur dann ersetzen kann, wenn die Zahnflächen gleichzeitig eine Verschiebung des bewegten Systems in der zur Ebene der Axen P und P_0 senkrechten Richtung gestatten. Zwei cylindrische sich in einer Geraden L berührende Flächen gestatten aber offenbar nur eine Verschiebung in ihrer Berührungsebene, und deshalb muß die gemeinschaftliche Berührungsebene der Zahnflächen in P_0, welche sich in $P_0 N$ projicirt, senkrecht zur Ebene der Axen P und P_0 sein. Es muß mit anderen Worten die Normalebene zu den Zahnflächen in deren Berührungslinie durch die Momentanaxe in P gehen, wo auch die Berührung zweier Zähne stattfinden möge, denn was hier von der ganz beliebigen Lage des Berührungspunktes P_0 nachgewiesen ist, gilt ganz allgemein von jeder anderen Lage desselben resp. der in ihm sich projicirenden Berührungslinie L.

Nachdem im Obigen die Grundbedingung entwickelt ist, denen die Zahnflächen genügen müssen, läßt sich nun ein allgemeines Bildungsgesetz für die Entstehung richtiger Zahnflächen geben, dessen Anwendung ohne Weiteres auf die verschiedenen in der Praxis gebräuchlichen richtigen Zahnformen führt.

Zur Entwickelung dieses Gesetzes denke man sich zunächst zu den beiden cylindrischen Axoiden $A P$ und $B P$ ein drittes, gleichfalls cylindrisches und mit jenen paralleles Axoid CP, dessen Basis CP vorläufig ebenfalls kreisförmig angenommen werden möge, obwohl, wie sich später zeigen wird, für eine andere nicht kreisförmige Basis dieses Cylinders das Gesetz seine Gültigkeit behält.

Dieses Hülfsaxoid CP vom Halbmesser c sei in solcher Lage gedacht, daß eine Seite L desselben in die Momentanaxe P hineinfällt, so berührt also das Hülfsaxoid C die beiden Hauptaxoide A und B in dieser Linie L oder P, und zwar das eine A von außen, das andere B von innen, wenn, wie in der Figur angenommen, die beiden Räder A und B im äußeren Eingriffe stehen, d. h. auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Berührungsebene liegen. Sollten diese Räder A und B in innerem Eingriffe stehen, so berührt C die beiden Axoide A und B gleichzeitig innerlich oder äußerlich, d. h. dieselben liegen auf derselben Seite der gemeinsamen Berührungsebene. Denkt man sich nun das Hülfsaxoid C auf dem Cylinder A äußerlich ohne Gleitung um einen Bogen PL' herumgewälzt, so gelangt die Berührungslinie L aus ihrer Lage in P nach einer anderen in L_1, welche dadurch bestimmt ist, daß die Bogenlängen PL' und $L_1 L'$ gleich groß sind. Die Linie L erzeugt bei dieser Bewegung eine der Axe A parallele Cylinderfläche, deren rechtwinkelige Basis durch die Epicycloide PL_1 dargestellt ist. In derselben Weise erhält man durch Abwälzen des Cylinders C auf der inneren Fläche von B durch die Bewegung der Geraden L eine mit B parallele Cylinderfläche, deren Basis die Hypocycloide PL_2 ist.

Es ist nun leicht zu ersehen, daß diese beiden cylindrischen Flächen PL_1 und PL_2, als Begrenzungen zweier Zähne der Räder A und B benutzt, der oben entwickelten allgemeinen Bedingung eines richtigen Zahneingriffes genügen. Um dies zu erkennen, fasse man eine Lage C' des Cylinders C ins Auge, bei welcher derselbe um den Winkel $\alpha = PAL'$ um das Axoid A gewälzt wurde, so ist nach dem Früheren diese Wälzung des Cylinders C gleichbedeutend mit zwei Drehungen, einer um A im Betrage α und einer anderen um C im Betrage $\gamma = \frac{a\alpha}{c}$. Dieser Winkel γ ist in der Figur durch $L' C' L_1$ dargestellt, und man erkennt auch aus der Figur, daß die durch $L' L_1$ parallel zu den Axen gelegte Ebene auf der Fläche PL_1 in L_1 normal steht, denn das Element dieser Fläche in L_1 kann als ein schmales Element eines Kreiscylinders angesehen werden, dessen Axe in L' gelegen ist. Denkt man nun dem betrachteten Systeme, d. h. sowohl dem Cylinder A wie auch demjenigen C eine Drehung um die Axe A im Betrage $-\alpha$ ertheilt, so gelangt der Cylinder C' aus dieser Lage in seine ursprüngliche Lage C zurück, die Berührungslinie L' tritt hierdurch in die Momentanaxe P, und die ganze Bewegung des Cylinders C reducirt sich auf eine Drehung desselben um seine eigene Axe im Betrage $\gamma = \frac{a\alpha}{c}$. Die Gerade L_1 fällt dabei nach P_0, wenn $PCP_0 = \gamma$ ist, und die Fläche PL_1 wird, wenn man dieselbe bei der Rückdrehung des Systems als mit A fest verbunden annimmt, jetzt die Lage $P_0 P_1$ annehmen, so daß die durch PP_0 zu den Axen parallel gedachte Ebene wieder in P_0 auf der Fläche $P_0 P_1$ normal steht.

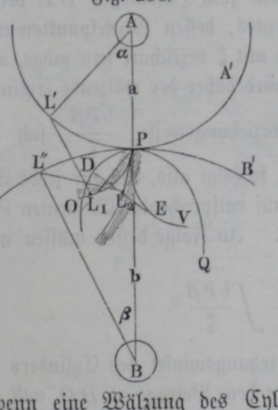
In derselben Weise erkennt man, daß eine Wälzung des Cylinders C im Innern der Cylinderfläche B von C nach C'' um einen Winkel $-\beta = PBL''$ offenbar einer zweifachen Drehung des Cylinders entspricht, und zwar einer solchen $-\beta$ um B und einer anderen um die eigene Axe im Betrage $\gamma' = +\frac{b\beta}{c}$. Dieser Winkel γ' ist in der Figur durch $L'' C'' L_2$ gegeben und offenbar steht die durch $L'' L_2$ parallel zu den Axen gelegte Ebene in L_2 normal auf der Fläche PL_2. Dreht man auch jetzt den Cylinder B sammt der Fläche PL_2 und dem Cylinder C um die Axe B im Betrage $+\beta$ zurück, so gelangt C aus der Lage C'' ebenfalls in die Ausgangsaxe C zurück, und die ganze Bewegung von C läuft auf eine Drehung $\gamma' = \frac{b\beta}{c}$ hinaus. Da nun die für die Axen A und B verlangte Bewegung an die Bedingung $a\alpha = b\beta$ geknüpft ist, so folgt hieraus ohne Weiteres, daß $\gamma = \gamma'$ ist, d. h. daß in beiden hier betrachteten Fällen das Hülfsaxoid C sich um einen und denselben Winkel

$$\gamma = \frac{a\alpha}{c} = \frac{b\beta}{c}$$

und in demselben Sinne gedreht haben muß. Daraus folgt, daß die beiden Lagen L_1 und L_2 der erzeugenden Geraden L nachher in derselben Linie P_0 zusammenfallen, und daß die durch diese Linie und die Momentanaxe P gelegte Ebene normal auf den beiden Begrenzungsflächen $P_0 P_1$ und $P_0 P_2$ steht. Die letzteren müssen sich daher in der Geraden P_0 berühren und irgend ein von der einen Zahnfläche auf die andere ausgeübter Druck geht durch die Momentanaxe P, und ist senkrecht zu dieser gerichtet. Hierdurch ist offenbar der allgemeinen Bedingung genügt, welche nach dem Vorhergehenden an richtige Zahnflächen gestellt werden muß.

Die hier gefundene Eigenschaft der durch die Abwälzung des Cylinders C auf den Momentanaxenflächen der Räder erzeugten Flächen ist übrigens durchaus nicht daran geknüpft, daß der wälzende Cylinder C eine kreisförmige Basis habe, vielmehr bleibt die vorhergehende Untersuchung noch dieselbe, welche beliebige Curve man dem wälzenden Cylinder C auch zur Basis geben möge, vorausgesetzt nur, daß die Seiten dieses Cylinders den Axen parallel sind. Denn denkt man sich die beliebige Curve OPQ, Fig. 234, als Basis des auf beiden Axoiden A und B abzuwälzenden Cylinders, so erzeugt die Berührungslinie P wieder zwei Cylinderflächen, deren rechtwinkelige Durchschnitte durch die Curven PL_1 und PL_2 dargestellt sind. Es tritt nämlich die Berührungslinie L von P nach L_1, wenn eine Wälzung des Cylinders C um die Axe A im Betrage $PAL' = \alpha$ stattgefunden hat, wobei ein Punkt O auf der Curve OPQ nach L' gelangt, für welchen die Länge des Bogens PO gleich derjenigen von PL' ist.

Fig. 234.



Ebenso kommt bei der inneren Wälzung auf dem Axoid B derselbe Punkt O nach einem Punkte L'', so daß

$$arc\ PO = arc\ PL''$$

ist, und die Berührungslinie L gelangt dadurch aus der Lage in P nach derjenigen L_2. Offenbar steht auch hier die den Axen parallele Ebene durch $L'L_1$ normal auf der Fläche PL_1 in L_1 und die den Axen parallele Ebene durch $L''L_2$ normal auf der Fläche PL_2 in L_2. Es ist aber auch leicht ersichtlich, daß bei einer Zurückdrehung des Systems A und C um A im Betrage $L'AP = -\alpha$, und des Systems B und C um B im Betrage $L''BP = \beta = \frac{a\alpha}{b}$ der wälzende Cylinder in beiden Fällen in dieselbe Lage kommt, d. h. daß die durch L_1 und L_2 gehenden Seiten der beiden erzeugten Flächen PL_1 und PL_2 in einer und derselben Geraden P_0 zur Berührung kommen müssen, sowie daß die gemeinsame Normalebene der Flächen in dieser Berührungslinie durch die Momentanaxe P geht. Zu dem Ende hat man nur zu zeigen, daß in jedem der beiden betrachteten Fälle das Resultat der Wälzung auf A resp. B und der darauf folgenden Rückdrehung um A resp. B eine Drehung des wälzenden Cylinders OPQ in demselben Winkelbetrage ist. Dies ergiebt sich leicht aus folgender Betrachtung. Denkt man sich für alle Punkte der Curve OPQ die Normalen, so hüllen dieselben bekanntlich eine Curve PEV ein, welche die Evolute von OPQ ist, und auf welcher die Krümmungsmittelpunkte der letzteren gelegen sind. Man kann daher irgend ein Element, z. B. D der Fläche OPQ, als ein unendlich schmales Cylindersegment zur Axe E und zum Halbmesser DE betrachten. Bei der Wälzung eines solchen Elementes, dessen Mittelpunktswinkel $\partial\gamma$ heißen und dessen Halbmesser allgemein mit ζ bezeichnet sein möge, auf dem Elemente $\partial\alpha$ von A oder $\partial\beta$ von B wird daher der wälzende Cylinder um seine eigene Axe E im Betrage $\frac{a\,\partial\alpha}{\zeta}$ beziehungsweise $\frac{b\,\partial\beta}{\zeta}$ sich drehen. Da diese beiden Werthe gleich groß sind, so folgt also, daß für jedes Element des Cylinders OPQ bei der Wälzung auf entsprechenden Elementen $\partial\alpha$ und $\partial\beta$ die Eigendrehungen gleich groß sind. In Folge dessen müssen auch die Summen

$$\int\frac{a\,\partial\alpha}{\zeta} \text{ und } \int\frac{b\,\partial\beta}{\zeta}$$

gleich groß sein, die den gesammten Drehungswinkel des Cylinders OPQ angeben, welcher aus einer Abwälzung in dem Betrage PDO und darauf folgender Rückdrehung um A resp. B resultirt.

Hiernach läßt sich das für die Verzahnung der Stirnräder geltende Grundgesetz wie folgt ausdrücken:

Man erhält immer zwei zugehörige richtige, d. h. dem verlangten Bewegungszustande entsprechende Zahnflächen in denjenigen

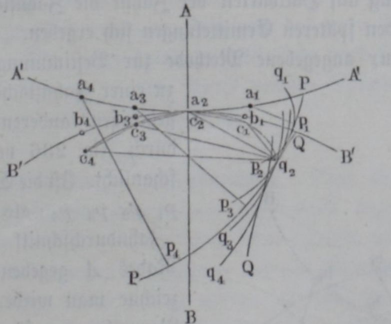
Cylinderflächen, welche eine Seite eines den Axen parallelen Cylinders C von ganz beliebiger Basis erzeugt, sobald dieser Cylinder auf den Momentanaxenflächen A und B der Räder ohne Gleitung abgewälzt wird. Eine noch weitergehende Verallgemeinerung dieses Zahnflächenbildungsgesetzes wird sich im Folgenden ergeben.

Es bedarf kaum der Bemerkung, daß, während bei äußerem Eingriffe der Räder der gedachte Cylinder C auf dem einen Axoide A äußerlich, auf dem anderen B innerlich oder umgekehrt, abgewälzt werden muß, bei innerlichem Radeingriffe die Wälzung auf den Axoiden entweder beide Male äußerlich, oder beide Male innerlich, vorzunehmen ist, so daß die durch die Abwälzung erzeugten Curven jedenfalls auf einer und derselben Seite der gemeinschaftlichen Berührungslinie der Theilkreise liegen.

Allgemeine Zahnform. Das im vorhergehenden Paragraph entwickelte allgemeine Bildungsgesetz für die Zahnflächen der Stirnräder führt nun ohne Weiteres unter Annahme besonderer Voraussetzungen zu den verschiedenen Zahnformen, welche man in der Praxis zur Verwendung bringt. §. 68.

Man kann zunächst bemerken, daß man die Zahnform des einen Rades A immer ganz beliebig annehmen darf, da es theoretisch stets möglich ist, die dieser willkürlichen Form zugehörige Zahnform des anderen Rades zu finden. Ist nämlich PP, Fig. 235, eine mit der Axe A verbundene dieser parallele cylindrische Zahnfläche, so läßt sich immer ein Cylinder $c_1, c_2, c_3, c_4 \ldots$ angeben, durch dessen Wälzung auf $a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots$ die Zahnfläche PP entstanden gedacht werden kann. Zieht man nämlich zu den beliebigen Punkten $p_1, p_2, p_3, p_4 \ldots$ des Zahndurchschnitts PP die Normalen bis zu ihren Durchschnitten $a_1, a_2, a_3 \ldots$ mit dem Cylinder A, und construirt das Dreieck: $c_2\, p_2\, c_1$ aus

Fig. 235.



$$c_2\, p_2 = a_2\, p_2;\; c_1\, p_2 = a_1\, p_1;\; c_2\, c_1 = a_2\, a_1,$$

macht ferner

$$c_2\, c_3 = a_2\, a_3 \quad \text{und} \quad c_3\, p_2 = a_3\, p_3,$$
$$c_3\, c_4 = a_3\, a_4 \quad \text{und} \quad c_4\, p_2 = a_4\, p_4 \text{ u. s. f.},$$

sowie

$$c_2\, c_1 = a_2\, a_1 \quad \text{und} \quad c_1\, p_2 = a_1\, p_1 \text{ u. s. f.},$$