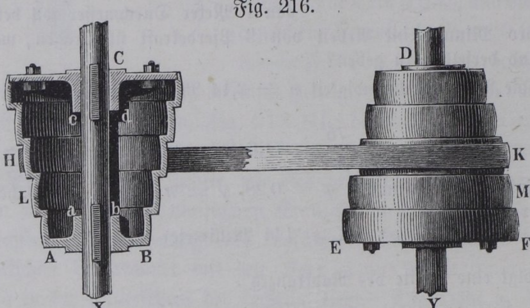
§. 63. **Stufenscheiben.** In vielen Fällen der Praxis ist man genöthigt, den Betrieb der Welle einer Arbeitsmaschine je nach Bedürfniß bald schneller bald langsamer von einer mit gleichbleibender Geschwindigkeit rotirenden Transmissionswelle abzuleiten. Dies ist z. B. bei den Drehbänken und Bohrmaschinen immer der Fall, weil man daselbst dem schneidenden Werkzeuge eine dem Materiale erfahrungsmäßig vortheilhaft zukommende constante Geschwindigkeit gegen das Arbeitsstück ertheilen muß, zu welchem Behufe natürlich die Anzahl der Umdrehungen im umgekehrten Verhältnisse mit den Durchmessern verschiedener Arbeitsstücke stehen muß. Man bedient sich für diesen Fall der sogenannten **Stufenscheiben**, welche wie ABC und DEF, Fig. 216, im Wesentlichen aus einer Reihe auf derselben Welle über

Fig. 216.



oder neben einander sitzender Räder bestehen. Gewöhnlich gießt man diese Räder mit dem Teller AB sammt der Nabe ab aus dem Ganzen und läßt entweder bei kleineren Scheiben diese Nabe weit in den Innenraum der Stufenscheibe vorspringen, oder man unterstützt bei größeren Abmessungen der Scheibe die letztere, wie in der Figur, noch durch einen besonderen aufgeschraubten Teller C, der mit einer zweiten Nabe cd versehen ist. Man sieht leicht ein, daß die Getriebwelle DY bei derselben Geschwindigkeit der Treibwelle CX eine kleinere Umdrehungszahl annimmt, wenn man den Riemen aus der Lage HK in die Lage LM bringt, und daß diese Zahl noch kleiner ausfällt, wenn man ihn auf das noch kleinere Treibrad AB und das noch größere Getriebrad EF legt.

Um bei jedem Wechsel der Scheiben die Riemenlänge nicht oder nur wenig verändern zu müssen, hat man die Scheibendurchmesser nach einem gewissen Gesetze zu bestimmen. Sind die Riemen gekreuzt, wie Fig. 217, so hat man nach §. 54 für den mit Riemen bedeckten Bogen γ:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = -\frac{a_1 + b_1}{d},$$

und die Länge des Riemens:

$$l = 2\,d \sin \frac{\gamma}{2} + \gamma\,(a_1 + b_1);$$

Fig. 217.

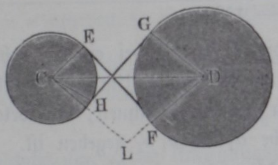
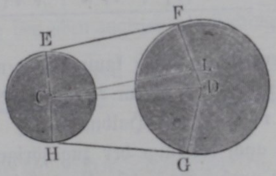


Fig. 218.



unter a_1 und b_1 die Scheibenhalbmesser verstanden. Läßt man daher a_1 um ebenso viel abnehmen als b_1 zunimmt, so daß also

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \ldots$$

für alle zusammenarbeitenden Scheiben eine und dieselbe Größe ist, so ändern sich weder die umspannten Bogen noch die erforderliche Riemenlänge, und es ist daher bei dem Verlegen des Riemens über ein anderes Scheibenpaar eine Veränderung der Riemenlänge nicht nöthig.

Bei dem offenen Riemen, Fig. 218, hat man dagegen

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \pm \frac{b_1 - a_1}{d}$$

und die Riemenlänge

$$l = 2\,d\,\sin \frac{\gamma}{2} + \gamma a_1 + (2\pi - \gamma)\,b_1.$$

Setzt man hierin näherungsweise

$$\sin \frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{1}{2}\left(\cos \frac{\gamma}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b_1 - a_1}{d}\right)^2$$

und

$$\gamma = \pi - (\pi - \gamma) = \pi - 2 \sin \frac{\pi - \gamma}{2} = \pi - 2 \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$= \pi - 2\,\frac{b_1 - a_1}{d},$$

so erhält man die Riemenlänge

$$l = 2\,d - \frac{(b_1 - a_1)^2}{d} + \left(\pi - 2\,\frac{b_1 - a_1}{d}\right) a_1 + \left(\pi + 2\,\frac{b_1 - a_1}{d}\right) b_1$$

$$= 2\,d + \pi\,(a_1 + b_1) + \frac{(a_1 - b_1)^2}{d}.$$

Bezeichnet nun ν_1 das Umsetzungsverhältniß

$$\nu_1 = \frac{a_1}{b_1},$$

so hat man auch:

$$l = 2d + \pi(\nu_1 + 1) b_1 + \frac{(\nu_1 - 1)^2}{d} b_1^2,$$

woraus

$$b_1 = \frac{-\pi(\nu_1 + 1) d + \sqrt{4(\nu_1 - 1)^2 (l - 2d) d + \pi^2 (\nu_1 + 1)^2 d^2}}{2(\nu_1 - 1)^2}$$

sich ergiebt. Man kann daher mittelst dieser Formel bei einer gegebenen Riemenlänge l, einem Axenabstande d und einem gewissen Umsetzungsverhältnisse ν_1 leicht den Halbmesser b_1 der einen Scheibe berechnen, mit welchem dann auch derjenige der zugehörigen Scheibe $a_1 = \nu_1 b_1$ gegeben ist. Bei einem großen Axenabstande d, bei welchem die umspannten Bogen wenig von der halben Peripherie abweichen, hat man annähernd

$$l = 2d + \pi(a_1 + b_1) = 2d + \pi(\nu_1 + 1) b_1,$$

daher:

$$b_1 = \frac{l - 2d}{\pi(\nu_1 + 1)},$$

welcher Ausdruck für $\nu = 1$ den genau richtigen Werth

$$b_1 = \frac{l - 2d}{2\pi} = a_1$$

liefert.

Bei der Construction der Stufenscheiben ist in der Regel der Axenabstand gegeben, und es sind die Halbmesser der einzelnen Scheiben unter Annahme gleicher Riemenlänge derartig zu bestimmen, daß die Umsetzungsverhältnisse gewissen ebenfalls gegebenen Bedingungen entsprechen. Bei Drehbänken und Bohrmaschinen z. B. wird den gestellten Anforderungen am besten dadurch genügt, daß die einzelnen, durch die verschiedenen Scheibenpaare erreichbaren Geschwindigkeiten der Arbeitsmaschinenwelle die Glieder einer geometrischen Reihe bilden. Bezeichnet daher ν das Umsetzungsverhältniß zwischen dem ersten Scheibenpaare a_1 und b_1, so hat man die Umsetzungsverhältnisse der nächstfolgenden zu

$$\nu\varepsilon, \nu\varepsilon^2, \nu\varepsilon^3 \ldots \nu\varepsilon^{n-1}$$

anzunehmen, worin ε eine gewisse constante Zahl ist, die sich aus

$$\varepsilon = \sqrt[n-1]{\frac{V}{v}}$$

bestimmt, wenn unter V die größte und unter v die kleinste Geschwindigkeit der betriebenen Axe verstanden wird. Es ist in diesen Fällen immer möglich, die Stufenscheiben den gestellten Anforderungen gemäß zu construiren, doch werden hierbei die beiden Scheiben im Allgemeinen verschieden ausfallen, wie auch die Riemenlänge nur bei einem bestimmten Axenabstande d für alle Paare gleich sein kann. Es ist nun in der Praxis häufig erwünscht, zwei nach demselben Modelle gegossene, also congruente Stufenscheiben zusammen arbeiten zu lassen, und ist für diesen Fall etwa folgende Berechnung anzustellen. Ist die Anzahl der Scheibenpaare, wie in Fig. 216, n etwa 5, und ist das Verhältniß der größten zur kleinsten Geschwindigkeit $\frac{V}{v} = \alpha$ gegeben, so ist unter Beibehaltung der oben angegebenen Bedingung, daß die Geschwindigkeiten eine geometrische Reihe bilden sollen, der Exponent ε derselben gegeben durch

$$\varepsilon = \sqrt[4]{\alpha}.$$

Bezeichnet nun ν das Umsetzungsverhältniß des ersten Scheibenpaares, und sind a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5 die Halbmesser der Scheiben, so hat man die Umsetzungsverhältnisse der Paare

Nr. des Paares	1.	2.	3.	4.	5.
Verhältniß der Halbmesser	$\frac{a_1}{a_5}$	$\frac{a_2}{a_4}$	$\frac{a_3}{a_3}$	$\frac{a_4}{a_2}$	$\frac{a_5}{a_1}$
Umsetzungsverhältniß . . .	ν	$\nu\varepsilon$	$\nu\varepsilon^2$	$\nu\varepsilon^3$	$\nu\varepsilon^4$

Es ist weiter klar, daß das mittlere Paar wegen des übereinstimmenden Modells ein Umsetzungsverhältniß gleich Eins hat, und es folgt daher

$$\nu = \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{(\sqrt[4]{\alpha})^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

so daß die Umsetzungsverhältnisse der einzelnen Paare die geometrische Reihe bilden

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha}},\ \sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}},\ 1,\ \sqrt[4]{\alpha},\ \sqrt{\alpha}.$$

Ist nun d der Axenabstand, so kann man die mittlere Scheibe a_3 beliebig wählen, und erhält für dieselbe die genaue Riemenlänge

$$l = 2d + 2\pi a_3.$$

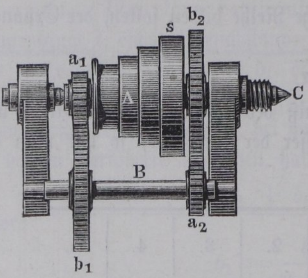
Nun lassen sich aus dieser Länge l, dem gegebenen Axenabstande d und für die Umsetzungsverhältnisse

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \text{ und } \nu\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}}$$

die Halbmesser a_1, a_2, a_4 und a_5 nach der oben entwickelten Formel ermitteln.

Sehr häufig vergrößert man die Anzahl der möglichen Umsetzungsverhältnisse, welche durch zwei Stufenscheiben gegeben sind, durch eine solche Anordnung, welche gestattet, entweder die Welle der Arbeitsmaschine direct von der einen Stufenscheibe zu betreiben oder nach Bedürfniß noch ein oder mehrere Rädervorgelege dazwischen einzuschalten. In dieser Art wendet man häufig das in Fig. 219 dargestellte doppelte Vorgelege bei Drehbänken an, indem man auf die Hülse A die getriebene Stufenscheibe setzt, welche, wie schon in §. 42 angegeben worden, entweder bei fester Verbindung mit dem Rade b_2 dasselbe und die Spindel direct mitnimmt, oder mittelst der Vorgelege $\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}$ indirect bewegt. Auf diese Weise erhält man, wenn die Anzahl der einzelnen Scheiben jeder Stufenscheibe n ist, offenbar $2n$ verschiedene Umsetzungsverhältnisse. Soll auch hier die Bedingung erfüllt sein, daß diese Verhältnisse eine geometrische Reihe mit dem Exponenten ε bilden sollen,

Fig. 219.



so ergiebt sich, unter $\alpha = \frac{V}{v}$ wieder das Verhältniß der größten zur kleinsten Geschwindigkeit der Spindel verstanden, offenbar

$$\varepsilon = \sqrt[2n-1]{\alpha},$$

und die Umsetzungsverhältnisse bilden die Reihe

$$\nu,\ \nu\varepsilon,\ \nu\varepsilon^2 \ldots \nu\varepsilon^{n-1},\ \nu\mu,\ \nu\mu\varepsilon,\ \nu\mu\varepsilon^2 \ldots \nu\mu\varepsilon^{n-1},$$

wenn unter μ das Umsetzungsverhältniß des doppelten Rädervorgeleges $\frac{a_1\ a_2}{b_1\ b_2}$ verstanden ist. Daher folgt hieraus, weil $\nu\mu = \nu\varepsilon^{n-1}\varepsilon$ sein muß, $\mu = \varepsilon^n$.

Beispiel. Bei einer Drehbank mit Vorgelege sollen zwei gleiche viergängige Stufenscheiben so angeordnet werden, daß die einzelnen Geschwindigkeiten eine geometrische Reihe bilden, deren äußerste Glieder in dem Verhältnisse 1 : 24 zu einander stehen. Welche Dimensionen sind den einzelnen Scheiben und den Rädern zu geben, wenn die kleinste Scheibe 80 Millimeter Halbmesser erhalten und der Axenabstand 2 Meter betragen soll?

Man hat hier

$$\varepsilon = \sqrt[7]{\frac{1}{24}} = 0{,}635$$

und das Umsetzungsverhältniß des zweifachen Rädervorgeleges:

$$\varepsilon^4 = 0{,}635^4 = 0{,}162.$$

Bezeichnet man die Halbmesser der Scheiben mit a_1, a_2, a_3 und a_4, so hat man

$$\frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_4}\,\varepsilon^3 = \frac{\mathfrak{a}_4}{\mathfrak{a}_1}$$

und daher:

$$\mathfrak{a}_1 = \frac{\mathfrak{a}_4}{\sqrt{\varepsilon^3}} = \frac{80}{0{,}506} = 158 \text{ Millimeter},$$

folglich die Riemenlänge annähernd

$$l = 2d + \pi\,(158 + 80) = 4000 + 747 = 4747 \text{ Millimeter}.$$

Das Umsetzungsverhältniß des ersten Scheibenpaares ist:

$$\nu = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_4} = \frac{158}{80} = 1{,}975,$$

daher das des zweiten:

$$\nu_1 = \frac{\mathfrak{a}_2}{\mathfrak{a}_3} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_4}\,\varepsilon = 1{,}975\,.\,0{,}635 = 1{,}255,$$

folglich ergiebt sich nun $\mathfrak{a}_3$ zu

$$\mathfrak{a}_3 = \frac{l - 2d}{\pi\,(\nu + 1)} = \frac{4747 - 4000}{3{,}14\,.\,2{,}255} = 105{,}5 \text{ Millimeter}$$

und

$$\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_3\,.\,\nu_1 = 105{,}5\,.\,1{,}255 = 132{,}4 \text{ Millimeter}.$$

Anmerkung. In der Praxis pflegt man die Halbmesser der Stufenscheiben meist um gleiche Größen wachsen zu lassen, so daß dieselben die Glieder einer arithmetischen Reihe bilden. Es ist leicht zu erkennen, daß in diesem Falle bei nur drei Scheiben die Geschwindigkeiten in gleichem Verhältnisse wachsen, d. h. die Glieder einer geometrischen Reihe bilden. Denn bezeichnet a den Halbmesser der kleinsten, $a + e$ den der mittleren und $a + 2e$ den der größten Scheibe, so sind die Umsetzungsverhältnisse gegeben durch:

$$\nu_1 = \frac{a}{a + 2e}; \quad \nu_2 = \frac{a + e}{a + e} = 1 \quad \text{und} \quad \nu_3 = \frac{a + 2e}{a},$$

daher

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{a}{a + 2e} = \frac{\nu_2}{\nu_3}.$$

Bei mehr als drei Scheiben findet diese Beziehung nur näherungsweise statt, und zwar um so näher, je kleiner der Zuwachs e im Verhältniß zu a ist. Man hat z. B. bei vier Scheiben die

Halbmesser	a	$a + e$	$a + 2e$	$a + 3e$
Umsetzungsverhältnisse	$\nu_1 = \frac{a}{a + 3e}$	$\nu_2 = \frac{a + e}{a + 2e}$	$\nu_3 = \frac{a + 2e}{a + e}$	$\nu_4 = \frac{a + 3e}{a}$,

daher das Verhältniß der Geschwindigkeiten:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{a}{a + 3e}\,\frac{a + 2e}{a + e} = \frac{a^2 + 2ae}{a^2 + 4ae + 3e^2}$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_3} = \frac{a + e}{a + 2e}\,\frac{a + e}{a + 2e} = \frac{a^2 + 2ae + e^2}{a^2 + 4ae + 4e^2}$$

$$\frac{\nu_3}{\nu_4} = \frac{a + 2e}{a + e}\,\frac{a}{a + 3e} = \frac{a^2 + 2ae}{a^2 + 4ae + 3e^2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}.$$

Es ist also

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\nu_3}{\nu_4}$$

und $\frac{\nu_2}{\nu_3}$ hiervon nur um eine Größe abweichend, die um so kleiner ist, je geringer e gegen a ist. In obigem Beispiele ergaben sich dem entsprechend die Halbmesser zu 80, 105,5, 132,4 und 158 Millimeter, also nur wenig abweichend von einer arithmetischen Reihe mit der Differenz $e = 26$ Millimeter.

§. 64. **Conische Trommeln.** Anstatt der Stufenscheiben wendet man öfter auch zwei conische Riementrommeln in entgegengesetzter Stellung A und B, Fig. 220, an, und bewirkt die Stellung des Riemens auf denselben durch ein gabelförmiges Führungseisen DCE, welches den Riemen an den Auflaufstellen bei D und E umfaßt. Ohne eine solche Führung würde der Riemen von selbst eine Verschiebung annehmen, wozu ihm die conische Form der Trommel das Bestreben ertheilt. Da sich der Riemen hierbei nämlich über

Fig. 220.

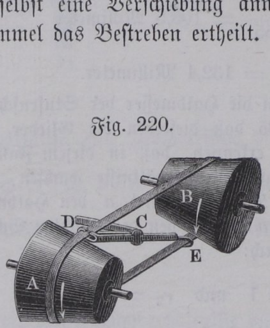
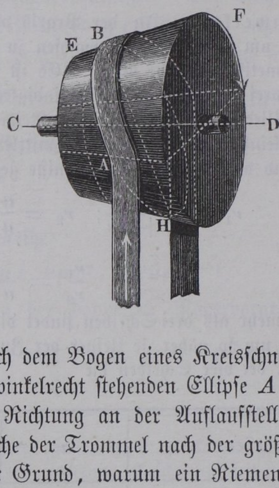


Fig. 221.



der oberen Seite EF, Fig. 221, nicht nach dem Bogen eines Kreisschnittes, sondern nach demjenigen einer auf EF winkelrecht stehenden Ellipse ABH auf die Rolle legt, so hat er wegen der Richtung an der Auflaufstelle bei A das Bestreben, von der kleineren Endfläche der Trommel nach der größeren fortzurücken. Dies ist beiläufig auch der Grund, warum ein Riemen auf einer gewölbten Riemscheibe sich immer von selbst nach deren Mitte zu führen strebt und sich dort erhält.

Mit conischen Riementrommeln erreicht man zwar den Vortheil, daß man das Umsetzungsverhältniß innerhalb gewisser Grenzen stetig um jeden beliebigen Betrag ändern kann, doch ist auf eine genaue Erreichung einer bestimmten Umsetzung nur bei schmalen Riemen oder Schnüren mit Sicherheit zu rechnen. Denkt man sich nämlich den Riemen $CDEF$, Fig. 222, die beiden Kegelmäntel A und B berührend, so ist leicht ersichtlich, daß ein bestimmtes Gleiten einzelner Riementheile auf den Trommeln stattfinden muß, da die beiden