$$b = \sqrt{0{,}1^2 + (0{,}9 \,.\, sin\, 26^0\, 34')^2} = 0{,}414 \text{ Meter}$$

und man erhält daher die mittleren Neigungswinkel der Räder φ und ψ durch

$$tang\, \varphi = \frac{\sqrt{a^2 - d_1^2}}{a}\; tang\, \delta_1 = \frac{\sqrt{0{,}898^2 - 0{,}4^2}}{0{,}898}\; tang\; 63^0\, 26' = 1{,}790$$

zu $\varphi = 60^0\, 50'$,

$$tang\, \psi = \frac{\sqrt{b^2 - d_1^2}}{b}\; tang\, \delta_2 = \frac{\sqrt{0{.}414^2 - 0{,}1^2}}{0{,}414}\; tang\, 26^0\, 34' = 0{,}485$$

zu $\psi = 25^0\, 50'$.

Wenn man die Räder als Kegel von dieser Neigung ansieht, so sind daher der innere und äußere Halbmesser des einen Rades a_1 und a_2 gegeben durch

$$a \mp {}^1\!/_2\, (1 - 0{,}8)\; cos\, \delta_1\; tang\, \varphi = 0{,}898 \mp 0{,}1 \,.\, cos\; 63^0\, 26' \,.\, tang\; 60^0\, 50'$$

zu $a_1 = 0{,}818$ und $a_2 = 0{,}978$,

sowie diejenigen des zweiten Rades durch

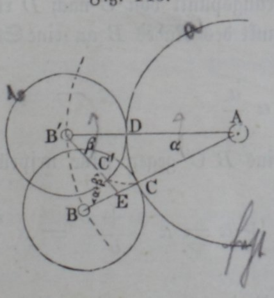
$$b \mp 0{,}1\; cos\, \delta_2\; tang\, \psi = 0{,}414 \mp 0{,}1 \,.\, cos\; 26^0\, 34' \,.\, tang\; 25^0\, 50'$$

zu $b_1 = 0{,}371$ Meter und $b_2 = 0{,}457$ Meter.

Die Abweichungen von der hyperboloidischen Form sind daher ganz unwesentlich.

Differentialräder. Bei den bisher besprochenen Räderanordnungen §. 47.
war immer die Voraussetzung gemacht worden, daß die beiden Axen durch feste Lager gehalten wurden, welche an den Drehungen nicht Theil nehmen konnten. Die Wirkung der Räder läuft in diesem Falle auf eine einfache Uebertragung der Umdrehungsbewegung von der einen Axe auf die andere hinaus. Dieser Fall kommt in der Praxis zwar am häufigsten vor, doch hat man öfter auch zu bestimmten Zwecken Veranlassung, der einen Axe entweder die Bewegung ganz zu verbieten, oder ihr doch nur eine ganz bestimmte Drehung zu gestatten, welche von der Umdrehung der anderen Axe in gewissem Sinne unabhängig ist. Diese Art der Bewegungsübertragung soll hier näher untersucht werden.

Fig. 146.



Es sei zunächst als einfachster Fall der vorausgesetzt, daß zwei parallele Axen A und B, Fig. 146 durch zwei Stirnräder a und b mit äußerer Berührung so in Verbindung gebracht sind, daß die eine Axe A sammt dem auf ihr festgekeilten Rade a absolut festgehalten werden soll, an der Drehung also gar nicht Theil nehmen kann. Man kann zu diesem Falle aus dem gewöhnlichen, in welchem beide Axen A um α und B um $\beta = -\frac{a}{b}\,\alpha$

sich drehen, kinematisch einfach dadurch gelangen, daß man dem ganzen Systeme, also jeder der beiden Wellen noch eine zusätzliche Drehung gleich $-\alpha$ um die Axe A ertheilt. In Folge hiervon wird A in Ruhe gelangen, während die Bewegung von B nunmehr aus zwei Componenten sich zusammensetzt, nämlich aus einer Drehung $\beta = -\alpha \frac{a}{b}$ um B und einer anderen Drehung $-\alpha$ um A. Diese beiden Drehungen wurden im Obigen schon zu einer resultirenden Drehung $-\alpha\left(\frac{a}{b}+1\right)$ um den Pol C zusammengesetzt, als es darauf ankam, die Polbahnen oder Axoide zu bestimmen, welche für die Räder als Grundform anzunehmen sind.

Wenn nun hier die Welle B außer ihrer Umdrehung um die eigene Axe noch einer Drehung um diejenige A ausgesetzt ist, so folgt daraus auch ohne Weiteres, daß das Lagergestell von B nun nicht mehr absolut fest sein darf, dasselbe vielmehr auf einem um A drehbaren Arme AB angebracht sein muß. Man denke sich nun diesem Arme AB mit dem Rade b bei festgehaltenem Rade a eine Drehung um die Axe A im Betrage $+\alpha$, also rechts herum ertheilt, so ergiebt sich ohne Weiteres, daß das Rad b außerdem um die eigene Axe eine Drehung in demselben Sinne, also auch rechts herum, im Betrage $+\alpha\frac{a}{b}$ erhält, und daß also die gesammte Drehung des Rades b oder die absolute Drehung desselben im Raume durch

$$\alpha\left(\frac{a}{b}+1\right) = \alpha\,\frac{a+b}{b} = \alpha\,\frac{d}{b}$$

ausgedrückt ist, wenn $d = a + b$ den Axenabstand bedeutet. Auch aus der Figur ist dies leicht zu erkennen, denn wenn bei der gedachten Drehung des Arms B um den Winkel α der Berührungspunkt von C nach D rückt, so ist der zuerst in C befindlich gewesene Punkt des Rades B an eine Stelle C' getreten, welche durch den Winkel

$$DB'C' = +\alpha\,\frac{a}{b}$$

gegeben ist, und es hat sich folglich der Radius $B'C'$ gegen seine ursprüngliche Lage BC um den Winkel

$$BEB' = DB'E + BAB' = \alpha\,\frac{a}{b} + \alpha = \alpha\,\frac{a+b}{b} = \alpha\,\frac{d}{b}$$

gedreht.

Man ersieht hieraus, daß, während eine Umdrehung des einen Rades A um den Winkel α bei feststehenden Axen eine entgegengesetzte Umdrehung des Rades b im Betrage $\alpha\frac{a}{b}$ zur Folge hat, so geht aus einer Umdrehung

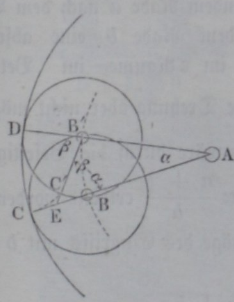
α der Axe B um die feste Axe A eine gleichgerichete Umdrehung des Rades b um seine eigene Axe im Betrage $\alpha \frac{a}{b}$ hervor. Die relative Verdrehung der Räder gegen einander aber ist in allen Fällen durch

$$\alpha \frac{a+b}{b} = \alpha \frac{d}{b}$$

gegeben. Dasselbe Verhalten zeigen natürlich die Räder mit indirecter Bewegungsübertragung durch einen gekreuzten Riemen.

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Bewegung zweier Räder a und b mit innerer Berührung, Fig. 147, untersuchen. Während hierbei eine Drehung α des einen Rades A, bei festgehaltenen Axen eine gleichgerichtete Bewegung des anderen Rades b um $\alpha \frac{a}{b}$ hervorruft, so geht aus einer Umdrehung der Axe B um die feste Axe A eine entgegengesetzte Umdrehung des Rades b um seine Axe im Betrage $\alpha \frac{a}{b}$ hervor. Die relative Bewegung beider Räder gegen einander, welche im letztgedachten mit der absoluten Bewegung von b im Raume übereinstimmt, ist bei innerer Radberührung, ebenso wie bei offenen Riemen durch

Fig. 147.



$$\alpha \frac{a-b}{b} = \alpha \frac{d}{b}$$

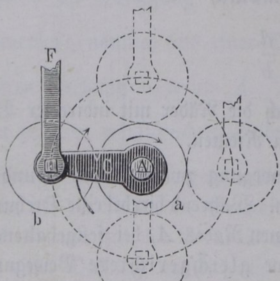
gegeben. Letzteres Resultat ergiebt sich ebenfalls aus der Figur, denn es wird offenbar die relative Bewegung von b gegen a, oder die ganze Bewegung von b durch

$$BEB' = DB'E - BAB' = \alpha \frac{a}{b} - \alpha = \alpha \frac{a-b}{b} = \alpha \frac{d}{b}$$

ausgedrückt.

Diese Bewegungsarten kommen in Wirklichkeit öfter vor, z. B. der erste mit äußerer Radberührung bei den Drehvorrichtungen der Uferkrahne, bei welchen das Rad a mit der feststehenden Krahnsäule fest verschraubt ist, während die in dem drehbaren Windengestell gelagerte Axe B mit dem Rade b bei ihrer Drehung um die Krahnsäule herumkreiselt. Hierher gehört auch das mit dem Namen des Planetenradmechanismus bezeichnete Getriebe, welches durch die Verwendung bekannt geworden ist, welche Watt von demselben bei seinen Dampfmaschinen machte. Hier trägt eine drehbare Axe A Fig. 148 ein Zahnrad a fest aufgekeilt, während eine Kurbel C lose auf A drehbar aufgesteckt ist. Diese durch eine Lenkerstange F bewegte Kurbel trägt ein zweites mit a im Eingriffe stehendes Zahnrad b, welches durch einen prismatischen Bolzen mit der Schubstange verbunden ist und daher eine Drehung um seine eigene Axe nicht annehmen kann. Denkt man nun die Kurbel durch ihre Schubstange F um einen Winkel $+ \alpha$ gedreht, so würde bei feststehendem Rade a nach dem Vorstehenden dem Rade b eine absolute Drehung im Raume im Betrage $+ \alpha \frac{a + b}{b}$ mitgetheilt werden. Da eine solche Drehung aber nicht möglich ist, man sich also zu denken hat, dem Rade b wäre durch die Befestigung eine gleich große entgegengesetzte Drehung $- \alpha \frac{a + b}{b}$ ertheilt worden, so folgt hieraus, daß das Rad a hierdurch vermöge des Eingriffs mit b eine Umdrehung

Fig. 148.



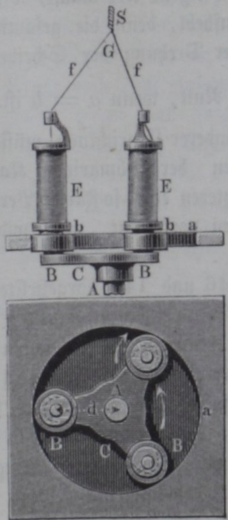
$$+ \alpha \frac{a + b}{b} \cdot \frac{b}{a} = \alpha \frac{a + b}{a}$$

annehmen muß. Wenn $a = b$ gewählt wird, so ist die Drehung der Axe A gleich 2α, also doppelt so groß wie die Drehung der Kurbel.

Auch der Fall des inneren Radeingriffs findet öfter Verwendung, unter anderem bei gewissen Maschinen zum Zwirnen baumwollener Garne zu Strängen und gleichzeitigem Zusammendrehen der gebildeten Stränge zu Schnüren. Man denke sich nämlich um einen festen Zapfen A, Fig. 149, das mittelst einer Hülse aufgesteckte dreiarmige Kreuz C gedreht, welches in seinen drei Augen die Bolzen B mit den Rädern b trägt. Diese Räder sind im inneren Eingriffe mit dem Zahnringe a und tragen oberhalb die Spulen E, welche die zusammenzuzwirnenden mehrfachen Fäden aufgewickelt enthalten. Die Fäden aller drei Spulen laufen oberhalb bei G zusammen, um durch ihre Vereinigung die Schnur S zu bilden. Durch die Drehung der Spulen um ihre eigenen Axen B werden die Fäden zu Strängen gezwirnt, während durch ihre Drehung mit dem Kreuze C um die Axe A ein Zusammendrehen der Stränge zur Schnur bewirkt wird. Bezeichnen a und b wieder die Halbmesser der Räder, so beträgt die Verdrehung einer

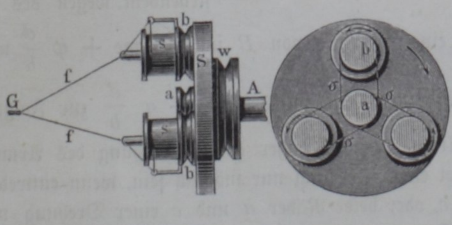
Spule, welche auf **Zwirnen** des Stranges wirkt, offenbar $+ \alpha \frac{d}{b}$, wenn das Kreuz eine Bewegung $- \alpha$ zum Zusammendrehen der Stränge vollendet. Die auf ein bestimmtes Stück der gefertigten Schnur entfallenden Schraubenwindungen der Stränge verhalten sich daher zu den Windungen der Garnfäden in jedem Strange wie $b : d$, und sind von entgegengesetzter Richtung, was bekanntlich bei allen Seilungsprocessen von Wichtigkeit ist.

Fig. 149.



Auch für die Ausführung ähnlicher Mechanismen unter Benutzung von Schnüren zur Bewegungsübertragung lassen sich Beispiele anführen. So wendet man zur Herstellung der **Goldschnüre**, welche aus einzelnen mit geplättetem Draht (Lahn) umwickelten sogenannten **Gespinnsten** zusammengedreht werden, die kleine Vorrichtung Fig. 150 an. Auf einem fest am Gestell befindlichen Stifte A wird durch den Schnurwirtel w eine Scheibe S gedreht, welche die drei Spülchen s zur Aufnahme der Gespinnstfäden trägt. Diese drei Fäden f, welche bei G zusammenlaufen, werden durch die Drehung der Scheibe S zusammengezwirnt. Wären nun die Spulen s fest auf der Scheibe angebracht, so würde bei

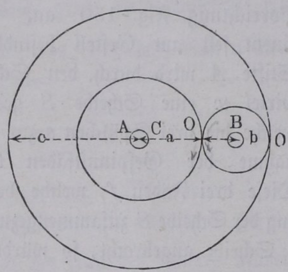
Fig. 150.



jedem Scheibenumlauf auch jeder Spulenfaden einmal in sich gedreht, was mit Rücksicht auf die metallischen Fäden hinderlich wäre. Um diese Drehung der Fäden in sich zu vermeiden, ist jede Spule mit einem Scheibchen b versehen, und auf dem festen Stifte A eine Scheibe a von gleicher Größe mit b fest angebracht, welche Scheibe an der Drehung also keinen Antheil hat. Durch die Schnüre σ ist eine Verbindung zwischen a und b vermittelt. Man erkennt ohne Weiteres, daß bei jeder Umdrehung der Scheibe S mit den Spulen s etwa im Sinne des Pfeils jede einzelne Spule in Folge der Schnur σ eine Umdrehung nach links um die eigene Axe macht, welche mit ihrer Umdrehung nach rechts um A sich aufhebt, denn die gesammte Bewegung der Spule ist nach Obigem bei einer Drehung der Scheibe S um $+\alpha$ durch $\alpha \dfrac{a-b}{b}$ gegeben, beträgt also Null, wenn $a = b$ ist. Mechanismen zu gleichem Zwecke, aber von anderer Einrichtung müssen auch bei den großen Maschinen zum Umspinnen der submarinen Kabel mit Metalldrähten angewendet werden, da die letzteren einer so starken Verdrehung in sich, wie sie beim gewöhnlichen Zwirnen vorkommt, nicht widerstehen könnten.

§. 48. Es mögen jetzt die beiden durch Fig. 146 und 147 dargestellten Fälle combinirt werden, so zwar, daß nach Fig. 151 zwei Räder a und c auf der Axe A angebracht sein sollen, welche letztere ein drehbarer Arm AB umschließt, der in B eine Axe für das Rad b trägt, welches mit a in äußeren und mit c in inneren Eingriff zu treten befähigt ist. Man erkennt dann, daß diese Anordnung überhaupt keine Bewegung zulassen würde, wenn die beiden Räder a und c mit ihrer Axe festgestellt wären, denn eine Drehung des Arms AB um irgend einen Winkel φ würde nach Vorstehendem wegen des äußeren Eingriffs mit a eine Drehung von B im Betrage $+ \varphi \dfrac{d}{b}$ und wegen des inneren Eingriffs mit c eine solche gleich $- \varphi \dfrac{d}{b}$ zur Folge haben, was widersinnig wäre. Es wird daher eine Umdrehung des Arms AB um A sowie überhaupt eine Bewegung nur möglich sein, wenn entweder das Rad a, oder das Rad c, oder beide Räder a und c einer Drehung um ihre Axen fähig sind. Es möge sogleich der letztgedachte allgemeinere Fall vorausgesetzt werden, zu welchem Behufe man sich etwa denken kann, daß das Rad c lose drehbar auf die Axe A des Rades a aufgesteckt, oder auf einer hohlen Welle C angebracht sei, welche die massive Welle A umschließt. Es möge

Fig. 151.



ferner vorausgesetzt werden, daß die Axe A mit dem Rade a eine Umdrehung α, das Rad c eine solche γ und der Arm AB eine solche β um die Axe A vollführe. Die absolute Drehung des Rades b im Raume sei mit ω bezeichnet. Es ist ganz gleichgültig, in welchem Sinne diese Drehungen geschehen, nur soll das Pluszeichen für eine bestimmte Drehung, etwa für diejenige angenommen werden, welche einem Beschauer der Figur im Sinne der Uhrzeigerbewegung erscheint, dann werden negative Ergebnisse natürlich der entgegengesetzten Richtung entsprechen.

Die Frage nach dem Zusammenhange der einzelnen Drehungen ist nun sofort gelöst, wenn man unter Berücksichtigung des oben Angegebenen die absolute Verdrehung des Rades b im Raume ausrechnet, welche aus dem Zusammenwirken von b mit a sowohl wie von b mit c sich ergiebt. Man findet in dieser Weise die absolute Verdrehung des Rades b

1. wegen der Drehung von a um α gleich $-\alpha \frac{a}{b}$,

2. wegen der Drehung des Arms um β gleich $+ \beta \frac{a+b}{b}$, zusammen also zu

$$\frac{-\alpha a + \beta a + \beta b}{b} = \omega_1;$$

ferner auch

3. wegen der Drehung von c um γ gleich $+ \gamma \frac{c}{b}$,

4. wegen der Drehung des Arms um β gleich $- \beta \frac{c-b}{b}$, also zusammen

$$\frac{\gamma c - \beta c + \beta b}{b} = \omega_2.$$

Beide Werthe ω_1 und ω_2 müssen gleich sein, folglich erhält man:

$$-\alpha a + \beta a + \beta b = \gamma c - \beta c + \beta b$$

oder

$$\alpha a + \gamma c = \beta (a + c)$$

als die für das betrachtete Getriebe ganz allgemein gültige Gleichung. Wenn man in dieser Gleichung γ der Richtung von α entgegengesetzt nimmt, so erhält man die Gleichung

$$\alpha a - \gamma c = \beta (a + c),$$

woraus man erkennt, daß die Bewegung des Arms AB proportional mit der Differenz der Bewegungen der beiden anderen Räder a und c ist. Mit Rücksicht hierauf hat man der betrachteten Anordnung den Namen Differentialvorgelege oder Differentialmechanismus, und dem Rade, als welches der Arm AB meistens ausgeführt wird, die Bezeichnung Differentialrad gegeben.

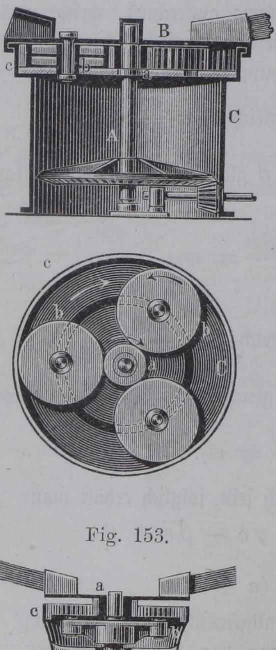
Die verschiedenen Anwendungen, welche man von dem hier angegebenen Getriebe machen kann, ergeben sich nun leicht durch bestimmte Annahmen. Setzt man z. B. $\gamma = 0$, macht also das Rad c unbeweglich, so erhält man aus obiger Grundgleichung:

$$\alpha = \beta \, \frac{a + c}{a} = \beta \left(1 + \frac{c}{a}\right).$$

Diese Gleichung entspricht dem bekannten Cylindergöpel von Barret, Exall und Andrews*), bei welchem, Fig. 152, auf dem cylindrischen Gehäuse C mit innerer Verzahnung der Deckel B mit den Rädern b direct von den Pferden herumgeführt wird. Die Räder b greifen ebensowohl in die innere Verzahnung c wie in das auf der stehenden Welle A befindliche Rad a ein, so daß letzteres mit vergrößerter Geschwindigkeit nach derselben Richtung, in welcher die Pferde umgehen, bewegt wird. Für jeden Umgang der Pferde macht die Welle A

$$\frac{c}{a} + 1 \text{ Umdrehung.}$$

Fig. 152.

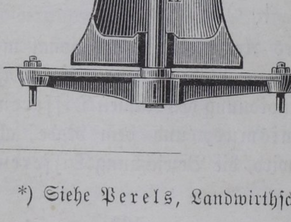


Setzt man andererseits $\beta = 0$, so erhält man

$$\gamma = -\,\alpha \, \frac{a}{c}$$

als Umdrehungsgeschwindigkeit des äußeren Rades. Auch diese Anordnung findet sich ausgeführt, so bei dem Gangspill, Fig. 153, bei welchem durch die Arbeiter mittelst Tummelbäumen die Axe A gedreht wird und dadurch bei feststehenden Rädern b eine im Verhältniß $\frac{a}{c}$ verminderte Umdrehungsgeschwindigkeit der Trommel C nach der entgegengesetzten Richtung erlangt wird.

Fig. 153.

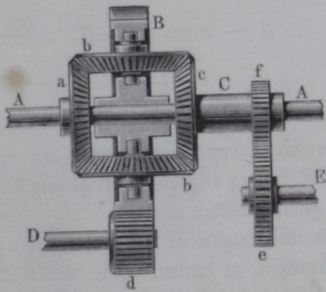


Eine sehr wichtige und interessante Anwendung findet das Differential=

*) Siehe Perels, Landwirthschaftliche Maschinen und Geräthe.

getriebe ferner bei dem Bewegungsmechanismus der Spindelbänke oder Fleyer*), zum Vorspinnen von Baumwolle und Kammgarn ꝛc., bei welchen man von der angegebenen Eigenschaft Gebrauch macht, daß das Differentialrad eine Bewegung hat, welche proportional mit der Differenz der Bewegungen der beiden Wellen A und C ist. Man giebt in diesem Falle dem Getriebe meistens eine etwas abgeänderte Form, Fig. 154, indem man

Fig. 154.



die beiden Räder a und c gleich groß macht und die Bewegung durch zwei conische Räder $b\,b$ vermittelt, welche beiden Räder lose drehbar in dem sogenannten Differentialrade B angebracht sind. Zwei Räder b sind hier nur der symmetrischen Anordnung und Wirkung wegen angebracht, dieselben wirken wie ein einziges. Es ist ohne Weiteres klar, daß die oben entwickelte Beziehung

$$\alpha a \pm \gamma c = \beta\,(a + c)$$

zwischen den Geschwindigkeiten der Räder auch hier ihre Gültigkeit hat, wenn man darin $a = c$ setzt; man erhält dann

$$\alpha a \pm \gamma a = \beta\,.\,2a$$

oder

$$\beta = \frac{\alpha \pm \gamma}{2}.$$

Man findet übrigens diese Gleichung auch direct, wenn man die Einwirkungen gleichsetzt, welche ein Wechselrad b einerseits von a, andererseits von c empfängt, sobald diese Räder um α resp. γ gedreht werden und sobald man das Differentialrad B mit den Wechselrädern b um den Winkel β herumschwenkt. Die Drehung von a erzeugt hierbei offenbar eine Umdrehung des Rades b um seine Axe im Betrage $-\alpha\frac{a}{b}$, während durch die Bewegung von B eine Drehung des Rades b um $+\beta\frac{a}{b}$, in Summa also $\frac{a}{b}(\beta - \alpha)$ hervorgebracht wird. Ebenso erzeugt die Drehung γ des Rades c eine solche

*) Siehe Artikel „Baumwolle" von Hülsse in Prechtl's Technologische Encyclopädie. Supplement.

von b im Betrage $+ \gamma \frac{c}{b}$, während die Drehung des Differentialrades das Wechselrad b zu einer Drehung $- \beta \frac{c}{b}$ veranlaßt, so daß die Umdrehung von b um seine eigene Axe auch durch $\frac{c}{b} (\gamma - \beta)$ ausgedrückt werden kann. Beide Werthe gleichgesetzt, erhält man, da hier auch noch $a = c$ ist, offenbar

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta$$

oder

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

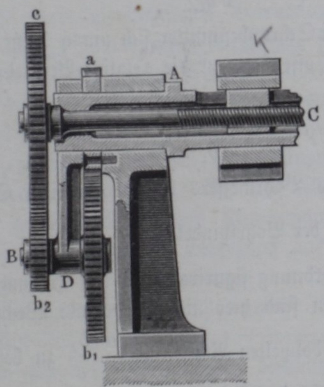
Die Räder b sind in der Regel von gleicher Größe mit a und c, doch ist die Größe von b, wie die Rechnung ergiebt, ganz gleichgültig, da b überhaupt nur als Wechsel- oder Zwischenräder wirken.

Die Einrichtung und Wirkungsweise des betreffenden Mechanismus hat man sich nun folgendermaßen zu denken. Die Welle A, auf welcher das Rad a fest aufgekeilt sich befindet, ist eine Betriebswelle, von welcher aus die Bewegung der Flügelspindeln der betreffenden Vorspinnmaschine bewirkt wird, während die auf diesen Spindeln befindlichen Spulen für das Vorgespinnst eine etwas andere Geschwindigkeit, größer oder kleiner, erhalten, die ihnen aber nicht direct von A, sondern von der Welle E ertheilt wird, welche ihre Bewegung unter Vermittelung von f und e von dem Rade c erhält, das zu dem Ende lose drehbar auf A aufgesteckt ist. Es werden also die Spindeln mit a, die Spulen mit c in Verbindung stehen, d. h. ihre Bewegung wird mit der Bewegung dieser Räder proportional sein. Denkt man nun dem Differentialrade B von einer dritten Axe D aus eine selbstständige Bewegung β ertheilt, so ist klar, daß diese Bewegung β zusammen mit der Bewegung α von A eine solche Drehung γ des Rades c hervorbringen muß, daß β als Differenz von α und γ erscheint. Die Differenz zwischen Spindel und Spulenbewegung ist aber die sogenannte Aufwindebewegung, welche das Aufwickeln des Garns auf die Spule bewirkt, und daraus geht hervor, daß, wenn man von A die Spindeln umdrehen läßt, und dem Rade B eine der Aufwindegeschwindigkeit proportionale Umdrehung ertheilt, die Spulen einen richtigen Gang annehmen müssen, sobald sie von dem Rade c getrieben werden. Da mit allmäliger Anfüllung der Spulen deren Durchmesser wächst, daher die zur Aufwindung der producirten constanten Garnmenge erforderliche Zahl von Windungen entsprechend kleiner wird, so hat man es dadurch, daß man auf das Differentialrad entsprechend die variabele Aufwindegeschwindigkeit überträgt, in seiner Hand, den Bedingungen einer tadellosen Aufwindung zu genügen.

Auch sonst hat man, z. B. bei selbstthätigen Spinnstühlen*) und für andere specielle Zwecke, das Differentialgetriebe noch mehrfach angewendet. Der Gebrauch dieser Getriebe für Dynamometer ist schon in Thl. II. angegeben worden.

Man kann das Rad c des gewöhnlichen Differentialgetriebes, Fig. 151, auch mit äußerer anstatt mit innerer Verzahnung versehen, wenn man die Axe B mit zwei verschiedenen Rädern b_1 und b_2 versieht, Fig. 155, von denen das eine b_1 mit a und das andere b_2 mit c zusammen wirkt. In dieser Art hat man mehrfach bei Bohrwerken Mechanismen in Gebrauch, welche die Verschiebung des Bohrmessers oder Bohrkopfes bezwecken. Es sei wieder durch A die Bohrspindel, und durch C die zur Verschiebung des Bohrkopfes dienende Schraube dargestellt, welche auf ihrem freien Ende das Rad c trägt, während das Rad a nicht auf der Spindel A, sondern concentrisch dazu undrehbar am Gestelle befestigt ist. Um dieses feste Rad wird das kreiselnde Rad b_1 geführt, dessen Axe B auf einem Arme D befindlich ist, der von der Bohrspindel mit herumgenommen wird. Da ein zweites auf B festgekeiltes Rad b_2, welches mit b_1 wie aus einem Stück bestehend zu betrachten ist, mit c im Eingriffe ist, so wird letzteres Rad c und also auch die Schraubenspindel C in eine bestimmte Drehung γ versetzt. Die Ermittelung des Umsetzungsverhältnisses macht sich hier ebenso einfach wie bisher. Die absolute Bewegung, welche der Axe B ertheilt wird, bestimmt sich nämlich aus der Wirkung zwischen b_1 und dem festen Rade a, lediglich zu

Fig. 155.



$$+\ \alpha\, \frac{a + b_1}{b_1} = \omega_1,$$

wenn die Bohrspindel und mit ihr der Arm D den Winkel $+\ \alpha$ beschreibt. Aus der Wirkung zwischen dem Rade c, welches sich um γ dreht, und dem

*) Siehe Zeitschrift Deutsch. Ingenieure, Jahrg. 1874, S. 216: Einrichtung der Selfactors von Rieter.

Rade b_2, dessen Centrum um α herumgeführt wird, ergiebt sich die absolute Verdrehung der Axe B zu

$$-\gamma \frac{c}{b_2} + \alpha \frac{c + b_2}{b_2} = \omega_2.$$

Die Gleichsetzung beider Werthe ω_1 und ω_2 liefert daher

$$-\gamma c b_1 + \alpha c b_1 = \alpha a b_2$$

oder

$$\gamma = \alpha \left(1 - \frac{a b_2}{c b_1}\right).$$

Da die Bohrspindel selbst mit der Schraubenmutter sich um α dreht, so wird auf die Verschiebung des Bohrers offenbar nur die relative Verdrehung von Mutter gegen Spindel, also

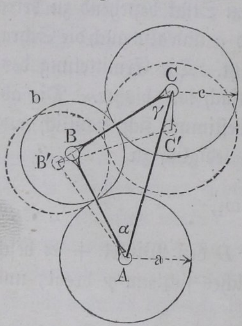
$$\alpha - \gamma = \alpha \frac{a b_2}{c b_1}$$

wirken, und die Verschiebung des Bohrmessers beträgt bei einer Steigung s der Schraube für jeden Umgang der Bohrspindel $s \frac{a b_2}{b_1 c}$.

Bei der zuletzt betrachteten Anordnung figuriren auch die Halbmesser der Zwischenräder b_1 und b_2, dieselben sind hier nicht mehr als Wechselräder, sondern als Vorgelegsräder eines doppelten Vorgeleges $\frac{a}{b_1} \frac{b_2}{c}$ zu betrachten, und die gewählte Anordnung unterscheidet sich offenbar von der in Fig. 134 §. 44 gegebenen Bohrvorrichtung nur dadurch, daß dort die Zwischenwelle fest gelagert war, während sie im vorliegenden Falle um die anderen beiden Axen herumgeführt wird.

In manchen Fällen hat man die Bewegung von einer Welle A auf eine andere C in solcher Weise zu übertragen, daß der bewegten Welle C noch eine andere Bewegung senkrecht zu ihrer Länge ermöglicht ist, ohne daß dadurch die Betriebsübertragung unterbrochen oder auch nur gestört werde. Man erreicht dies durch das sogenannte Rädergehänge oder Kniegelenk, Fig. 156. Hierin ist A die in festen Lagern liegende Betriebswelle, von deren Rade a durch das Zwischenrad b die Bewegung in derselben Richtung und im Verhältniß $\frac{a}{c}$ auf das Rad c der Welle C übertragen wird.

Fig. 156.



Soll nun der Welle C eine Bewegung etwa nach C' ermöglicht sein, so genügt es für die Bewegungsübertragung, die Axe des Zwischenrades b als den Drehpunkt eines Knies ABC zu construiren, dessen beide Schenkel AB und BC die Axen A resp. C umfassen. Rückt dann die Axe C nach C', so gelangt die Axe B nach B', so daß $AB = AB'$ und $CB = C'B'$ ist, und da also die Axenabstände zwischen A und B einer- und C und B andererseits unverändert geblieben sind, so ist die Möglichkeit der Bewegung hierdurch gegeben. Man bedient sich dieser Vorrichtung ebenfalls bei Spindelbänken, indem von der Welle C die Bewegung der Spulen ausgeht, die behufs ihrer gleichmäßigen Bewickelung auf einer auf- und niedergehenden Bank (Spulenwagen) aufgestellt sind. Auf diesem Spulenwagen sind denn auch die Lager der Spulenbetriebswelle C angebracht, welche letztere daher an der auf- und niedergehenden Bewegung der Spulen Theil nimmt. Es genügt aber für diesen Zweck nicht, die Bewegungsübertragung nur überhaupt zu ermöglichen, es muß an die Anordnung auch noch die Bedingung gestellt werden, daß durch das Auf- und Abgehen der betriebenen Axe C eine Störung in der gleichmäßigen Bewegungsübertragung nicht herbeigeführt werde, da ein Einfluß der Versetzung auf die Umdrehung bald eine Vergrößerung, bald eine Verminderung der Umdrehung der Spulen zur Folge haben müßte, jenachdem die Spulenwelle C aufwärts oder abwärts geführt wird. Um die hierzu nöthigen Erfordernisse eines richtigen Kniegelenks zu prüfen, gehe man aus von einer bestimmten Lage des Axendreiecks ABC, in welcher die Knieschenkel AB und CB die Winkel α und γ mit dem Axenabstande AC bilden. Kommt nun C nach einem unendlich wenig entfernten Punkte C' und B in Folge davon nach B', so hat der Arm AB sich um den sehr kleinen Winkel $BAB' = \partial\alpha$ und zwar nach links gedreht. Während dessen hat der Arm BC, nachdem er in die Lage $B'C'$ gelangt ist, offenbar eine Drehung nach rechts gemacht, und zwar um den kleinen Winkel, den die beiden Lagen CB und $C'B'$ mit einander einschließen, und welcher mit $\partial\gamma$ bezeichnet sein mag. Es wird nun die Kniebewegung selbst ohne jeden Einfluß auf die Bewegungsübertragung sein, sobald bei stillstehender Welle A die Welle C durch die Kniebewegung nicht in Bewegung geräth. Wenn also c sowohl wie a eine Drehung überhaupt nicht empfangen, so kann dies natürlich auch mit dem Zwischenrade b nicht der Fall sein. Die beiden Wirkungen also, welche aus der Berührung von b mit a und von b mit c für b dadurch resultiren, daß die beiden Knieschenkel AB um $-\partial\alpha$ und CB um $+\partial\gamma$ gedreht werden, müssen sich aufheben. Das Rad b erleidet nun aber durch die Drehung des Schenkels AB um $-\partial\alpha$ offenbar eine Verdrehung im Raume um

$$-\partial\alpha\,\frac{a+b}{b} = -\partial\alpha\,\frac{d_1}{b},$$

wenn $a + b = AB$ mit d_1 bezeichnet wird. Durch die Verdrehung des Arms CB gegen das ruhende Rad c im Betrage $+ \partial \gamma$ wird aber dem Zwischenrade b eine Verdrehung im Raume ertheilt von

$$+ \partial \gamma \frac{c + b}{b} = \partial \gamma \frac{d_2}{b},$$

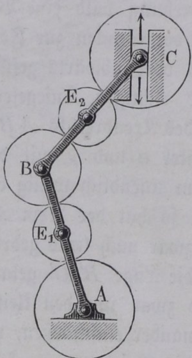
unter d_2 die Schenkellänge $CB = c + b$ verstanden. Das Rad b wird in jedem Falle daher durch die Kniebewegung in eine Bewegung gleich der Summe jener Componenten

$$+ \partial \gamma \frac{d_2}{b} - \partial \alpha \frac{d_1}{b}$$

versetzt, welche bei der entgegengesetzten Verschiebung von C natürlich das entgegengesetzte Zeichen annimmt. Soll nun das Zwischenrad hierdurch gar keine Bewegung empfangen, so wird $d_1 \partial \alpha = d_2 \partial \gamma$ als Bedingung gefunden.

Um diese Bedingung näher zu prüfen, genügt die Betrachtung des Axendreiecks ABC. Offenbar ist in demselben für jede Lage von C immer

Fig. 157.



$$AB : CB = \sin \gamma : \sin \alpha$$

oder

$$d_1 \sin \alpha = d_2 \sin \gamma.$$

Folglich hat man auch immer durch Differentiation:

$$d_1 \cos \alpha \, \partial \alpha = d_2 \cos \gamma \, \partial \gamma.$$

Setzt man hierin

$$d_1 \partial \alpha = d_2 \partial \gamma,$$

so folgt

$$\cos \alpha = \cos \gamma,$$

oder da α und γ kleiner als π sind, $\alpha = \gamma$. Das Axendreieck ABC muß also ein gleichschenkeliges sein, wenn die Kniebewegung ohne Einfluß auf die Bewegungsübertragung sein soll. Damit

$$d_1 = d_2 \text{ oder } a + b = c + b$$

sei, müssen die beiden Räder a und c gleiche Größe haben.

Zuweilen wird das Kniegelenk auch so ausgeführt, daß auf jedem Schenkel zwischen b und a resp. zwischen b und c noch ein Wechselrad e_1 und e_2 eingeschaltet wird, Fig. 157. Da durch dieses Wechselrad nur die Richtung der Bewegung verändert wird, so hat man hier ähnlich wie vorher die Bedingung:

$$+ \partial \alpha \frac{a + b}{b} - \partial \gamma \frac{c + b}{b} = 0;$$

also

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} = \frac{c + b}{a + b}.$$

Auch hat man, unter

$$d_1 = a + b + 2\,e_1$$

und

$$d_2 = c + b + 2\,e_2$$

die Schenkellängen verstanden, wie vorher

$$d_1 \cos\alpha\,\partial\alpha = d_2 \cos\gamma\,\partial\gamma,$$

und daher

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma} = \frac{c + b + 2\,e_2}{a + b + 2\,e_1}\,\frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}.$$

Diese beiden Werthe für $\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma}$ können nur dann gleich sein, wenn $a = c$ und $e_1 = e_2$ ist, dann ist auch $d_1 = d_2$ und die beiden Winkel α und γ sind ebenfalls von gleicher Größe.

Unrunde Räder. Bei den vorhergehenden Untersuchungen ist immer §. 49.
stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, daß das Umsetzungsverhältniß zwischen den Axen constant sein solle, so daß bei einer gleichmäßigen Bewegung der einen Welle auch die andere eine solche Bewegung annimmt. Dieser Fall ist auch der gewöhnliche bei allen Räderübertragungen und insbesondere bei schweren Transmissionen für große Kräfte der allein vorkommende. Nur bei manchen Arbeitsmaschinen macht die eigenthümliche Natur des Arbeitsganges eine zusammengesetztere Bewegung des arbeitenden Organs nöthig, von der Art nämlich, daß das Umsetzungsverhältniß gewissen periodischen Veränderungen unterworfen ist, so daß bei einer gleichmäßigen Bewegung der treibenden Welle die getriebene Axe abwechselnd mit größerer und kleinerer Geschwindigkeit umgedreht wird. Außer manchen anderen Mitteln, welche man, wie in der Folge sich zeigen wird, zu diesem Zwecke anwenden kann, sind auch gewisse Räder hierzu verwendbar. Offenbar werden diese Räder nicht mehr eine kreisförmige Grundform erhalten können, da dieselbe an die Bedingung eines unveränderlichen Umsetzungsverhältnisses gebunden ist, und deshalb ist die Bezeichnung *unrunde* Räder für die hier in Betracht kommende Gattung gebräuchlich. Dieselben kommen in der Praxis vergleichsweise nur sehr selten und stets nur bei parallelen Axen vor, da die ohnehin schon großen Schwierigkeiten der Ausführung fast unübersteigliche werden würden, wenn man für schneidende oder gekreuzte Axen derartige Räder anordnen wollte.

Für das richtige Zusammenwirken solcher unrunden Räder lassen sich folgende allgemein gültige Regeln aufstellen, aus denen in jedem einzelnen Falle die Grundform der Räder sich ableiten läßt.

Sind die beiden Axen A und B und deren Abstand d, Fig. 158 (a. f. S.), gegeben, und ist ebenso das Gesetz festgestellt, nach welchem das Umsetzungs-