drehung, wenn die Schraube C eine Ganghöhe von 12 Millimeter hat. Die Verschiebung berechnet sich, da man die Halbmesser der Räder ihren Zähnezahlen proportional anzunehmen hat, zu

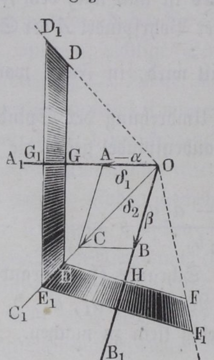
$$\frac{10.99 - 100.11}{10.99}\, 12 = 0{,}11 \,.\, 12 = 1{,}33 \text{ Millimeter},$$

und es muß daher die Bohrspindel zum Ausbohren jeder Länge von 1 Meter

$$\frac{1000}{1{,}333} = 750 \text{ Umgänge machen.}$$

§. 45. **Conische Räder.** Wenn die beiden mit einander durch ein Paar Räder zu verbindenden Axen sich in einem Punkte schneiden, so bestimmt sich die Anordnung derselben in folgender Art. Seien AA_1 und BB_1, Fig. 135, zwei sich in O schneidende Axen, und auch hier wieder die Aufgabe gestellt, daß eine gleichmäßige Umdrehung der Axe A mit der Geschwindigkeit α eine gleichmäßige Umdrehung von B in dem Betrage β veranlassen soll. Versetzt man wieder in der bekannten Art (s. Einleitung §. 27) zunächst die Axe A in Stillstand dadurch, daß man dem ganzen Systeme, d. h. beiden Axen eine Drehung im Betrage $-\alpha$ ertheilt, so lassen sich leicht die Momentanaxenflächen oder Axoide bestimmen. Man hat es jetzt nämlich mit einem Systeme zu thun, welches in jedem Augenblicke zweien Drehungen ausgesetzt ist, und zwar im Betrage $-\alpha$ um die Axe AA_1 und β um die Axe BB_1, wobei die Werthe von α und β, auf deren Verhältniß es ja nur ankommt, beliebig klein, also auch unendlich klein vorausgesetzt werden können. Nach dem Parallelogramm der Rotationen (Einleitung, §. 22) lassen sich die beiden unendlich kleinen Drehungen um zwei sich schneidende Axen leicht zu einer resultirenden Drehung um eine Axe CC_1 zusammensetzen, welche durch den Schnittpunkt O hindurchgeht. Man erhält bekanntlich diese Axe ihrer Richtung und Größe nach in der Diagonale OC desjenigen Parallelogramms, dessen Seiten OA und OB mit den beiden Axen der Richtung nach zusammenfallen und ihrer Größe nach die Drehungsintensität, ihrer Richtung nach den Drehungssinn bezeichnen. Die so erhaltene Gerade OC ist also für den betrachteten Augenblick als die Momentanaxe für die Bewegung der Welle B anzusehen. Da nun das Verhältniß der Drehungsgeschwindigkeiten für die ganze Dauer ein constantes sein soll, so wird auch die Lage der Momentanaxe CC_1 gegen die beiden Axen

Fig. 135.



stets dieselbe sein. Man erhält daher die gesuchten Momentanaxenflächen oder Axoide in den beiden Kegelmänteln, welche durch Rotation der Geraden CC_1 um die beiden Axen A und B entstehen. Die Bewegung der Axe B läßt sich daher bei festgestellter Axe A so auffassen, als ob die Axe B mit dem mit ihr verbundenen Kegelmantel COF auf dem festen Kegelmantel COD herumgerollt werde.

Wenn man jetzt die gemachte Voraussetzung wieder beseitigt, wonach die Axe A durch eine zusätzliche Bewegung $-\alpha$ festgestellt wurde, so erhält man den von Anfang an vorausgesetzten Bewegungszustand, dem gemäß beide Axen in den resp. Beträgen α und β gleichförmig rotiren, und es ist also deutlich, daß die Räder, welche eine Verkörperung der gedachten Axoide sein müssen, die Form der gefundenen Kegelflächen zu erhalten haben.

Die Verhältnisse dieser Kegelflächen, welche also stets *ihre gemeinsame Spitze im Durchschnittspunkte der beiden Axen haben müssen*, ergiebt sich ohne Weiteres aus dem Angeführten. Bezeichnet man die halben Winkel an der Spitze der Kegel AOC mit δ_1 und BOC mit δ_2, so hat man

$$\alpha : \beta = sin\ \delta_2 : sin\ \delta_1,$$

oder

$$\alpha\ sin\ \delta_1 = \beta\ sin\ \delta_2.$$

Es verhalten sich daher die Umdrehungsgeschwindigkeiten der Axen umgekehrt wie die Sinus der halben Spitzenwinkel. Zieht man von irgend einem Punkte E in der Berührungslinie der beiden Kegel die Normalen EG und EH auf die Axen, so hat man offenbar

$$\frac{sin\,\delta_1}{sin\,\delta_2} = \frac{EG}{EH} = \frac{a}{b},$$

wenn man unter a und b diese Normalen oder die Halbmesser der durch E gelegten kreisförmigen Kegelschnitte versteht.

Bezeichnet man mit n das Umsetzungsverhältniß

$$n = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{sin\,\delta_2}{sin\,\delta_1} = \frac{b}{a}, = \frac{\sin(\delta - \delta_1)}{\sin\delta_1} = \frac{\sin\delta\cos\delta_1 - \cos\delta\sin\delta_1}{\sin\delta_1}$$

$$= \sin\delta\cot\delta_1 - \cos\delta,$$

so folgt ferner aus der Figur:

$$tang\ \delta_1 = \frac{\beta\ sin\ \delta}{\alpha + \beta\ cos\ \delta} = \frac{sin\ \delta}{n + cos\ \delta}, \qquad tg\,\delta_1 = \frac{\sin\delta}{n + \cos\delta}$$

$$tang\ \delta_2 = \frac{\alpha\ sin\ \delta}{\beta + \alpha\ cos\ \delta} = \frac{n\ sin\ \delta}{1 + n\ cos\ \delta},$$

wenn

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = A\,O\,B$$

den Axenwinkel bedeutet.

Legt man zu den Schnittebenen EGD und EHF durch einen anderen Punkt E_1 zwei parallele Ebenen $E_1\,G_1\,D_1$ und $E_1\,H_1\,F_1$, so erhält man zwei conische Scheiben $EE_1\,D_1\,D$ und $EE_1\,F_1\,F$, welche die Grundformen abgeben für die im vorliegenden Falle erforderlichen sogenannten conischen Räder, wodurch die Bewegungsübertragung zweier einander schneidenden Axen vermittelt wird. Da bei der Bildung dieser Räder oder Kegelabschnitte die Wahl der Punkte E und E_1 an keine Bedingung geknüpft ist, so kann man diese Abschnitte oder Kegelscheiben auch beliebig größer oder kleiner erhalten, je nachdem man E und E_1 in größerem oder kleinerem Abstande von dem Durchschnittspunkte O der Axen annimmt. Es ergiebt sich daraus, daß man für dieselben Axen A und B und bei demselben Umsetzungsverhältnisse eine unbegrenzte Anzahl conischer Räder anordnen kann, deren Halbmesser a und b an je zwei miteinander in Berührung kommenden Punkten in demselben Verhältnisse, nämlich in dem umgekehrten Umsetzungsverhältnisse der Geschwindigkeiten zu einander stehen. Bei der Verbindung paralleler Axen durch zwei Räder ist eine solche Freiheit offenbar nicht vorhanden, indem bei gegebener Axenentfernung und vorgeschriebenem Umsetzungsverhältnisse nur ein einziges Räderpaar möglich ist.

Nach dem Obigen ergiebt sich nun in jedem Falle die Construction der gesuchten Räder leicht in folgender Art. Sind Fig. 136 und 137 die Axenrichtungen durch OA und OB gegeben, und man trägt auf denselben vom Durchschnittspunkte O aus die Stücken $OA = -\alpha$ und $OB = \beta$

Fig. 136.

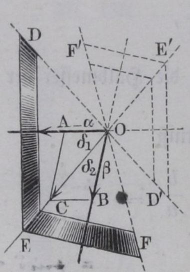
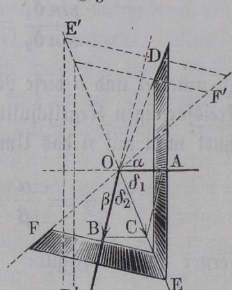


Fig 137.



an, wobei man die Drehungsrichtung mit Rücksicht auf das in der Einleitung §. 3 Gesagte durch die Pfeilspitzen der Strecken OA und OB bezeichnet, so erhält man in jedem Falle in der Diagonale OC des Parallelogramms die

Erzeugungslinie der beiden Kegelmäntel, aus denen man nun durch Ebenen senkrecht zu den Axen die betreffenden Räder ED und EF in gewünschter Größe herausschneiden kann.

Da die gedachten Kegelmäntel zu beiden Seiten der Spitze O sich bis ins Unendliche fortsetzen, so kann man die betreffenden Räder natürlich auch auf jeder Seite von O anordnen, also z. B. auch in $E'D'$ und $E'F'$; dieselben entsprechen dann immer dem vorausgesetzten Drehungssinne der beiden Axen. Man ersieht auch aus den beiden Figuren, daß die durch dieselben dargestellten Fälle sich nur durch die entgegengesetzte Drehungsrichtung der Axe A unterscheiden, und daß die angegebene Construction daher zwei verschiedene Paare von Kegelflächen ergiebt, auch wenn die Größen des Axenwinkels und des Umsetzungsverhältnisses gleich bleiben. Diese beiden Paare von Momentanaxenflächen fallen jedoch, wie leicht erkennbar ist, in ein einziges Paar Kegelmäntel zusammen, sobald die Axen, Fig. 138, einen rechten Winkel mit einander bilden, indem in diesem speciellen Falle die Erzeugungslinie OC für die eine Drehungsrichtung von A dieselben Winkel mit den Axen bildet, wie die Erzeugungslinie OC_1 für die entgegengesetzte Drehungsrichtung von A. Es ist daraus ersichtlich, daß für die eine Bewegungsrichtung von A nach Belieben die Räderpaare ED und EF oder GF und GD gelten, während der entgegengesetzten Bewegung von A die Räder FG und FE, beziehungsweise DE und DG

Fig. 138.

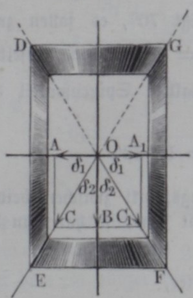


Fig. 139.

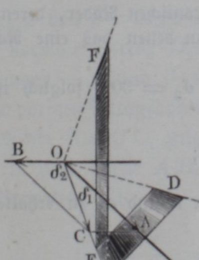
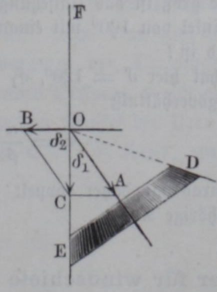


Fig. 140.



entsprechen. In Fig. 136 bis 138 bildet die Erzeugungslinie der Kegel mit beiden Axenrichtungen spitze Winkel δ_1 und δ_2, und es liegen in Folge dessen die beiden Kegelflächen auf entgegengesetzten Seiten der Berührungslinie OC. Dieser Fall entspricht sonach dem äußeren Angriffe der Räder für parallele Axen. In Fig. 139 (a. v. S.) hingegen, in welcher der eine Winkel $\delta_2 > 90^0$, ist, liegen beide Kegelflächen auf derselben Seite der Berührungslinie, und man kann daher die Berührung eine innere nennen, entsprechend dem inneren Eingriffe bei den Rädern paralleler Axen. Als Grenzfall zwischen den eben erwähnten kann der in Fig. 140 dargestellte gelten, wobei der Winkel δ_2 der Erzeugungslinie OC mit der Axe OB gleich einem Rechten ist. In Folge dessen artet die zugehörige Kegelfläche hier in eine zur Axe OB normale Ebene aus und pflegt man daher das betreffende Rad EF ein Planrad zu nennen.

Beispiele: 1) Der Axenwinkel zweier Wellen beträgt 70^0, es sollen zwei conische Räder für ein Umsetzungsverhältniß $n = \frac{\alpha}{\beta} = 3$ zwischen denselben angeordnet werden. Man findet durch Rechnung die halben Spitzenwinkel der Kegel aus

$$tang\, \delta_1 = \frac{sin\ 70^0}{3 + cos\ 70^0} = 0{,}2812;\ \delta_1 = 15^0\,42',$$

daher $\delta_2 = 54^0\,18'$. Soll nun der äußere Berührungspunkt zwischen beiden Rädern um 1,2 Meter von dem Axendurchschnitte entfernt sein, so hat man die entsprechenden Halbmesser der Räder:

$$a = 1{,}2\ sin\ 15^0\,42' = 0{,}325 \text{ Meter},$$
$$b = 1{,}2\ sin\ 54^0\,18' = 0{,}975 \text{ Meter.} = 3\,a.$$

Bei einer Länge der Berührung in der Seite des Kegels gemessen von 0,1 Meter folgen ebenso die inneren Halbmesser a_1 und b_1 der Räder zu

$$a_1 = 1{,}1\ sin\ 15^0\,42' = 0{,}298 \text{ Meter},$$
$$b_1 = 1{,}1\ sin\ 54^0\,18' = 0{,}894 \text{ Meter} = 3\,a_1.$$

2) Wie groß ist das Umsetzungsverhältniß zweier conischen Räder, deren Axen einen Winkel von 120^0 mit einander bilden, und von denen das eine Rad ein Planrad ist?

Man hat hier $\delta = 120^0$, $\delta_1 = 90^0$ und daher $\delta_2 = 30^0$; folglich ist das Umsetzungsverhältniß

$$n = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{sin\ 30^0}{sin\ 90^0} = 0{,}5;$$

das Planrad hat daher doppelt so große Halbmesser a und a_1 zu erhalten als das zugehörige Rad.

§. 46. **Räder für windschiefe Axen.** Es sei dieselbe Aufgabe, wie im vorstehenden Paragraphen für einander schneidende Axen, nunmehr für den Fall zweier windschiefen Axen gegeben. In Fig. 141 I und II sind diese Axen AA_1 und BB_1 in zwei zu einander senkrechten Projectionsebenen I und II dargestellt, von denen I parallel mit den parallelen Ebenen angenommen