künstlichen Unebenheiten oder Zähnen behufs der Bewegungsübertragung versieht. Hiernach lassen sich alle Räder in folgende vier Classen bringen:

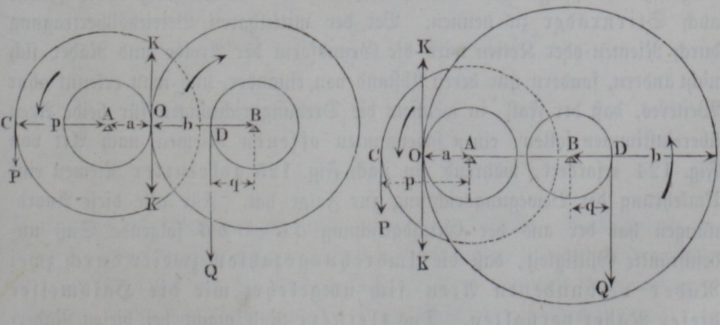
1. Frictions- oder Reibungsräder mit unmittelbarer Uebertragung durch Reibung,
2. Riemenräder mit mittelbarer Uebertragung durch Reibung,
3. Zahnräder mit unmittelbarer Uebertragung durch Zähne,
4. Kettenräder mit mittelbarer Uebertragung durch Zähne.

Wenn diese Verschiedenheit in der Einwirkung der Räder auf einander auch von äußerster Bedeutung hinsichtlich der Ausführung und Anwendung derselben sein muß, wenn davon insbesondere die schädlichen Widerstände, z. B. der Reibung, wesentlich abhängig sind, so ist doch klar, daß hierdurch eine Verschiedenheit in dem kinematischen sowohl wie dynamischen Zusammenhange nicht bedingt sein kann. Die Veränderungen der Bewegungen sowie diejenigen der Geschwindigkeiten und demnach also auch der Kräfte, abgesehen von den schädlichen Nebenhindernissen, sind unabhängig von der Art der Bewegungsübertragung und daher für die unter 1 bis 4 angeführten Gruppen unter sonst gleichen Verhältnissen dieselben.

Es soll im Folgenden dieser kinematische und der dynamische Zusammenhang der Räder zunächst untersucht werden, wobei es nach der vorstehenden Bemerkung klar ist, daß die gefundenen Resultate ebenso gut für Frictions- wie für Zahnräder, für Riemen- wie für Kettenbetrieb gültig sein müssen. An diese Untersuchung des geometrischen Zusammenhanges soll sich dann die aus dem physikalischen Charakter der Betriebsübertragung folgende anschließen.

Räder für parallele Axen. Der einfachste und häufigste Fall der Räderverwendung ist gegeben, wenn eine Axe A, Fig. 122, welche sich mit §. 41.

Fig. 122. Fig. 123.



gleichmäßiger Geschwindigkeit dreht, einer zu ihr parallelen zweiten Axe B ebenfalls eine gleichmäßige Rotationsbewegung mittheilen soll. Bezeichnet

α die Winkelbewegung der Welle A in einer gewissen Zeit und β den Drehungswinkel von B in derselben Zeit, so muß das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ dieser beiden Bewegungen fortwährend constant sein, wenn eine gleichmäßige Drehung von A eine ebensolche von B zur Folge haben soll. Es ist bereits in der Einleitung, §. 27, näher ausgeführt worden, daß dieser Bewegungsart zwei normale Kreiscylinder als Momentanaxenflächen entsprechen, deren geometrische Axen mit den Wellenaxen A und B zusammenfallen, und deren Halbmesser a und b durch die Beziehung gegeben sind, daß

$$a\alpha = b\beta$$

oder

$$a : b = \beta : \alpha.$$

Die zu dieser Bewegung gehörenden Polbahnen sind daher zwei um A resp. B beschriebene Kreise AO und BO, Fig. 122 und 123 (a. v. S.), welche sich in O berühren. Dieser Punkt O, welcher also durch die Beziehung

$$AO : BO = \beta : \alpha$$

gefunden wird, liegt entweder in der Strecke zwischen den Mittelpunkten A und B, wenn die Umdrehungsrichtungen der Axen die entgegengesetzten sind, Fig. 122, oder außerhalb der Geraden AB, Fig. 123, bei gleichen Umdrehungsrichtungen. In diesem Falle muß O, wie leicht zu erkennen ist, auf derjenigen Verlängerung von AB liegen, welche über den Axenpunkt der schneller gehenden Welle hinausgeführt ist, denn es kann in Fig. 123 der Berührungspunkt O nur dann die gezeichnete Lage haben, wenn $\alpha > \beta$ ist, weil man $BO > AO$ hat.

Diese Axoide werden nun in der Praxis als materielle Cylinder ausgeführt und entsprechen dann die beiden durch Fig. 122 und 123 dargestellten Fälle den Zahn- oder Frictionsrädern mit äußerem resp. innerem Angriff, und pflegt man diese Räder bei der Uebertragung durch Zähne auch Stirnräder zu nennen. Bei der mittelbaren Betriebsübertragung durch Riemen oder Ketten wird die Grundform der Axoide und Räder sich nicht ändern, sondern nur deren Abstand von einander, und man erkennt ohne Weiteres, daß der Fall, in welchem die Drehungsrichtungen für beide Axen übereinstimmen sollen, einen sogenannten offenen Riemen nach Art von Fig. 124 erfordert, während ein nach Fig. 125 gekreuzter Riemen eine Umkehrung der Bewegungsrichtung zur Folge hat. Für alle diese Anordnungen hat der aus der Grundgleichung $a\alpha = b\beta$ folgende Satz unbeschränkte Gültigkeit, daß die Umdrehungszahlen zweier durch zwei Räder verbundenen Axen sich umgekehrt wie die Halbmesser dieser Räder verhalten. Das kleinere Rad macht bei diesen Rädereingriffen immer die größere Anzahl von Umdrehungen, die Umfangsbewegung ist bei beiden Rädern stets von gleicher Größe.

Setzt man bei unmittelbarer Uebertragung die Axenentfernung $a + b$ gleich d und bezeichnet das Umsetzungsverhältniß $\frac{a}{b} = \frac{\beta}{\alpha}$ mit n, so hat man

$$a\alpha = (d - a)\beta,$$

woraus

$$a = d\frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{d}{1 + \frac{1}{n}},$$

folgt. Ebenso ist

$$b = d\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{d}{1 + n}.$$

Aus dem Obigen ergiebt sich weiter, daß die Räder nicht nur ein Mittel zur Bewegungsübertragung überhaupt abgeben, sondern daß sie neben der

Fig. 124.

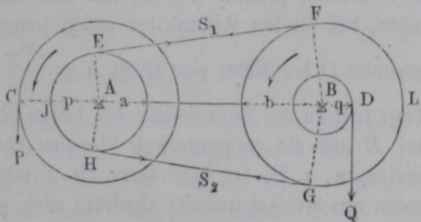
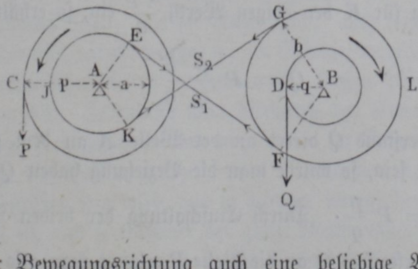


Fig. 125.



Umkehrung der Bewegungsrichtung auch eine beliebige Veränderung der Umdrehungsgeschwindigkeit ermöglichen. Diese letztere Eigenschaft der Räder ist ganz besonders als die Veranlassung zu ihrer häufigen Verwendung zu erkennen, denn die Nothwendigkeit einer Geschwindigkeitsveränderung von Drehbewegungen tritt dem Constructeur fast überall entgegen.

Es ist in dem zweiten Theile dieses Werkes zur Genüge erörtert, daß die Motoren ihre vortheilhafteste Leistung nur bei gewissen, zwischen engen Grenzen liegenden Geschwindigkeiten der Kraftmaschine ausüben. Da nun aber andererseits bei der Betreibung einer Arbeitsmaschine irgend welcher Art ebenfalls eine gewisse, durch Rücksichten der betreffenden Fabrikation bestimmte Geschwindigkeit als die vortheilhafteste geboten ist, so erklärt sich die Nothwendigkeit von Mitteln zur Ueberführung einer Geschwindigkeit in eine andere von selbst, denn nur in selteneren Fällen wird die vortheilhafteste Geschwindigkeit der Kraftmaschine mit derjenigen der Arbeitsmaschine übereinstimmen.

Jede Veränderung in der Geschwindigkeit hängt natürlich innig mit einer Veränderung in den Verhältnissen der einwirkenden Kräfte zusammen, wie dies schon ganz allgemein aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten (Thl. I, §. 85) folgt. Wirkt etwa an der treibenden Welle A, Fig. 122 und 123, eine Kraft P an einem Hebelsarme $AC = p$, also ein Moment Pp, so folgt, wenn vor der Hand alle schädlichen Nebenhindernisse der Reibung ꝛc. außer Betracht gelassen werden, aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, daß für den Zustand der gleichförmigen Bewegung an dem Berührungspunkte O der Räder eine Kraft $K = \frac{Pp}{a}$ ausgeübt werden muß. Diese Kraft tritt an der Angriffsstelle der beiden Räder als Action des Rades A auf B und als entgegengesetzte Reaction von B auf A auf. Diese beiden Wirkungen, z. B. bei Zahnrädern die Drucke der Zähne auf einander, sind, wenn von der Zahnreibung abgesehen wird, gleich groß. Die Kraft K aber am Halbmesser $BO = b$ des Rades B wird für den Zustand der gleichförmigen Bewegung einem Widerstande Q am Hebelsarme $BD = q$ das Gleichgewicht halten, welcher durch $Kb = Qq$ gegeben ist. Setzt man hierin für K den obigen Werth $\frac{Pp}{a}$ ein, so erhält man

$$Q = P \frac{p}{q} \frac{b}{a}.$$

Würde der Widerstand Q direct an der Welle A an dem gleichen Hebelsarme q wirksam sein, so würde man die Beziehung haben $Qq = Pp$, also wäre dann $Q = P \frac{p}{q}$. Durch Einschaltung der beiden Räder und Verlegung des Widerstandes Q an die Welle B erlangt man also bei Anwendung einer und derselben Kraft P die Möglichkeit, einen in dem Verhältnisse $\frac{b}{a}$ größeren Widerstand Q zu überwinden, als dies bei jener directen Wirkung des Widerstandes an der Welle A möglich ist. Hierin liegt die Erklärung für die Bedeutung der Räder bei allen Winden und Hebevorrichtungen, bei denen es sich darum handeln muß, mit einer geringen Kraft P bedeutende Lasten zu überwinden. Man erreicht diesen Zweck im Allgemeinen durch ein- oder mehrmalige Einschaltung solcher Räderpaare ab, wie hier angenommen, zwischen der Axe, an welcher die Kraft P und derjenigen, an welcher die Last Q wirkt. Ein solches Räderpaar a und b pflegt man bei Winden und anderen Vorrichtungen wohl mit dem Namen Vorgelege zu bezeichnen und unterscheidet, je nach der Anzahl der zwischengeschalteten Räder, Winden oder Einrichtungen mit einfachem, doppeltem, auch dreifachem Vorgelege. Die Wirkung jedes solchen Vorgeleges besteht nach dem Obigen immer in einer Verlangsamung der Geschwindigkeit und daher in einer Steigerung der Kraft im Verhältniß $b : a$ und es folgt daraus, daß in allen Fällen, wo an möglichster Druckvergrößerung gelegen ist, das Rad b thunlichst groß gegen a genommen werden muß. Praktische Rücksichten eines guten Betriebs und der möglichen Ausführbarkeit bestimmen hierbei hauptsächlich die Grenze, bis zu welcher man den Werth $\frac{b}{a}$ wird ausdehnen können, wie aus späteren Ermittelungen folgen wird. Die größten Werthe, die man dem Verhältnisse $\frac{b}{a}$ bei Winden giebt, betragen selten mehr als 8, während man bei Transmissionswellen und überhaupt beim Betrieb von Maschinen das Verhältniß in der Regel viel kleiner, meist nicht über 4 oder 5 zu nehmen pflegt. Es ist klar, daß, wenn es sich nur um die Bewegungsübertragung ohne Geschwindigkeitsänderung handelt, man $a = b$ machen wird. Daß mit der Steigerung des durch die Kraft P zu überwindenden Widerstandes Q eine Vergrößerung der Leistung resp. ein Gewinn an mechanischer Arbeit nicht erzielt werden kann, ist an sich klar, da jede Vergrößerung des Druckes nur auf Kosten des Weges erkauft werden kann. Es hat im Gegentheil jede Zugabe von nothwendigen Maschinentheilen, wie die Räder sind, auch immer ein Auftreten neuer Nebenhindernisse, wie Reibungen 2c., im Gefolge, womit ein entsprechender Verlust an mechanischer Arbeit verbunden ist, dessen Betrag weiter unten ermittelt werden soll. Jedenfalls wird hierdurch der ökonomische Effect der Maschinenanlage herabgezogen, und man kann im Allgemeinen den Satz aufstellen, daß die Vollkommenheit eines Mechanismus in dynamischer Hinsicht um so größer sein wird, aus je weniger beweglichen Theilen derselbe zusammengesetzt ist, und je einfacher der ganze Mechanismus ist. Von diesem Gesichtspunkte aus muß man nicht in der Nothwendigkeit, einen Mechanismus durch Zusatz neuer Theile complicirt zu machen, sondern in der Möglichkeit, denselben durch Weglassung vorhandener Organe zu vereinfachen, eine rationelle Verbesserung erblicken.

Beispiele. 1) Die Welle A einer Dampfmaschine macht pro Minute 36 Umdrehungen und soll durch das 4 Meter große gezahnte Schwungrad eine

Transmissionswelle B mit 90 Umdrehungen pro Minute getrieben werden, wie groß ist das Zahnrad auf dieser Welle zu machen?

Der gesuchte Durchmesser $2b$ des Zahnrades ergiebt sich aus

$$90 : 36 = 4 : 2b; \; 2b = 1{,}6 \text{ Meter}.$$

2) Das Mühleisen eines Mahlgangs trägt eine Riemscheibe von 0,8 Meter Durchmesser und empfängt seine Bewegung von der 2 Meter großen Scheibe auf einer Königswelle, welche minütlich 50 Umdrehungen macht, mit welcher Geschwindigkeit wird der Stein umgetrieben?

Die Umdrehungszahl n der Mühlspindel folgt aus

$$0{,}8 : 2 = 50 : n \text{ zu } n = 125.$$

3) Eine einfache Bodenwinde mit einer Seiltrommel von 300 Millim. Durchmesser trägt auf der Axe der letzteren ein Rad von 1,2 Meter Durchmesser, in welches ein 180 Millimeter großes Getriebe auf der Kurbelwelle eingreift. Welche Kraft würde ein Arbeiter an einer 0,400 Meter langen Kurbel aufwenden müssen, um eine an dem Seile hängende Last von 250 Kilogramm aufzuwinden, wenn schädliche Nebenhindernisse nicht vorhanden sein würden?

Man hat

$$Q = P \frac{p}{q} \frac{b}{a},$$

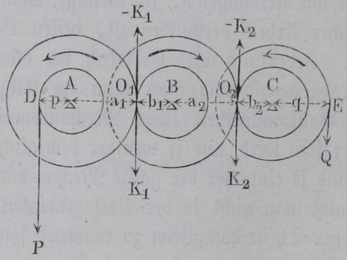
oder nach Einsetzung der Werthe:

$$250 = P \frac{0{,}400}{0{,}150} \frac{1{,}2}{0{,}180},$$

woraus $P = 14{,}1$ Kilogramm folgt.

§. 42. **Mehrfache Vorgelege.** Wenn das Umsetzungsverhältniß, d. h. das Verhältniß der Umdrehungsgeschwindigkeiten zweier durch Räder zu verbindenden Axen zu groß ist, um durch ein einziges Räderpaar oder Vorgelege erzielt werden zu können, so wendet man mehrere derselben in solcher Art an, wie durch Fig. 126 zur Anschauung gebracht ist. Hier wird die Bewegung der Welle A auf diejenige B durch die Räder a_1 und b_1 übertragen

Fig. 126.



und in derselben Weise von B auf C durch die Räder a_2 und b_2 fortgepflanzt. Hat die Axe A die Winkelgeschwindigkeit α oder, was auf dasselbe