

Zweites Capitel.

Von den Rädern.

Räder. Die im vorigen Capitel besprochenen Axen empfangen ihre §. 40. Umdrehung, sofern sie nicht als Wellen von Kraftmaschinen direct von dem Motor (Wasser, Dampf &c.) in Bewegung gesetzt werden, in fast allen Fällen von anderen rotirenden Axen, und können ihrerseits wieder dazu dienen, andere Axen gleichfalls in Umdrehung zu setzen. Als ein ganz allgemein gebräuchliches Mittel dienen zu diesem Zwecke die Räder. Es liegt daher in der Natur der Sache, daß diese Räder, wie die Maschinenorgane überhaupt, niemals vereinzelt, sondern in paarweisem Zusammenhange auftreten müssen. Hieran kann der Umstand nichts ändern, daß häufig ein Rad *A* mit zwei oder noch mehreren anderen Rädern *B*, *C* u. s. w. zusammenarbeitet, denn in solchem Falle hat man ebenso viele Paare *AB*, *AC* &c. zu unterscheiden, als andere Räder mit *A* arbeiten, so daß alle diese Paare ein gemeinsames Glied *A* haben.

Die Wirkung aller Arten von Rädern läßt sich geometrisch dahin kennzeichnen, daß zwei Körper mit gewissen idealen Flächen auf einander sich bewegen, sei es nun, daß diese Bewegung eine rein rollende oder wälzende ohne gegenseitige Verschiebung sei, oder daß neben der Wälzung gleichzeitig eine Verschiebung längs der geraden Berührungslinie eintrete. Man erkennt hieraus ohne Weiteres mit Rücksicht auf das in der Einleitung §. 26 Gesagte, daß diese Flächen den Charakter der dort als Noide bezeichneten Momentanaxenflächen an sich tragen müssen.

Diese Flächen werden im Allgemeinen, wenn eine Gleitung neben der Rollung nicht ausgeschlossen ist, Hyperboloide sein, auf denen immer auf

jedem ein System von geraden Linien sich angeben läßt, von der Beschaffenheit, daß jede Gerade des einen mit einer entsprechenden Geraden des anderen Systems in der jedesmaligen Berührungslinie zusammenfällt. Es ist ebenfalls an obiger Stelle bereits erläutert, daß diese Flächen für den Fall, wo eine Gleitung längs der Berührungslinie nicht stattfindet, den Charakter der Abwickelbarkeit auf einander haben müssen, und daß es speciell Kegelflächen mit gemeinsamer Spitze werden, wenn die beiden Axen sich schneiden, welche durch die betreffenden Räder zu verbinden sind. Der Durchschnittspunkt der Axen ist dann der gemeinsame Mittelpunkt der Kegelflächen und es folgt sogleich, daß diese Regel bei parallelen Axen in zwei Cylinder ausarten müssen. Diese Regel resp. Cylinderflächen sind natürlich als ganz allgemeine aufzufassen, und wenn auch meistens in der Praxis den Rädern die normalen Kreiscylinder und Kreiskegelflächen zu Grunde liegen, so ist doch der Fall der allgemeinen Fläche nicht ausgeschlossen und kommt bei parallelen Axen, z. B. bei den elliptischen, herz- und spiralförmigen Rädern (s. unten), auch öfter vor. Die Betrachtung der Räder als der Verbindungsglieder zweier Axen wird sich in ähnlicher Weise, wie in der Einleitung die Rotationen überhaupt erörtert sind, am einfachsten an die drei Fälle anschließen, wo

- a) die Axen parallel sind,
- b) die Axen sich schneiden,
- c) die Axen windschief im Raume zu einander stehen.

Diese verschiedenen Axenstellungen bedingen gewisse wesentliche Unterschiede in der Wirkungsweise und Anordnung der zugehörigen Räder, und bilden daher einen naturgemäßen geometrischen Grund zu einer entsprechenden Eintheilung. Es läßt sich aber auch noch von einem anderen mehr physikalischen Gesichtspunkte aus eine Scheidung vornehmen, welche aus der eigenthümlichen Art der Bewegungsübertragung oder Mittheilung der Bewegung sich ergibt. Es kann nämlich einerseits diese Mittheilung direct zwischen den beiden materiell dargestellten Flächen geschehen, welche dabei zu einer unmittelbaren Berührung kommen, und wobei der Abstand der Axen von einander durch die Flächen selbst festgestellt wird. Es kann aber auch andererseits die Bewegungsübertragung durch Vermittelung eines biegsamen Zwischengliedes, etwa eines Riemens, geschehen, welches die Fähigkeit hat, sich der Form der mehrgedachten Flächen möglichst innig anzuschließen und daher bei der Anordnung eine gewisse Freiheit in der Wahl des Axenabstandes gewährt. Jeder dieser beiden Fälle gestattet noch eine doppelte Ausführbarkeit, jenachdem die Bewegungsübertragung von dem einen Körper auf den anderen lediglich durch die Reibung zwischen den Flächen, d. h. deren natürliche Unebenheiten, herbeigeführt wird, oder jenachdem man die Flächen mit

künstlichen Unebenheiten oder Zähnen behufs der Bewegungsübertragung versteht. Hiernach lassen sich alle Räder in folgende vier Classen bringen:

1. Frictions- oder Reibungsräder mit unmittelbarer Uebertragung durch Reibung,

2. Riemenräder mit mittelbarer Uebertragung durch Reibung,

3. Zahnräder mit unmittelbarer Uebertragung durch Zähne,

4. Kettenräder mit mittelbarer Uebertragung durch Zähne.

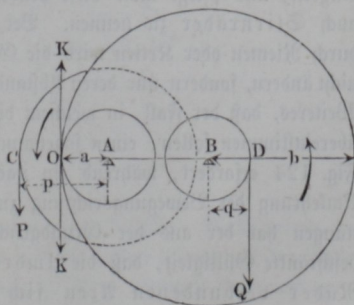
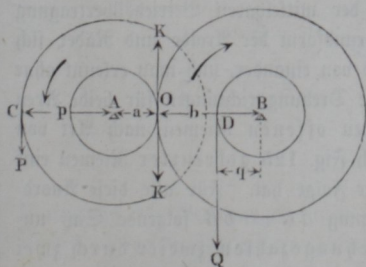
Wenn diese Verschiedenheit in der Einwirkung der Räder auf einander auch von äußerster Bedeutung hinsichtlich der Ausführung und Anwendung derselben sein muß, wenn davon insbesondere die schädlichen Widerstände, z. B. der Reibung, wesentlich abhängig sind, so ist doch klar, daß hierdurch eine Verschiedenheit in dem kinematischen sowohl wie dynamischen Zusammenhange nicht bedingt sein kann. Die Veränderungen der Bewegungen sowie diejenigen der Geschwindigkeiten und demnach also auch der Kräfte, abgesehen von den schädlichen Nebenhindernissen, sind unabhängig von der Art der Bewegungsübertragung und daher für die unter 1 bis 4 angeführten Gruppen unter sonst gleichen Verhältnissen dieselben.

Es soll im Folgenden dieser kinematische und der dynamische Zusammenhang der Räder zunächst untersucht werden, wobei es nach der vorstehenden Bemerkung klar ist, daß die gefundenen Resultate ebenso gut für Frictions- wie für Zahnräder, für Riemen- wie für Kettenbetrieb gültig sein müssen. An diese Untersuchung des geometrischen Zusammenhanges soll sich dann die aus dem physikalischen Charakter der Betriebsübertragung folgende anschließen.

Räder für parallele Axen. Der einfachste und häufigste Fall der §. 41. Räderverwendung ist gegeben, wenn eine Axc A , Fig. 122, welche sich mit

Fig. 122.

Fig. 123.



gleichmäßiger Geschwindigkeit dreht, einer zu ihr parallelen zweiten Axc B ebenfalls eine gleichmäßige Rotationsbewegung mittheilen soll. Bezeichnet

α die Winkelbewegung der Welle A in einer gewissen Zeit und β den Drehungswinkel von B in derselben Zeit, so muß das Verhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ dieser beiden Bewegungen fortwährend constant sein, wenn eine gleichmäßige Drehung von A eine eben solche von B zur Folge haben soll. Es ist bereits in der Einleitung, §. 27, näher ausgeführt worden, daß dieser Bewegungsart zwei normale Kreiscylinder als Momentanaxenflächen entsprechen, deren geometrische Axen mit den Wellenaxen A und B zusammenfallen, und deren Halbmesser a und b durch die Beziehung gegeben sind, daß

$$a\alpha = b\beta$$

oder

$$a : b = \beta : \alpha.$$

Die zu dieser Bewegung gehörenden Polbahnen sind daher zwei um A resp. B beschriebene Kreise AO und BO , Fig. 122 und 123 (a. v. S.), welche sich in O berühren. Dieser Punkt O , welcher also durch die Beziehung $AO : BO = \beta : \alpha$

gefunden wird, liegt entweder in der Strecke zwischen den Mittelpunkten A und B , wenn die Umdrehungsrichtungen der Axen die entgegengesetzten sind, Fig. 122, oder außerhalb der Geraden AB , Fig. 123, bei gleichen Umdrehungsrichtungen. In diesem Falle muß O , wie leicht zu erkennen ist, auf derjenigen Verlängerung von AB liegen, welche über den Axenpunkt der schneller gehenden Welle hinausgeführt ist, denn es kann in Fig. 123 der Berührungspunkt O nur dann die gezeichnete Lage haben, wenn $\alpha > \beta$ ist, weil man $BO > AO$ hat.

Diese Aroide werden nun in der Praxis als materielle Cylinder ausgeführt und entsprechen dann die beiden durch Fig. 122 und 123 dargestellten Fälle den Zahn- oder Frictionsrädern mit äußerem resp. innerem Angriff, und pflegt man diese Räder bei der Uebertragung durch Zähne auch Stirnräder zu nennen. Bei der mittelbaren Betriebsübertragung durch Riemen oder Ketten wird die Grundform der Aroide und Räder sich nicht ändern, sondern nur deren Abstand von einander, und man erkennt ohne Weiteres, daß der Fall, in welchem die Drehungsrichtungen für beide Axen übereinstimmen sollen, einen sogenannten offenen Riemen nach Art von Fig. 124 erfordert, während ein nach Fig. 125 gekreuzter Riemen eine Umkehrung der Bewegungsrichtung zur Folge hat. Für alle diese Anordnungen hat der aus der Grundgleichung $a\alpha = b\beta$ folgende Satz unbeschränkte Gültigkeit, daß die Umdrehungszahlen zweier durch zwei Räder verbundenen Axen sich umgekehrt wie die Halbmesser dieser Räder verhalten. Das kleinere Rad macht bei diesen Räderengriffen immer die größere Anzahl von Umdrehungen, die Umfangsbewegung ist bei beiden Rädern stets von gleicher Größe.

Setzt man bei unmittelbarer Uebertragung die Arententfernung $a + b$ gleich d und bezeichnet das Umsetzungsverhältniß $\frac{a}{b} = \frac{\beta}{\alpha}$ mit n , so hat man

$$a\alpha = (d - a)\beta,$$

woraus

$$a = d \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{d}{1 + \frac{1}{n}}$$

folgt. Ebenso ist

$$b = d \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{d}{1 + n}.$$

Aus dem Obigen ergibt sich weiter, daß die Räder nicht nur ein Mittel zur Bewegungsübertragung überhaupt abgeben, sondern daß sie neben der

Fig. 124.

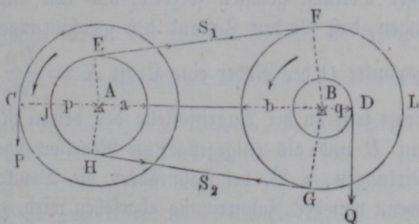
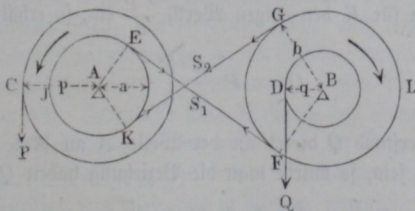


Fig. 125.



Umführung der Bewegungsrichtung auch eine beliebige Veränderung der Umdrehungsgeschwindigkeit ermöglichen. Diese letztere Eigenschaft der Räder ist ganz besonders als die Veranlassung zu ihrer häufigen Verwendung zu erkennen, denn die Nothwendigkeit einer Geschwindigkeitsveränderung von Drehbewegungen tritt dem Constructeur fast überall entgegen.

Es ist in dem zweiten Theile dieses Werkes zur Genüge erörtert, daß die Motoren

ihre vortheilhafteste Leistung nur bei gewissen, zwischen engen Grenzen liegenden Geschwindigkeiten der Kraftmaschine ausüben. Da nun aber andererseits bei der Betreibung einer Arbeitsmaschine irgend welcher Art ebenfalls eine gewisse, durch Rücksichten der betreffenden Fabrication bestimmte Geschwindigkeit als die vortheilhafteste geboten ist, so erklärt sich die Nothwendigkeit von Mitteln zur Ueberführung einer Geschwindigkeit in eine andere von selbst, denn nur in selteneren Fällen wird die vortheilhafteste Geschwindigkeit der Kraftmaschine mit derjenigen der Arbeitsmaschine übereinstimmen.

Jede Veränderung in der Geschwindigkeit hängt natürlich innig mit einer Veränderung in den Verhältnissen der einwirkenden Kräfte zusammen, wie dies schon ganz allgemein aus dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten (Thl. I, §. 85) folgt. Wirkt etwa an der treibenden Welle *A*, Fig. 122 und 123, eine Kraft *P* an einem Hebelsarme $AC = p$, also ein Moment Pp , so folgt, wenn vor der Hand alle schädlichen Nebenhindernisse der Reibung u. außer Betracht gelassen werden, aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, daß für den Zustand der gleichförmigen Bewegung an dem Berührungspunkte *O* der Räder eine Kraft $K = \frac{Pp}{a}$ ausgeübt werden

muß. Diese Kraft tritt an der Angriffsstelle der beiden Räder als Action des Rades *A* auf *B* und als entgegengesetzte Reaction von *B* auf *A* auf. Diese beiden Wirkungen, z. B. bei Zahnrädern die Drücke der Zähne auf einander, sind, wenn von der Zahnreibung abgesehen wird, gleich groß. Die Kraft *K* aber am Halbmesser $BO = b$ des Rades *B* wird für den Zustand der gleichförmigen Bewegung einem Widerstande *Q* am Hebelsarme $BD = q$ das Gleichgewicht halten, welcher durch $Kb = Qq$ gegeben ist.

Setzt man hierin für *K* den obigen Werth $\frac{Pp}{a}$ ein, so erhält man

$$Q = P \frac{p}{q} \frac{b}{a}.$$

Würde der Widerstand *Q* direct an der Welle *A* an dem gleichen Hebelsarme *q* wirksam sein, so würde man die Beziehung haben $Qq = Pp$, also wäre dann $Q = P \frac{p}{q}$. Durch Einschaltung der beiden Räder und Verlegung des Widerstandes *Q* an die Welle *B* erlangt man also bei Anwendung einer und derselben Kraft *P* die Möglichkeit, einen in dem Verhältnisse $\frac{b}{a}$ größeren Widerstand *Q* zu überwinden, als dies bei jener directen Wirkung des Widerstandes an der Welle *A* möglich ist. Hierin liegt die Erklärung für die Bedeutung der Räder bei allen Winden und Hebevorrichtungen, bei

denen es sich darum handeln muß, mit einer geringen Kraft P bedeutende Lasten zu überwinden. Man erreicht diesen Zweck im Allgemeinen durch ein- oder mehrmalige Einschaltung solcher Räderpaare ab , wie hier angenommen, zwischen der Aze, an welcher die Kraft P und derjenigen, an welcher die Last Q wirkt. Ein solches Räderpaar a und b pflegt man bei Winden und anderen Vorrichtungen wohl mit dem Namen Vorgelege zu bezeichnen und unterscheidet, je nach der Anzahl der zwischengeschalteten Räder, Winden oder Einrichtungen mit einfachem, doppeltem, auch dreifachem Vorgelege. Die Wirkung jedes solchen Vorgeleges besteht nach dem Obigen immer in einer Verlangsamung der Geschwindigkeit und daher in einer Steigerung der Kraft im Verhältniß $b : a$ und es folgt daraus, daß in allen Fällen, wo an möglichster Druckvergrößerung gelegen ist, das Rad b thunlichst groß gegen a genommen werden muß. Praktische Rücksichten eines guten Betriebs und der möglichen Ausführbarkeit bestimmen hierbei hauptsächlich die Grenze, bis zu welcher man den Werth $\frac{b}{a}$ wird ausdehnen können, wie aus späteren Ermittlungen folgen wird. Die größten Werthe, die man dem Verhältnisse $\frac{b}{a}$ bei Winden giebt, betragen selten mehr als 8, während man bei Transmissionswellen und überhaupt beim Betrieb von Maschinen das Verhältniß in der Regel viel kleiner, meist nicht über 4 oder 5 zu nehmen pflegt. Es ist klar, daß, wenn es sich nur um die Bewegungsübertragung ohne Geschwindigkeitsänderung handelt, man $a = b$ machen wird. Daß mit der Steigerung des durch die Kraft P zu überwindenden Widerstandes Q eine Vergrößerung der Leistung resp. ein Gewinn an mechanischer Arbeit nicht erzielt werden kann, ist an sich klar, da jede Vergrößerung des Druckes nur auf Kosten des Weges erkauft werden kann. Es hat im Gegentheil jede Zugabe von nothwendigen Maschinentheilen, wie die Räder sind, auch immer ein Auftreten neuer Nebenhindernisse, wie Reibungen *cc.*, im Gefolge, womit ein entsprechender Verlust an mechanischer Arbeit verbunden ist, dessen Betrag weiter unten ermittelt werden soll. Jedenfalls wird hierdurch der ökonomische Effect der Maschinenanlage herabgezogen, und man kann im Allgemeinen den Satz aufstellen, daß die Vollkommenheit eines Mechanismus in dynamischer Hinsicht um so größer sein wird, aus je weniger beweglichen Theilen derselbe zusammengesetzt ist, und je einfacher der ganze Mechanismus ist. Von diesem Gesichtspunkte aus muß man nicht in der Nothwendigkeit, einen Mechanismus durch Zusatz neuer Theile complicirt zu machen, sondern in der Möglichkeit, denselben durch Weglassung vorhandener Organe zu vereinfachen, eine rationelle Verbesserung erblicken.

Beispiele. 1) Die Welle A einer Dampfmaschine macht pro Minute 36 Umdrehungen und soll durch das 4 Meter große gezahnte Schwungrad eine

Transmissionswelle B mit 90 Umdrehungen pro Minute getrieben werden, wie groß ist das Zahnrad auf dieser Welle zu machen?

Der gesuchte Durchmesser $2b$ des Zahnrades ergibt sich aus

$$90 : 36 = 4 : 2b; 2b = 1,6 \text{ Meter.}$$

2) Das Mühleisen eines Mahlgangs trägt eine Riemscheibe von 0,8 Meter Durchmesser und empfängt seine Bewegung von der 2 Meter großen Scheibe auf einer Königswelle, welche minütlich 50 Umdrehungen macht, mit welcher Geschwindigkeit wird der Stein umgetrieben?

Die Umdrehungszahl n der Mühlschindel folgt aus

$$0,8 : 2 = 50 : n \text{ zu } n = 125.$$

3) Eine einfache Bodenwinde mit einer Seiltrommel von 300 Millim. Durchmesser trägt auf der Ase der letzteren ein Rad von 1,2 Meter Durchmesser, in welches ein 180 Millimeter großes Getriebe auf der Kurbelwelle eingreift. Welche Kraft würde ein Arbeiter an einer 0,400 Meter langen Kurbel aufwenden müssen, um eine an dem Seile hängende Last von 250 Kilogramm aufzuwinden, wenn schädliche Reibhindernisse nicht vorhanden sein würden?

Man hat

$$Q = P \frac{p}{q} \frac{b}{a},$$

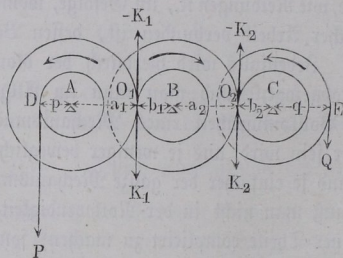
oder nach Einsetzung der Werthe:

$$250 = P \frac{0,400}{0,150} \frac{1,2}{0,180},$$

woraus $P = 14,1$ Kilogramm folgt.

§. 42. **Mehrfache Vorgelege.** Wenn das Umsetzungsverhältniß, d. h. das Verhältniß der Umdrehungsgeschwindigkeiten zweier durch Räder zu verbindenden Axen zu groß ist, um durch ein einziges Räderpaar oder Vorgelege erzielt werden zu können, so wendet man mehrere derselben in solcher Art an, wie durch Fig. 126 zur Anschauung gebracht ist. Hier wird die Bewegung der Welle A auf diejenige B durch die Räder a_1 und b_1 übertragen

Fig. 126.



und in derselben Weise von B auf C durch die Räder a_2 und b_2 fortgepflanzt. Hat die Ase A die Winkelgeschwindigkeit α oder, was auf dasselbe

hinausläuft, macht sie in einer bestimmten Zeit α Umdrehungen, so ergibt sich wie oben für die Welle B eine Geschwindigkeit von $\beta = \alpha \frac{a_1}{b_1}$ und für die Axe C eine solche

$$\gamma = \beta \frac{a_2}{b_2} = \alpha \frac{a_1}{b_1} \frac{b_2}{a_2}.$$

Ebenso findet man für das Verhältniß der Kraft P zu dem an C wirkenden Widerstande Q die Beziehung:

$$Qq = Pp \frac{b_1}{a_1} \frac{b_2}{a_2},$$

während die in den Angriffspunkten O_1 und O_2 der Räder auftretenden Druckkräfte sich entsprechend berechnen zu:

$$K_1 = P \frac{p}{a_1}$$

und

$$K_2 = K_1 \frac{b_1}{a_2} = P \frac{pb_1}{a_1 a_2} = Q \frac{q}{b_2}.$$

Man erkennt hieraus ohne Weiteres, daß das Umsetzungsverhältniß für die Geschwindigkeiten, beziehungsweise Kräfte bei Anordnung mehrerer Räderpaare durch das Product aus den Verhältnissen aller einzelnen Räderpaare gegeben ist.

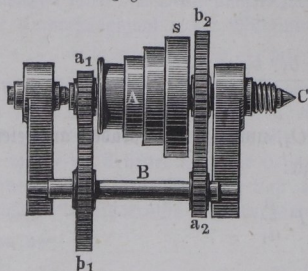
In Bezug auf die Umkehr der Bewegungsrichtungen gilt hier natürlich für jedes einzelne Vorgelege das im vorigen Paragraphen Gesagte, und man kann insbesondere bemerken, daß eine Welle, welche wie C in Fig. 126, von einer anderen A ihre Bewegung unter zweimaliger Umkehrung erhält, selbstredend in demselben Sinne wie diese umläuft.

Das totale Umsetzungsverhältniß eines aus mehreren Vorgelegen zusammengesetzten Mechanismus ist $\frac{b}{a} = \frac{b_1 b_2 \dots}{a_1 a_2 \dots}$ offenbar um so größer, je kleiner die antreibenden Räder $a_1 a_2 \dots$ und je größer die getriebenen $b_1 b_2 \dots$ sind. Würde man für den größten bei Winden praktisch zulässigen Werth jedes einzelnen Umsetzungsverhältnisses etwa den oben erwähnten Betrag von 8 annehmen, so gestattete die Anordnung eines doppelten Vorgeleges etwa eine 64fache und die eines dreifachen eine gegen 500fache Umsezung. Eine größere Anzahl von Vorgelegen als drei kommt bei Winden wohl niemals vor, und wenn bei verwickelten Transmissionen und Arbeitsmaschinen zuweilen eine noch öftere Bewegungsübertragung angeordnet ist, so ist der Grund meist nicht in der Erreichung eines möglichst großen Umsetzungsverhältnisses zu suchen, sondern liegt darin, daß man überhaupt durch

die Nothwendigkeit, gewisse Bewegungen an verschiedene Axen mitzutheilen, zu öfterer Uebertragung gezwungen ist.

Während man bei der Construction insbesondere von Windwerken und Hebevorrichtungen mit mehrfachen Vorgelegen meist die durch Fig. 126 dargestellte Anordnung neben einander angeordneter Wellen wählt, kommt bei Arbeitsmaschinen, z. B. bei Drehbänken, sehr häufig eine solche Ausführung

Fig. 127.



des doppelten Vorgeleges vor, Fig. 127, bei welcher die Betriebsaxe A mit der getriebenen Welle C in dieselbe Gerade hineinfällt, zu welchem Zwecke natürlich die eine dieser beiden Axen, hier die treibende A, hohl und auf der getriebenen lose drehbar gemacht wird. Die in Gestalt einer Stufenscheibe (s. dort) ausgeführte lose auf C drehbare Axe A ist mit dem Rade a_1 fest verbunden und be-

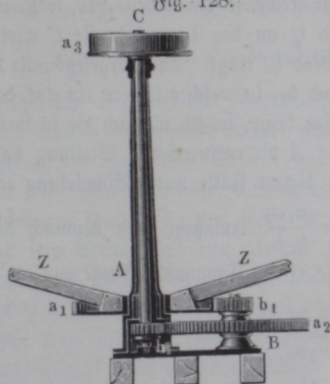
treibt durch dasselbe das Rad b_1 auf der Vorgelegswelle B, welche weiter durch a_2 das auf der Spindel C befestigte Rad b_2 umdreht. Für diese Anordnung gilt das nämliche Bewegungsgesetz, wie für die in Fig. 126 dargestellte und wird durch eine Drehung der Welle A um α eine Umdrehung von C im Betrage $\gamma = \alpha \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$ veranlaßt. Diese zusammenge-

drängte Anordnung wird hauptsächlich deswegen gewählt, weil sie den Vortheil gewährt, daß man die beiden Vorgelege leicht außer Thätigkeit bringen kann, wenn man die röhrenförmige Axe A direct mit der Spindel C verbindet, etwa durch einen die Scheibe s mit dem Rade b_2 vereinigenden Schraubenbolzen, wobei natürlich ein Ausschalten der Räder durch Verschieben der Vorgelegswelle B oder durch sonst ein Mittel erforderlich ist. Auch zur Vergrößerung der Geschwindigkeit ist eine ähnliche Anordnung gewählt worden, so z. B. bei dem von Pinet*) angegebenen Göpel, Fig. 128, bei welchem das durch die Zugbäume Z der Pferde umgedrehte Rad a_1 lose drehbar auf dem cylindrischen Ansätze einer festen gußeisernen Säule A sich befindet, in deren Mitte die getriebene Welle C aufgestellt ist. Die Vorgelegswelle B ist hier durch einen in der Grundplatte befestigten Bolzen vertreten, welcher die Räder b_1 und a_2 aufnimmt, während die getriebene Welle C mittelst der oben aufgesetzten Riemscheibe a_3 Gelegenheit zu einer dritten Uebertragung der Bewegung nach der Drehmaschine bietet.

*) S. Polyt. Centralblatt 1856. S. 1158.

Beispiel. Wenn an dem Göpelwerke, Fig. 128, das von den Pferden direct umgedrehte Rad a_1 sowohl wie das auf der Vorgelegswelle befindliche Rad a_2 jedes einen Halbmesser von 0,8 Meter und jedes der kleineren Räder b_1 und b_2 einen solchen von 0,12 Meter hat, wie groß muß die Riemscheibe b_3 auf einer Dreschmaschine gewählt werden, die von der 1 Meter im Durchmesser großen Riemscheibe a_3 angetrieben wird, wenn die Dreschtrommel bei 2 Umgängen der Pferde pro Minute 600 Umdrehungen machen soll?

Fig. 128.



jedes einen Halbmesser von 0,8 Meter und jedes der kleineren Räder b_1 und b_2 einen solchen von 0,12 Meter hat, wie groß muß die Riemscheibe b_3 auf einer Dreschmaschine gewählt werden, die von der 1 Meter im Durchmesser großen Riemscheibe a_3 angetrieben wird, wenn die Dreschtrommel bei 2 Umgängen der Pferde pro Minute 600 Umdrehungen machen soll?

Man findet den Durchmesser b_3 der betreffenden Scheibe aus

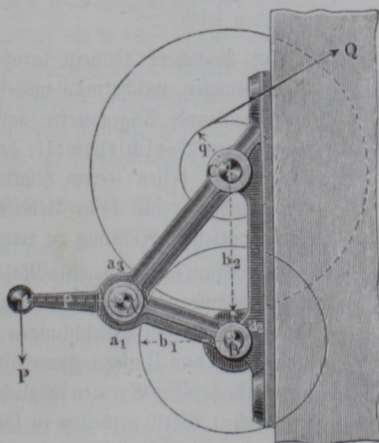
$$600 = 2 \cdot \frac{0,8}{0,12} \frac{0,8}{0,12} \frac{1,0}{b_3}$$

zu

$$b_3 = 0,148 \text{ Meter.}$$

Veränderliche Umsetzung. In vielen Fällen ist es wünschens- §. 43.
werth, das Umsetzungsverhältniß zwischen zwei Wellen bald größer, bald kleiner zu haben, dies ist z. B. bei Windwerken und Kraneen der Fall, wo eine größere zu hebende Last ein größeres Umsetzungsverhältniß nöthig macht, während bei einer geringeren Last das Vorhandensein der großen Umsetzung die Bewegung zwar nicht hindern, aber unnöthigerweise verzögern würde. Man pflegt daher in solchen Fällen die Anordnung wohl so zu treffen, daß je

Fig. 129.

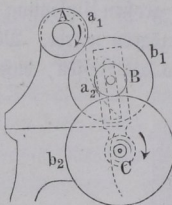


nach Umständen die Uebertragung der Umdrehung bald mittelst eines einzigen Vorgeleges, bald mit Hülfe zweier bewirkt werden kann, wie aus Fig. 129 (a. v. S.) ersichtlich ist. Hier stellt A die treibende Kurbelwelle vor, während der von der Last ausgeübte Widerstand Q an der Trommelwelle C wirkt, welche neben der Trommel ein größeres Rad b_2 trägt. Die Vorgelegswelle B trägt wie immer die beiden Räder a_2 und b_1 , in welches letztere ein auf der Kurbelwelle A sitzendes Rad a_1 eingreifen kann, sobald nämlich die in ihrer Längenrichtung verschiebbliche Kurbelwelle A die entsprechende Stellung hat. Die Umdrehungsgeschwindigkeit wird in diesem Falle unter Einwirkung der beiden Räderpaare in dem Verhältnisse $\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$ ermäßigt und demnach die Kraft P an der Kurbel zu einem Drucke Q am Trommelumfang von

$$Q = P \frac{p}{q} \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}$$

gesteigert. Ist nun eine geringere als diesem Drucke Q entsprechende Last zu heben, so hat man nur die Kurbelwelle nach ihrer Axenrichtung so weit zu verschieben, bis ein auf ihr fest angebrachtes Rad a_3 in Wirkung mit b_2 tritt, in welchem Falle die Räder a_1 und b_1 außer Eingriff kommen, so daß nunmehr das Umsetzungsverhältniß wegen des nun allein zur Wirkung

Fig. 130.

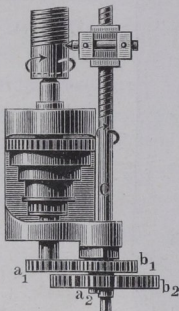


kommenden Räderpaars a_3 und b_2 durch $\frac{a_3}{b_2}$ gegeben ist, und die Kraftsteigerung durch

$$Q = P \frac{p}{q} \frac{b_2}{a_3}$$

gefunden wird.

Auf ähnlichem Princip beruhen auch manche Vorrichtungen, welche man insbesondere bei Hobelmaschinen und Sägegattern anwendet, um der sogenannten Vorschiebewelle des Schlittens oder Wagens zu dessen leerem Rücklaufe eine größere Geschwindigkeit als beim Arbeitsgange und nach entgegengesetzter Richtung zu ertheilen.



Interessant und für gewisse Maschinen, namentlich die Drehbänke und Spinnereimaschinen von Wichtigkeit sind diejenigen Einrichtungen, deren man sich bedient, um dem Umsetzungsverhältnisse zweier Axen innerhalb gewisser Grenzen möglichst genau jeden erforderlichen Werth ertheilen zu können. Die Vorrichtung, wie sie zu dem Zwecke gebraucht wird, um von der Drehbanks-

spindel *A*, Fig. 130, einer Drehbank die den Stichel führende Schraubenspinde oder Leitspinde *C* mit der gewünschten Geschwindigkeit zu bewegen, besteht in dem gewöhnlichen aus der Figur erkenntlichen doppelten Vorgelege

$\frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2}$, welchem man solche Einrichtung gegeben hat, daß sämtliche Räder

durch solche von anderem Durchmesser ersetzt werden können. Hierzu hat man nämlich eine gewisse Anzahl von sogenannten Versatzrädern zur Verfügung, von denen jedes einzelne mit jedem anderen zusammenwirken kann, und aus denen man daher beliebig vier auswählen und in den Mechanismus einschalten kann. Zu dem Ende ist der Vorgelegesholzen *B* so anzubringen, daß sein Arenabstand von *A* und *C* nach Bedürfnis abgeändert werden kann, was durch einen mit einem Schlig versehenen drehbaren Bügel leicht ermöglicht wird. Um ein Urtheil darüber zu gewinnen, daß man durch eine solche Anordnung bei geeigneter Wahl der einzelnen Räderdurchmesser jedem beabsichtigten Umsetzungsverhältnisse außerordentlich nahe kommen kann, bedarf es nur folgender Betrachtung. Ist im Ganzen eine Anzahl von *n* verschiedenen Versatzrädern vorhanden, so kann man aus diesen *n* Rädern offenbar dadurch, daß man jedes von ihnen mit jedem der übrigen zusammenarbeiten läßt, $n(n-1)$ verschiedene Vorgelege bilden. Nimmt man zwei der

Räder für ein solches Vorgelege, etwa zur Bildung von $\frac{a_1}{b_1}$ heraus, so gestatten in ähnlicher Art die übrigen $n-2$ Räder noch eine $(n-2)(n-3)$ malige Vorgelegebildung, aus welcher Anzahl man nach Belieben irgend eins für $\frac{a_2}{b_2}$ wird wählen können. Daher ergibt sich die Anzahl der möglichen Zusammenstellungen von je 4 Rädern aus den *n* vorhandenen offenbar zu

$$N = n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Nimmt man z. B. *n* nur gleich 12, so folgen $N = 11880$, wogegen 20 Räder schon über hunderttausend Combinationen ergeben, von denen übrigens je zwei und zwei demselben Umsetzungsverhältnisse entsprechen. Die Grenzen, innerhalb deren sich die Verhältnißzahlen für alle Zusammenstellungen be-

wegen, finden sich offenbar durch $\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$ und $\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}$, wenn man für *a*₁ und *a*₂

die beiden kleinsten und für *b*₁ und *b*₂ die beiden größten Räder aussucht. Es kann hier bemerkt werden, daß, da man diese Räder stets als Zahnräder ausführt, deren Umfänge beziehungsweise Durchmesser sich daher wie ganze Zahlen verhalten müssen, es mittelst dieser Einrichtung natürlich nur möglich ist, solche Umsetzungsverhältnisse darzustellen, welche durch ganze Zahlen ausdrückbar sind; wogegen irrationale Verhältnisse nicht in voller Schärfe erreichbar sind. Man kann aber schon aus der großen Anzahl der möglichen Zusammenstellungen entnehmen, daß die einzelnen Werthe der Um-

setzungsverhältnisse so wenig von einander abweichen werden, daß man in der Praxis mit genügender Schärfe das gesuchte Verhältniß erlangen kann. Man verwendet in der Regel beim Gebrauche eine zu dem Sätze berechnete Tabelle. Zum Schraubenschneiden auf der Drehbank und zur Erlangung des richtigen Verzugs bei den Streckköpfen der Spinnereimaschinen bedient man sich der Verzugsräder ganz allgemein.

Beispiel. Wenn man an der Kettentrommel von 0,15 Meter Halbmesser einer Krahnwinde mit Einrechnung aller Nebenhindernisse einen Zug der Kette von 2400 Kilogramm anzunehmen hat, wie ist dann das Umsetzungsverhältniß für die beiden zwischen der Trommel und der Kurbelwelle anzubringenden Vorgelege $\frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2}$ zu wählen, wenn ein von den Arbeitern an der 0,4 Meter langen Kurbel ausgeübter Druck von zusammen 30 Kilogramm zur Bewegung der Last genügen soll?

Man hat $Qq = Pp \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}$, Fig. 129, daher im vorliegenden Falle:

$$2400 \cdot 0,15 = 30 \cdot 0,4 \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2},$$

woraus

$$\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} = 30.$$

Wählt man $\frac{b_1}{a_1} = 5$, indem man etwa $a_1 = 0,08$ und $b_1 = 0,4$ Meter annimmt, so folgt $\frac{b_2}{a_2} = 6$, was etwa durch einen Halbmesser des Getriebes $a_2 = 0,1$ Meter und des Trommelrades $b_2 = 0,6$ Meter erreicht werden könnte.ückt man das Vorgelege $\frac{a_1}{b_1}$ aus, indem man ein Rad a_3 auf der Kurbelaxe in b_2 eingreifen läßt, so würde der zu überwindende Kettenzug, wenn, wie gewöhnlich der Fall ist, $a_3 = a_2$ angenommen wird,

$$Q = P \frac{p}{q} \frac{b_2}{a_3} = 30 \frac{0,4}{0,15} \frac{0,6}{0,1} = 480 \text{ Kilogramm}$$

sein. Wäre indeß die Bedingung gestellt, daß die Winde bei der Wirkung des einen Vorgeleges für einen Widerstand der Kette von 400 Kilogramm geeignet sein solle, so hätte man a_3 aus

$$400 = 30 \frac{0,4}{0,15} \frac{0,6}{a_3}$$

zu $a_3 = 0,12$ Meter, zu bestimmen.

Der Druck K am Umfange der Räder wäre dann

$$K = P \frac{p}{a_3} = 30 \frac{0,4}{0,12} = 100 \text{ Kilogramm},$$

während bei einem Widerstande von $Q = 2400$ Kilogramm die Räderdrucke sich bestimmen zwischen a_1 und b_1 durch:

$$K_1 = P \frac{p}{a_1} = 30 \frac{0,4}{0,08} = 150 \text{ Kilogramm}$$

und zwischen a_2 und b_2 durch:

$$K_2 = P \frac{p}{a_1} \frac{b_1}{a_2} = 30 \frac{0,4}{0,08} \frac{0,4}{0,1} = 600 \text{ Kilogramm.}$$

Zwischenräder. Wenn die auf den beiden Axen A und B befindlichen Räder a und b nicht direct mit einander im Eingriffe stehen, sondern zwischen ihnen ein drittes c , Fig. 131, oder zwei Zwischenräder c und d , Fig. 132, eingeschaltet sind, so ist klar, daß im ersten Falle wegen der zweimaligen Umkehrung bei O_1 und O_2 die Axen A und B in gleichem Sinne umlaufen, während in dem Falle Fig. 132 bei der dreimaligen

Fig. 131.

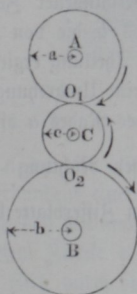
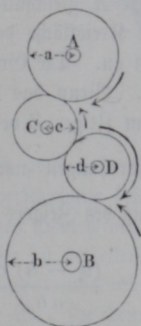


Fig. 132.



Umkehrung die Bewegungsrichtungen entgegengesetzt sind. ¹ Ueberhaupt gilt für alle derartigen Fälle der wiederholten Bewegungsübertragung, daß eine gerade Anzahl von Umkehrungen die Richtung der Umdrehung ungeändert läßt und eine ungerade Anzahl diese Richtung umkehrt. Selbstredend gelten hierbei innere Radeingriffe ebenso wenig als Umkehrungen, wie die Uebertragung durch offene Riemen.

Auf die Größe der Geschwindigkeit haben diese Zwischenräder keinen Einfluß, denn wie man leicht erkennt wird die Geschwindigkeit β der Axe B in Fig. 131 durch

$$\alpha \frac{a}{c} \frac{c}{b} = \alpha \frac{a}{b}$$

und in Fig. 132 durch

$$\alpha \frac{a}{c} \frac{c}{d} \frac{d}{b} = \alpha \frac{a}{b}$$

gegeben sein. Der Einfluß der Zwischenräder kann daher nur in dem etwaigen Wechsel der Bewegungsrichtung bestehen, weswegen man ihnen auch wohl den Namen Wechselräder beilegt.

Die Ausführung der Räder als gezahnte gestattet eine eigenthümliche Anordnung eines Wechselrades zu dem Zwecke, ein Zählwerk zu bilden. Setzt man nämlich voraus, daß die beiden Räder a und b , Fig. 131, nur sehr wenig verschieden sind, daß sie sich etwa verhalten wie 49 : 50, indem

das eine Rad a 49 und das andere b 50 Zähne hat (s. weiter unten), so ist es bei Zahnrädern möglich, die beiden Räder neben einander lose auf dieselbe Ase zu setzen und durch ein und dasselbe dritte Rad c zu verbinden, wie aus Fig. 133 ersichtlich ist. Offenbar wird hierbei das Verhältniß der Umdrehungen von a und b lediglich durch ihre Halbmesser resp. durch ihre Zähnezahlen gegeben sein, und die Größe des Rades c spielt dabei keine Rolle. Man bedient sich solcher Einrichtungen wohl zur Herstellung von Zählwerken in folgender Art. Soll die Umdrehungszahl einer schnell rotirenden Welle C gezählt werden, so versieht man dieselbe mit dem Rade c , welches in die beiden gedachten nur um einen Zahn verschiedenen Räder a und b eingreift; hiervon ist b lose und a fest auf einer gemeinschaftlichen Ase A angebracht, und ein mit der Ase A gleichfalls fest verbundener Zeiger z giebt auf der passend getheilten Kreisfläche des Rades b die von A gemachte Anzahl von Umdrehungen an. Die Größe der Theilung ergibt sich leicht aus folgender Betrachtung. Wenn das Rad c eine Umdrehung vollführt, so wird die Ase A mit dem Zeiger Z vermöge des Rades a offenbar $\frac{c}{a}$ und das Rad b ebenso $\frac{c}{b}$ Umdrehungen nach gleicher Richtung wie a machen. Die relative Verdrehung des Zeigers auf dem Zifferblatte beträgt daher

$$\frac{c}{a} - \frac{c}{b} = \frac{(b - a) c}{ab}.$$

Wären z. B. c mit 10 Zähnen, a und b mit 49 und 50 Zähnen versehen, so würde diese Größe

$$\frac{(50 - 49) 10}{50 \cdot 49} = \frac{1}{245}$$

sein, und es wäre daher die Scheibe des Rades b in 245 gleiche Theile zu theilen, um eine richtige Scala zu erhalten, in welcher jedem Theilstreiche eine Umdrehung der Welle A entspricht.

Streng genommen hat man es hier in c nicht mit einem Wechselrade zu thun, denn wenn a und b verschiedene Halbmesser haben, so kann deren Verbindung bei der gewählten Anordnung einer gemeinsamen Ase genau genommen nicht durch ein und dasselbe Rad c geschehen, und es ist die Ausführung nur wegen der geringen Differenz zwischen a und b und nur bei Zahnbetrieb möglich. Sollte nämlich die Anordnung correct sein, so wären auf der Ase A zwei Räder zu befestigen, von denen das eine mit a , das andere mit b in Wirkung kommt, und zwar von solcher Größe, daß die Summe der Halbmesser je zweier zusammenarbeitenden Räder gleich dem gemeinsamen Arenabstande ist. In der That kommt diese Anordnung, Fig. 134, in der Praxis, insbesondere bei Bohrwerken, vor, und dieselbe unterscheidet sich durchaus nicht von dem in Fig. 127 gezeichneten doppelten Drehbanksvorgelege. Man

beabsichtigt hier ebenfalls, wie bei den Zählwerken, Fig. 133, von der geringen Differenz der Umdrehungen zweier Arten Gebrauch zu machen. Hierbei

Fig. 133.

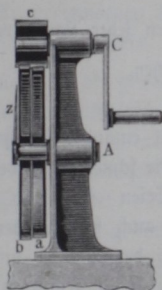
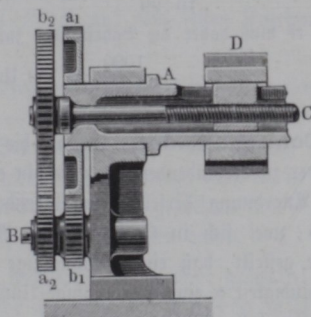


Fig. 134.



stellt *A* die sehr langsam sich umdrehende Bohrspindel vor, welche das mit ihr verbundene einer Längenverschiebung befähigte Bohrmesser *D* mit herumnimmt, das bestimmt ist, einen Hohlzylinder im Inneren auszufressen. Die zu diesem Zwecke dem Messer zu ertheilende sehr langsame axiale Verschiebung wird durch die Schraubenspindel *C* erreicht, deren Muttergewinde in dem Bohrkopfe *D* enthalten ist. Zu dem Ende trägt die Bohrspindel *A* das Rad *a*₁, und unmittelbar daneben ist die Schraubenwelle *C* mit einem nur wenig größeren Rade *b*₂ versehen. Ein am festen Gestell gelagerter Bolzen *B* dient als Vorgelegssaxe, indem die beiden auf ihm befestigten Räder *b*₁ mit *a*₁ und *a*₂ mit *b*₂ in Wirkung treten. Es ist nun nach dem Früheren ohne Weiteres klar, daß bei einer Umdrehung der Bohrspindel *A* der Schraube *C* eine Drehung im Betrage von $\frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2}$ ertheilt wird, in Folge wovon der Mutter der Schraube, welche erstere die eine Umdrehung der Spindel mitmacht, durch die relative Verdrehung der Schraubenspindel gegen die Mutter eine Verschiebung von

$$\left(1 - \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}\right) s = \frac{b_1 b_2 - a_1 a_2}{b_1 b_2} s$$

mitgetheilt wird, wenn *s* die Steigung der Schraube (s. Schrauben) bedeutet. Man hat es nun durch die geeignete Wahl von *a*₁, *a*₂, *b*₁ und *b*₂ ganz in seiner Gewalt, diese Verschiebung beliebig klein zu machen.

Beispiel. Wenn die Räder bei dem Bohrwerk, Fig. 134, die Zähnezahlen *a*₁ = 100, *b*₁ = 10, *a*₂ = 11 und *b*₂ = 99 haben, wie groß ist die Breite eines Bohrspahns, d. h. die Verschiebung des Bohrmessers bei einer Spindel-

drehung, wenn die Schraube C eine Ganghöhe von 12 Millimeter hat. Die Verschiebung berechnet sich, da man die Halbmesser der Räder ihren Zähnezahlen proportional anzunehmen hat, zu

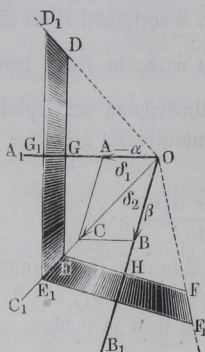
$$\frac{10.99 - 100.11}{10.99} 12 = 0,11 \cdot 12 = 1,33 \text{ Millimeter,}$$

und es muß daher die Bohrspindel zum Ausbohren jeder Länge von 1 Meter

$$\frac{1000}{1,333} = 750 \text{ Umgänge machen.}$$

- §. 45. **Conische Räder.** Wenn die beiden mit einander durch ein Paar Räder zu verbindenden Axen sich in einem Punkte schneiden, so bestimmt sich die Anordnung derselben in folgender Art. Seien AA_1 und BB_1 , Fig. 135, zwei sich in O schneidende Axen, und auch hier wieder die Aufgabe gestellt, daß eine gleichmäßige Umdrehung der Axe A mit der Geschwindigkeit α eine gleichmäßige Umdrehung von B in dem Betrage β veranlassen soll. Versetzt man wieder in der bekannten Art (s. Einleitung §. 27) zunächst die Axe A in Stillstand dadurch, daß man dem ganzen Systeme, d. h. beiden Axen eine Drehung im Betrage $-\alpha$ ertheilt, so lassen sich leicht die Momentanaxenflächen oder Aroide bestimmen. Man hat es jetzt nämlich mit einem Systeme zu thun, welches in jedem Augenblicke zweien Drehungen ausgesetzt ist, und zwar im Betrage $-\alpha$ um die Axe AA_1 und β um die Axe BB_1 , wobei die Werthe von α und β , auf deren Verhältniß es ja nur ankommt, beliebig klein, also auch unendlich klein vorausgesetzt werden können. Nach dem Parallelogramm der Rotationen (Einleitung, §. 22) lassen sich die beiden unendlich kleinen Drehungen um zwei sich schneidende Axen leicht zu einer resultirenden Drehung um eine Axe CC_1

Fig. 135.



zusammensetzen, welche durch den Schnittpunkt O hindurchgeht. Man erhält bekanntlich diese Axe ihrer Richtung und Größe nach in der Diagonale OC desjenigen Parallelogramms, dessen Seiten OA und OB mit den beiden Axen der Richtung nach zusammenfallen und ihrer Größe nach die Drehungsintensität, ihrer Richtung nach den Drehungssinn bezeichnen. Die so erhaltene Gerade OC ist also für den betrachteten Augenblick als die Momentanaxe für die Bewegung der Welle B anzusehen. Da nun das Verhältniß der Drehungsgeschwindigkeiten für die ganze Dauer ein constantes sein

soll, so wird auch die Lage der Momentanaxe CC_1 gegen die beiden Axen

stets dieselbe sein. Man erhält daher die gesuchten Momentanaxenflächen oder Aroide in den beiden Kegelmänteln, welche durch Rotation der Geraden CC_1 um die beiden Axen A und B entstehen. Die Bewegung der Axe B läßt sich daher bei festgestellter Axe A so auffassen, als ob die Axe B mit dem mit ihr verbundenen Kegelmantel COF auf dem festen Kegelmantel COD herumgerollt werde.

Wenn man jetzt die gemachte Voraussetzung wieder beseitigt, wonach die Axe A durch eine zusätzliche Bewegung — α festgestellt wurde, so erhält man den von Anfang an vorausgesetzten Bewegungszustand, dem gemäß beide Axen in den resp. Beträgen α und β gleichförmig rotiren, und es ist also deutlich, daß die Räder, welche eine Verförperung der gedachten Aroide sein müssen, die Form der gefundenen Kegelflächen zu erhalten haben.

Die Verhältnisse dieser Kegelflächen, welche also stets ihre gemeinsame Spitze im Durchschnittspunkte der beiden Axen haben müssen, ergibt sich ohne Weiteres aus dem Angeführten. Bezeichnet man die halben Winkel an der Spitze der Regel AOC mit δ_1 und BOC mit δ_2 , so hat man

$$\alpha : \beta = \sin \delta_2 : \sin \delta_1,$$

oder

$$\alpha \sin \delta_1 = \beta \sin \delta_2.$$

Es verhalten sich daher die Umdrehungsgeschwindigkeiten der Axen umgekehrt wie die Sinus der halben Spitzenwinkel. Zieht man von irgend einem Punkte E in der Berührungslinie der beiden Regel die Normalen EG und EH auf die Axen, so hat man offenbar

$$\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{EG}{EH} = \frac{a}{b},$$

wenn man unter a und b diese Normalen oder die Halbmesser der durch E gelegten kreisförmigen Kegelschnitte versteht.

Bezeichnet man mit n das Umsehungsverhältniß

$$n = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{b}{a}, \quad \text{so folgt ferner aus der Figur:}$$

so folgt ferner aus der Figur:

$$\tan \delta_1 = \frac{\beta \sin \delta}{\alpha + \beta \cos \delta} = \frac{\sin \delta}{n + \cos \delta}, \quad \tan \delta_2 = \frac{\sin \delta}{n + \cos \delta}$$

$$\tan \delta_2 = \frac{\alpha \sin \delta}{\beta + \alpha \cos \delta} = \frac{n \sin \delta}{1 + n \cos \delta},$$

wenn

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = AOB$$

den Axenwinkel bedeutet.

Legt man zu den Schnittebenen EGD und EHF durch einen anderen Punkt E_1 zwei parallele Ebenen $E_1 G_1 D_1$ und $E_1 H_1 F_1$, so erhält man zwei conische Scheiben $EE_1 D_1 D$ und $EE_1 F_1 F$, welche die Grundformen abgeben für die im vorliegenden Falle erforderlichen sogenannten conischen Räder, wodurch die Bewegungsübertragung zweier einander schneidenden Axen vermittelt wird. Da bei der Bildung dieser Räder oder Kegelschnitte die Wahl der Punkte E und E_1 an keine Bedingung geknüpft ist, so kann man diese Abschnitte oder Kegelscheiben auch beliebig größer oder kleiner erhalten, je nachdem man E und E_1 in größerem oder kleinerem Abstände von dem Durchschnittspunkte O der Axen annimmt. Es ergibt sich daraus, daß man für dieselben Axen A und B und bei demselben Umsetzungsverhältnisse eine unbegrenzte Anzahl conischer Räder anordnen kann, deren Halbmesser a und b an je zwei miteinander in Berührung kommenden Punkten in demselben Verhältnisse, nämlich in dem umgekehrten Umsetzungsverhältnisse der Geschwindigkeiten zu einander stehen. Bei der Verbindung paralleler Axen durch zwei Räder ist eine solche Freiheit offenbar nicht vorhanden, indem bei gegebener Axenentfernung und vorgeschriebenem Umsetzungsverhältnisse nur ein einziges Räderpaar möglich ist.

Nach dem Obigen ergibt sich nun in jedem Falle die Construction der gesuchten Räder leicht in folgender Art. Sind Fig. 136 und 137 die Axenrichtungen durch OA und OB gegeben, und man trägt auf denselben vom Durchschnittspunkte O aus die Stücken $OA = -a$ und $OB = \beta$

Fig. 136.

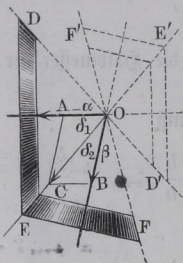
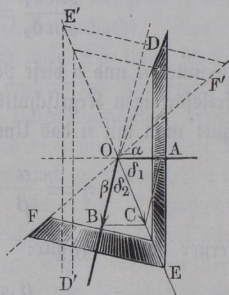


Fig. 137.

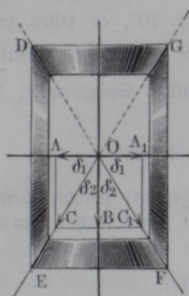


an, wobei man die Drehungsrichtung mit Rücksicht auf das in der Einleitung §. 3 Gesagte durch die Pfeilspitzen der Strecken OA und OB bezeichnet, so erhält man in jedem Falle in der Diagonale OC des Parallelogramms die

Erzeugungslinie der beiden Kegelmäntel, aus denen man nun durch Ebenen senkrecht zu den Axen die betreffenden Räder ED und EF in gewünschter Größe herauszuschneiden kann.

Da die gedachten Kegelmäntel zu beiden Seiten der Spitze O sich bis ins Unendliche fortsetzen, so kann man die betreffenden Räder natürlich auch auf jeder Seite von O anordnen, also z. B. auch in $E'D'$ und $E'F'$; dieselben entsprechen dann immer dem vorausgesetzten Drehungsinne der beiden Axen. Man ersieht auch aus den beiden Figuren, daß die durch dieselben dargestellten Fälle sich nur durch die entgegengesetzte Drehungsrichtung der Axe A unterscheiden, und daß die angegebene Construction daher zwei verschiedene Paare von Kegelflächen ergiebt, auch wenn die Größen des Axenwinkels und des Umsehungsverhältnisses gleich bleiben.

Fig. 138.



Diese beiden Paare von Momentan-axenflächen fallen jedoch, wie leicht erkennbar ist, in ein einziges Paar Kegelmäntel zusammen, sobald die Axen, Fig. 138, einen rechten Winkel mit einander bilden, indem in diesem speciellen Falle die Erzeugungslinie OC für die eine Drehungsrichtung von A dieselben Winkel mit den Axen bildet, wie die Erzeugungslinie OC_1 für die entgegengesetzte Drehungsrichtung von A . Es ist daraus ersichtlich, daß für die eine Bewegungsrichtung von A nach Belieben die Räderpaare ED und EF oder GF und GD gelten, während der entgegengesetzten Bewegung von A die Räder FG und FE , beziehungsweise DE und DG

Fig. 139.

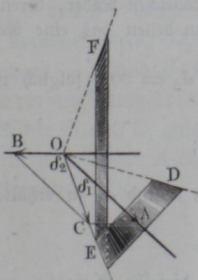
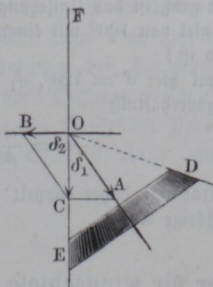


Fig. 140.



entsprechen. In Fig. 136 bis 138 bildet die Erzeugungslinie der Regel mit beiden Axenrichtungen spitze Winkel δ_1 und δ_2 , und es liegen in Folge

dessen die beiden Kegelflächen auf entgegengesetzten Seiten der Berührungslinie OC . Dieser Fall entspricht sonach dem äußeren Angriffe der Räder für parallele Axen. In Fig. 139 (a. v. S.) hingegen, in welcher der eine Winkel $\delta_2 > 90^\circ$ ist, liegen beide Kegelflächen auf derselben Seite der Berührungslinie, und man kann daher die Berührung eine innere nennen, entsprechend dem inneren Eingriffe bei den Rädern paralleler Axen. Als Grenzfall zwischen den eben erwähnten kann der in Fig. 140 dargestellte gelten, wobei der Winkel δ_2 der Erzeugungslinie OC mit der Axe OB gleich einem Rechten ist. In Folge dessen artet die zugehörige Kegelfläche hier in eine zur Axe OB normale Ebene aus und pflegt man daher das betreffende Rad EF ein Planrad zu nennen.

Beispiele: 1) Der Axenwinkel zweier Wellen beträgt 70° , es sollen zwei conische Räder für ein Umsetzungsverhältniß $n = \frac{\alpha}{\beta} = 3$ zwischen denselben angeordnet werden. Man findet durch Rechnung die halben Spigenwinkel der Regel aus

$$\tan \delta_1 = \frac{\sin 70^\circ}{3 + \cos 70^\circ} = 0,2812; \delta_1 = 15^\circ 42',$$

daher $\delta_2 = 54^\circ 18'$. Soll nun der äußere Berührungspunkt zwischen beiden Rädern um 1,2 Meter von dem Axendurchschnitte entfernt sein, so hat man die entsprechenden Halbmesser der Räder:

$$a = 1,2 \sin 15^\circ 42' = 0,325 \text{ Meter},$$

$$b = 1,2 \sin 54^\circ 18' = 0,975 \text{ Meter.} = 3a.$$

Bei einer Länge der Berührung in der Seite des Kegels gemessen von 0,1 Meter folgen ebenso die inneren Halbmesser a_1 und b_1 der Räder zu

$$a_1 = 1,1 \sin 15^\circ 42' = 0,298 \text{ Meter},$$

$$b_1 = 1,1 \sin 54^\circ 18' = 0,894 \text{ Meter} = 3a_1.$$

2) Wie groß ist das Umsetzungsverhältniß zweier conischen Räder, deren Axen einen Winkel von 120° mit einander bilden, und von denen das eine Rad ein Planrad ist?

Man hat hier $\delta = 120^\circ$, $\delta_1 = 90^\circ$ und daher $\delta_2 = 30^\circ$; folglich ist das Umsetzungsverhältniß

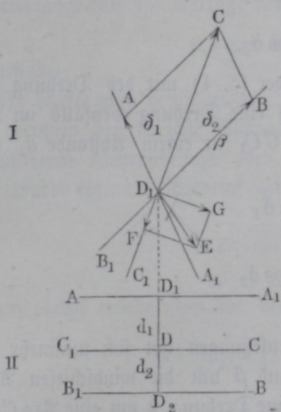
$$n = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = 0,5;$$

das Planrad hat daher doppelt so große Halbmesser a und a_1 zu erhalten als das zugehörige Rad.

§. 46. Räder für windschiefe Axen. Es sei dieselbe Aufgabe, wie im vorstehenden Paragraphen für einander schneidende Axen, nunmehr für den Fall zweier windschiefen Axen gegeben. In Fig. 141 I und II sind diese Axen AA_1 und BB_1 in zwei zu einander senkrechten Projectionsebenen I und II dargestellt, von denen I parallel mit den parallelen Ebenen angenommen

wurde, welche sich durch die zwei windschiefen Axen legen lassen. Demgemäß stellt offenbar $D_1 D_2 = d$ den normalen (kürzesten) Abstand der beiden Axen dar.

Fig. 141.



Zuvörderst denke man sich wiederum die eine Welle, etwa AA_1 , in absolute Ruhe dadurch versetzt, daß man dem ganzen Systeme, also jeder Aze, eine Drehung gleich und entgegengesetzt der von AA_1 , also im Betrage $-\alpha$ ertheilt denkt. Hierdurch wird die Welle BB_1 zweien Drehungen unterworfen, nämlich einer solchen um die eigene Aze B im Betrage β und einer anderen um A im Betrage $-\alpha$, wo die Größen α und β wieder unendlich kleine Winkelgrößen sein sollen. Die Bestimmung der Aroide für diesen Fall ist nun unter Berücksichtigung des in der Einleitung, §. 25, Gesagten leicht zu bewirken, indem sich danach die Bewegung

um zwei windschiefe Axen jederzeit durch eine bestimmte Schraubebewegung um eine gewisse Aze ersetzen läßt, zu deren Kenntniß man auf dem an obiger Stelle angedeuteten Wege direct gelangt. Zu dem Ende denke man die Aze BB_1 parallel zu sich selbst verschoben, bis sie sich mit AA_1 in dem Fußpunkte D_1 der gemeinschaftlichen Normale d schneidet, was immer geschehen darf (Einleitung §. 4), sobald man nur noch eine zu der Axenebene senkrechte Verschiebung im Betrage $2d \sin \frac{\beta}{2}$ oder bei kleinem

Winkel β von βd hinzufügt. Diese Verschiebung ist in I durch die zu BB_1 normale Strecke $D_1 E = \beta d$ vorgestellt. Man kann nun die beiden Drehungen $-\alpha$ und β nach dem Parallelogramm der Drehungen genau wie im vorigen Paragraphen zu einer resultirenden Drehung γ um eine durch D_1 gehende Aze CC_1 zusammensetzen, welche den Winkel der Axen $AD_1 B = \delta$ in zwei Theile $AD_1 C = \delta_1$ und $BD_1 C = \delta_2$ theilt, und wofür die Proportion gilt:

$$\frac{\alpha}{\sin \delta_2} = \frac{\beta}{\sin \delta_1} = \frac{\gamma}{\sin \delta}. \quad (\S. 22).$$

Diese resultirende Aze $D_1 C$ steht schief zu der Verschiebung $D_1 E = \beta d$, da letztere ja normal zu der einen Componente $D_1 B$ gerichtet ist, und man kann diese Verschiebung βd daher in zwei Componenten $D_1 F$ parallel zu $D_1 C$ und $D_1 G$ senkrecht dazu zerlegen. Man findet, da der Winkel

$$C_1 D_1 E = 90^\circ - \delta_2$$

ist, auf diese Weise die Componenten

$$D_1 F = \beta d \sin \delta_2$$

und

$$D_1 G = \beta d \cos \delta_2.$$

Die letztere Componente läßt sich nun wieder (§. 4) mit der Drehung um CC_1 vereinigen, und zwar resultirt daraus eine Drehung ebenfalls im Betrage γ um eine Axe, welche parallel zu CC_1 in einem Abstände d_1 von derselben sich befindet, welcher durch

$$\gamma d_1 = \beta d \cos \delta_2$$

zu

$$d_1 = \frac{\beta}{\gamma} d \cos \delta_2$$

gefunden wird.

Durch diese Zerlegungen und Zusammensetzungen hat sich nunmehr ergeben, daß die beiden Drehungen $-\alpha$ und β um die windschiefen Axen AA_1 und BB_1 sich ersetzen lassen durch eine Drehung γ um eine Axe CC_1 , die durch D im Abstände d_1 von AA_1 geht, welche parallel den beiden Parallelebenen der Axen liegt und deren Winkel δ_1 und δ_2 mit den letzteren gegeben sind durch die Gleichung

$$\frac{\alpha}{\sin \delta_1} = \frac{\beta}{\sin \delta_2} = \frac{\gamma}{\sin \delta}$$

sowie ferner durch eine der Axe CC_1 parallele Verschiebung im Betrage $\beta d \sin \delta_2$, wofür man auch setzen kann $\alpha d \sin \delta_1$. Diese beiden Bewegungen bilden aber zusammen eine Schraubenbewegung zur Axe CC_1 . Da nun die Umsezung der Bewegungen eine fortwährend constante ist, so folgt, daß das betreffende Aroid der bewegten Welle B diejenige Umdrehungsfläche sein muß, welche entsteht, wenn die mehrgedachte Gerade oder Momentanaxe CC_1 unter Festhaltung ihres Abstandes und ihrer Neigung gegen BB_1 um diese herumgedreht wird. Ebenso ist die hierzu gehörige, mit AA_1 fest verbundene Momentanaxenfläche die durch Umdrehung derselben Geraden um AA_1 entstehende Umdrehungsfläche. Die so entstehenden Umdrehungsflächen sind bekanntlich einschalige Umdrehungshyperboloide. Denkt man sich nunmehr die zusätzlich gegebene Drehung $-\alpha$ wieder beseitigt durch eine Umdrehung $+\alpha$, so steht jetzt AA_1 nicht mehr still, sondern nimmt eine Drehung $+\alpha$ an, während der Welle BB_1 nur noch ihre anfängliche Drehung $+\beta$ verbleibt, und man hat nunmehr den geforderten Bewegungszustand der beiden Axen herbeigeführt.

Man erkennt aus der vorstehenden Untersuchung, daß dieser Bewegungszustand sich erreichen läßt dadurch, daß man die gefundenen Momentanaxen-

flächen zu materiellen hyperboloidischen Rädern ausgebildet mit den Azen AA_1 und BB_1 fest verbindet, und nun aufeinander abwälzt, wobei außer dem Rollen derselben gleichzeitig noch ein Verschieben längs der jedesmaligen Berührungslinie im Betrage von

$$\alpha d \sin \delta_1 = \beta d \sin \delta_2$$

stattfindet.

Es dürfte noch von Interesse sein, das Theilungsverhältniß zu ermitteln, in welchem der kürzeste Abstand $d = D_1 D_2$, Fig. 142, II, durch die resultirende Schraubenaxe oder Erzeugungslinie CC_1 in D getheilt wird. Es wurde oben der Ausdruck gefunden:

$$D D_1 = d_1 = \frac{\beta}{\gamma} d \cos \delta_2.$$

Ganz ebenso würde man für den Abstand $D D_2 = d_2$ den Werth finden:

$$D D_2 = d_2 = \frac{\alpha}{\gamma} d \cos \delta_1.$$

Durch Division folgt hieraus

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\beta \cos \delta_2}{\alpha \cos \delta_1},$$

und darin

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2}$$

gesetzt, liefert schließlich:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_2} = \frac{D D_1}{D D_2}.$$

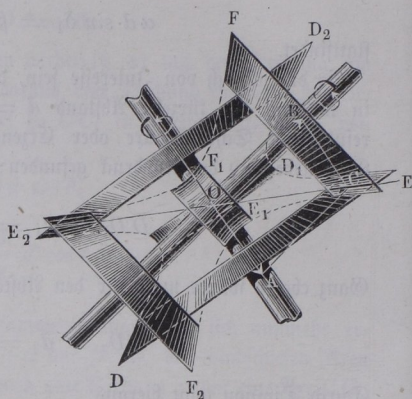
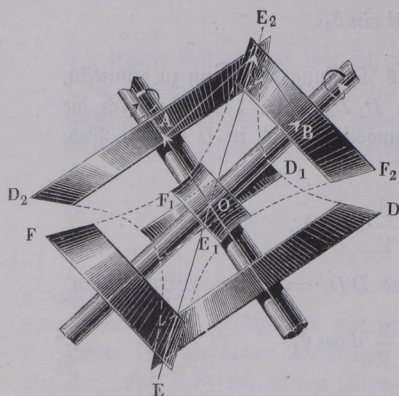
Diese Abstände d_1 und d_2 sind offenbar die Kehlkreishalbmesser der gefundenen Hyperboloide, und man kann daher die gewonnenen Resultate folgendermaßen in Worte fassen:

Bei den hyperboloidischen Rädern verhalten sich die Kehlkreishalbmesser direct wie die Tangenten der Winkel, unter denen die Berührungslinie gegen die Azen geneigt ist, während die Umdrehungsgeschwindigkeiten, also auch die Umdrehungszahlen den Sinus dieser Winkel umgekehrt proportional sind. In letzterer Hinsicht stimmen die hyperboloidischen Räder also gewissermaßen mit den conischen Rädern überein. Auch noch in anderer Hinsicht lassen sich gewisse Aehnlichkeiten der beiden Fälle sich schneidender und sich kreuzender Azen anführen, wie aus Folgendem zur Genüge hervorgeht. Zunächst ist auch bei den hyperboloidischen Rädern wie bei den conischen durch die Lage der Azen und das Umsetzungsverhältniß

die Größe der Räder noch keineswegs bestimmt, da man auch bei den Hyperboloiden durch Schnitte normal zu den Axen beider Körper in beliebigen Punkten der Berührungslinie EE_1E_2 , Fig. 142 und 143 Scheiben heraus-

Fig. 142.

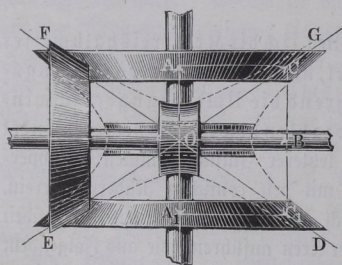
Fig. 143.



schneiden kann, deren Halbmesser mit ihren Abständen von den Kehlkreisen wachsen. Die kleinsten Räder E_1F_1 und E_1D_1 sind natürlich diejenigen, deren mittlere Ebenen mit den Kehlkreisen zusammenfallen, auch haben diese Scheiben die Eigenschaft, daß sie nur wenig von Cylindern abweichen, während alle einseitig herausgeschnittenen Scheiben wie diejenigen durch E und E_2 näherungsweise durch Kegelsumpfe sich ersetzen lassen, deren Seitenneigung mit der Neigung der Tangente an die hyperbolischen Profile in den gedachten Punkten übereinstimmt.

Man erkennt übrigens auch hier, ähnlich wie bei den conischen Rädern im vorhergehenden Paragraphen, daß die beiden in Fig. 142 und 143 dar-

Fig. 144.



gestellten Fälle sich nur durch die entgegengesetzte Drehungsrichtung der einen Axe A unterscheiden. Auch hier erhält man diesen beiden Fällen entsprechend zwei verschiedene Paare von Umdrehungshyperboloiden, welche ebenfalls zu einem einzigen Paare in dem Falle rechtwinkliger Axen zusammenschrumpfen, wie aus Fig. 144 ersichtlich ist. Denkt man sich nämlich die Axe B in einer bestimmten Richtung bewegt, und construirt in bekannter

Weise die beiden Momentanaxen OC und OC_1 , welche bei demselben Umsetzungsverhältnisse sowohl der einen wie der anderen Bewegungsrichtung von A entsprechen, so findet sich, daß die beiden Hyperboloide, welche durch die Umdrehung dieser Erzeugungslinien OC und OC_1 um jede Axe erzeugt werden, zusammenfallen müssen, in derselben Art, wie es auch bei den Kegelflächen der conischen Räder der Fall ist. Hieraus folgt die interessante Thatsache, daß ein Hyperboloidenpaar sich als Aroidenpaar ergibt, welches bei einer Umdrehung der einen Axe in einer bestimmten Richtung eine Umdrehung der anderen Axe unter einem bestimmten Umsetzungsverhältnisse sowohl in der einen wie in der entgegengesetzten Richtung veranlassen kann. Würde man daher in solchem Falle die beiden Aroide als materielle Hyperboloide ausführen, die gegeneinander gepreßt werden, um durch Friction die Bewegungsübertragung zu vermitteln, so würde die Umdrehung des einen eine Umdrehung des anderen nicht zur Folge haben können. Der Grund hiervon ist darin zu suchen, daß diese beiden Hyperboloide sich gleichzeitig in den beiden Geraden OC und OC_1 berühren, welche gegen die Axen symmetrisch liegen, daher die aus beiden Berührungen hervorgehenden Einwirkungen sich gegenseitig aufheben müssen. Wenn man die Hyperboloide jedoch mit Zähnen versieht, so können sie zur Bewegungsübertragung entweder in dem einen oder in dem anderen Sinne brauchbar gemacht werden, jenachdem man die Zähne nach der Richtung der einen oder der anderen Berührungslinie anordnet.

Auch hier berühren sich die Aroide, wie bei den conischen Rädern, von außen, so lange die Erzeugungslinie mit den Axen spitze Winkel bildet. Wenn hingegen der eine Winkel $\delta_2 > 90^\circ$ ist, so wird

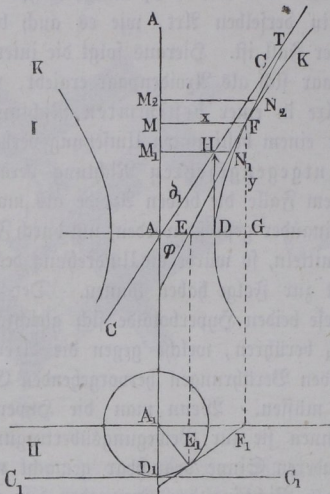
$$d_2 = \frac{d_1}{\tan \delta_1} \tan \delta_2$$

negativ, d. h. die beiden Aroidenflächen liegen auf derselben Seite der Berührungslinie und die Berührung ist eine innere. Für den Grenzfall, für welchen $\delta_2 = 90^\circ$ anzunehmen ist, wird $d_2 = \infty$, und das zugehörige Aroid artet alsdann in eine mit der Erzeugungslinie zusammenfallende Gerade aus, welche einer Zahnstange mit einem schräg gegen dieselbe gelagerten hyperboloidischen Rade ebenso entspricht, wie die normale Zahnstange mit cylindrischem Rade den Grenzfall zwischen äußerer und innerer Berührung bei parallelen Axen repräsentirt.

Daß die durch Umdrehung der Momentanaxe CC_1 um die Axen A und B entstehenden Aroide Umdrehungshyperboloide sind, ergibt sich leicht aus folgender Betrachtung. Es sei Fig. 145 (a. f. S.) I und II durch AA und A_1 die Drehaxe in zwei zu einander rechtwinkligen Projectionen (Aufriß und Grundriß) dargestellt, und unter CC resp. $C_1 C_1$ die Erzeugungslinie verstanden,

welche unter dem constanten Winkel δ_1 gegen AA und in dem Abstände $AD = A_1 D_1 = d_1$ um die Axe A herumgeführt werde. Die dadurch erzeugte Mo-

Fig. 145.



tationsfläche wird von der ersten Projectionsebene in einer gewissen Curve KK geschnitten, von welcher sich leicht nachweisen läßt, daß es eine Hyperbel zur Axe AA sein muß. Bedeuten nämlich EF und $E_1 F_1$ die Projectionen der Erzeugungslinie in einer beliebigen Lage, so ist der Punkt F , in welchem dieselbe durch die erste Projectionsebene geht, offenbar auch ein Punkt der in Rede stehenden Curve K , und seien die rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf

A als Anfangspunkt und AA als Y -Axe durch $AG = A_1 F_1 = x$ und $GF = y$ bezeichnet. Man hat dann in dem Dreiecke $A_1 E_1 F_1$

$$A_1 E_1^2 = A_1 F_1^2 - E_1 F_1^2$$

oder

$$d_1^2 = x^2 - y^2 \tan^2 \delta_1.$$

Schreibt man diese Gleichung

$$1 = \frac{x^2}{d_1^2} - \frac{y^2}{d_1^2 \cot^2 \delta_1},$$

so ersieht man sogleich, daß sie eine Hyperbel darstellt, deren Halbachsen $d_1 = AD$ und $d_1 \cot \delta_1 = DH$ sind, für welche also AC eine Asymptote ist. Man wird daher zu der fraglichen Momentanaxenfläche anstatt durch Umdrehung von CC auch dadurch gelangen, daß man diese Hyperbel KK um ihre eine Hauptaxe AA herumdreht, d. h. die besagte Fläche ist ein einschaliges Umdrehungshyperboloid. Aus der oben entwickelten Gleichung der Hyperbel folgt

$$y = \cot \delta_1 \sqrt{x^2 - d_1^2}.$$

Nimmt man hierin für x einen großen Werth an, gegen welchen d_1 verschwindet, so nähert sich y dem Werthe $x \cot \delta_1$, d. h. es schließt sich das Hyperboloid in dem Maße, wie man es erweitert, einem gewöhnlichen Regel-

mantel zur selben Axe AA an, dessen halber Spitzenwinkel gleich δ_1 ist (Asymptotenkegel).

Wie bereits oben angegeben, kann man die hyperboloidischen Scheiben, welche die Grundform der Räder bilden, näherungsweise durch abgestumpfte Kegelmäntel ersetzen, deren Seite mit der Tangente des hyperbolischen Profils übereinstimmt. Die Neigung φ der Tangente EF in einem beliebigen Punkte F der Hyperbel gegen die Y -Axe bestimmt sich durch Differentiation der Hyperbelgleichung zu

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{dx}{dy} = \frac{y}{x \cotg \delta_1} = \operatorname{tang} \delta_1 \frac{\sqrt{x^2 - d_1^2}}{x}.$$

Diese Neigung gegen die Umdrehungsaxe hätte man daher einer Regelzone $N_1 N_2$ zu geben, die eine Zone des Hyperboloids, deren Mittelebene den Halbmesser $FM = x$ oder a hat, annähernd ersetzen soll. Bezeichnet man noch mit $M_1 M_2 = e$ die axiale Höhe dieser Zone, so ergeben sich der kleinste und größte Halbmesser derselben zu

$$M_1 N_1 = a_1 = a - \frac{1}{2} e \operatorname{tang} \varphi = a - \frac{e}{2a} \operatorname{tang} \delta_1 \sqrt{a^2 - d_1^2},$$

$$M_2 N_2 = a_2 = a + \frac{1}{2} e \operatorname{tang} \varphi = a + \frac{e}{2a} \operatorname{tang} \delta_1 \sqrt{a^2 - d_1^2}.$$

Will man diese Halbmesser durch den Abstand $MA = h$ der mittleren Ebene vom Krefkreise bestimmen, so erhält man, da

$$MA = h = \cotg \delta_1 \sqrt{a^2 - d_1^2} \text{ ist:}$$

$$a_1 = a - \frac{eh}{2a} \operatorname{tang} \delta_1^2,$$

$$a_2 = a + \frac{eh}{2h} \operatorname{tang} \delta_1^2.$$

Wenn man endlich die Entfernung eines Punktes F von dem Krefkreise, in der Berührungslinie FE gemessen, mit $l = FE$ bezeichnet, so ergibt sich der diesem Punkte zugehörige Halbmesser a des Hyperboloides nach der Figur II zu:

$$MF = AF_1 = a = \sqrt{d_1^2 + (l \sin \delta_1)^2}.$$

Anmerkung. Der im Obigen besprochene allgemeinste Fall der Bewegung zweier gekreuzten Räder muß natürlich die Bewegung um sich schneidende sowohl wie um parallele Räder in sich einschließen. Setzt man nämlich $\delta_1 = \delta_2 = 0$, so erhält man aus

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\beta \cos \delta_2}{\alpha \cos \delta_1}$$

die bekannte Beziehung

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\beta}{\alpha},$$

und die Halbmesser an irgend einer Stelle

$$a = \sqrt{d_1^2 + (l \sin \delta)^2} = d_1,$$

sowie $b = d_2$. Es entsprechen diese Formeln also den Stirnrädern für parallele Axen. Ebenso giebt die Annahme $d = 0$ aus der gefundenen Beziehung $a d \sin \delta_1 = \beta d \sin \delta_2$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1},$$

entsprechend den conischen Rädern.

Beispiel. Es soll ein hyperboloidisches Räderwerk für zwei zu einander rechtwinkelige Axen construirt werden, deren kürzester Abstand 0,5 Meter und deren Umsehungsverhältniß zu $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$ vorgeschrieben ist.

Man hat hier, da $\delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$ ist,

$$2 = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{\sin \delta_1}{\cos \delta_1} = \tan \delta_1,$$

woraus $\delta_1 = 63^\circ 26'$ und $\delta_2 = 26^\circ 34'$ folgt.

Ferner folgen die Krehlkreis-Halbmesser aus

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_2} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4;$$

daher

$$d_1 = \frac{4}{5} 0,5 = 0,4 \text{ Meter}$$

und

$$d_2 = \frac{1}{5} 0,5 = 0,1 \text{ Meter.}$$

Wenn nun der innerste und äußerste Berührungspunkt der Räder von dem Berührungspunkte der Krehlkreise Abstände von resp. $l_1 = 0,8$ Meter und $l_2 = 1$ Meter haben sollen, so finden sich die betreffenden Halbmesser für das eine Rad:

$$a_1 = \sqrt{d_1^2 + (l_1 \sin \delta_1)^2} = \sqrt{0,4^2 + (0,8 \cdot \sin 63^\circ 26')^2} = 0,820,$$

$$a_2 = \sqrt{d_2^2 + (l_2 \sin \delta_1)^2} = \sqrt{0,4^2 + (1 \cdot \sin 63^\circ 26')^2} = 0,980,$$

und für das andere Rad:

$$b_1 = \sqrt{0,1^2 + (0,8 \cdot \sin 26^\circ 34')^2} = 0,372,$$

$$b_2 = \sqrt{0,1^2 + (1 \cdot \sin 26^\circ 34')^2} = 0,458.$$

Ebenso sind die mittleren Halbmesser der hyperboloidisch geformten Räder

$$a = \sqrt{0,4^2 + (0,9 \cdot \sin 63^\circ 26')^2} = 0,898$$

und

$$b = \sqrt{0,1^2 + (0,9 \cdot \sin 26^\circ 34')^2} = 0,414 \text{ Meter}$$

und man erhält daher die mittleren Reigungswinkel der Räder φ und ψ durch

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{a^2 - d_1^2}}{a} \tan \delta_1 = \frac{\sqrt{0,898^2 - 0,4^2}}{0,898} \tan 63^\circ 26' = 1,790$$

$$\text{zu } \varphi = 60^\circ 50',$$

$$\tan \psi = \frac{\sqrt{b^2 - d_1^2}}{b} \tan \delta_2 = \frac{\sqrt{0,414^2 - 0,1^2}}{0,414} \tan 26^\circ 34' = 0,485$$

$$\text{zu } \psi = 25^\circ 50'.$$

Wenn man die Räder als Regel von dieser Reigung ansieht, so sind daher der innere und äußere Halbmesser des einen Rades a_1 und a_2 gegeben durch

$$a \mp \frac{1}{2} (1 - 0,8) \cos \delta_1 \tan \varphi = 0,898 \mp 0,1 \cdot \cos 63^\circ 26' \cdot \tan 60^\circ 50'$$

$$\text{zu } a_1 = 0,818 \text{ und } a_2 = 0,978,$$

sowie diejenigen des zweiten Rades durch

$$b \mp 0,1 \cos \delta_2 \tan \psi = 0,414 \mp 0,1 \cdot \cos 26^\circ 34' \cdot \tan 25^\circ 50'$$

$$\text{zu } b_1 = 0,371 \text{ Meter und } b_2 = 0,457 \text{ Meter.}$$

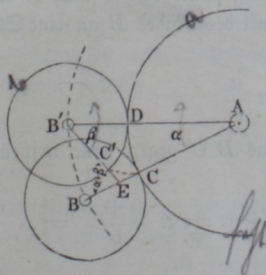
Die Abweichungen von der hyperboloidischen Form sind daher ganz unwesentlich.

Differentialräder. Bei den bisher besprochenen Räderanordnungen §. 47.

war immer die Voraussetzung gemacht worden, daß die beiden Axen durch feste Lager gehalten wurden, welche an den Drehungen nicht Theil nehmen konnten. Die Wirkung der Räder läuft in diesem Falle auf eine einfache Uebertragung der Umdrehungsbewegung von der einen Axe auf die andere hinaus. Dieser Fall kommt in der Praxis zwar am häufigsten vor, doch hat man öfter auch zu bestimmten Zwecken Veranlassung, der einen Axe entweder die Bewegung ganz zu verbieten, oder ihr doch nur eine ganz bestimmte

Drehung zu gestatten, welche von der Umdrehung der anderen Axe in gewissem Sinne unabhängig ist. Diese Art der Bewegungsübertragung soll hier näher untersucht werden.

Fig. 146.



Es sei zunächst als einfachster Fall der vorausgesetzt, daß zwei parallele Axen A und B, Fig. 146 durch zwei Stirnräder a und b mit äußerer Berührung so in Verbindung gebracht sind, daß die eine Axe A sammt dem auf ihr

festgekeilten Rade a absolut festgehalten werden soll, an der Drehung also gar nicht Theil nehmen kann. Man kann zu diesem Falle aus dem gewöhnlichen, in welchem beide Axen A um α und B um $\beta = -\frac{a}{b} \alpha$

sich drehen, kinematisch einfach dadurch gelangen, daß man dem ganzen Systeme, also jeder der beiden Wellen noch eine zusätzliche Drehung gleich $-\alpha$ um die Ase A erteilt. In Folge hiervon wird A in Ruhe gelangen, während die Bewegung von B nunmehr aus zwei Componenten sich zusammensetzt, nämlich aus einer Drehung $\beta = -\alpha \frac{a}{b}$ um B und einer anderen Drehung $-\alpha$ um A . Diese beiden Drehungen wurden im Obigen schon zu einer resultirenden Drehung $-\alpha \left(\frac{a}{b} + 1 \right)$ um den Pol C zusammengesetzt, als es darauf ankam, die Polbahnen oder Aroide zu bestimmen, welche für die Räder als Grundform anzunehmen sind.

Wenn nun hier die Welle B außer ihrer Umdrehung um die eigene Ase noch einer Drehung um diejenige A ausgesetzt ist, so folgt daraus auch ohne Weiteres, daß das Lagergestell von B nun nicht mehr absolut fest sein darf, dasselbe vielmehr auf einem um A drehbaren Arme AB angebracht sein muß. Man denke sich nun diesem Arme AB mit dem Rade b bei festgehaltenem Rade a eine Drehung um die Ase A im Betrage $+\alpha$, also rechts herum erteilt, so ergibt sich ohne Weiteres, daß das Rad b außerdem um die eigene Ase eine Drehung in demselben Sinne, also auch rechts herum, im Betrage $+\alpha \frac{a}{b}$ erhält, und daß also die gesammte Drehung des Rades b oder die absolute Drehung desselben im Raume durch

$$\alpha \left(\frac{a}{b} + 1 \right) = \alpha \frac{a+b}{b} = \alpha \frac{d}{b}$$

ausgedrückt ist, wenn $d = a + b$ den Azenabstand bedeutet. Auch aus der Figur ist dies leicht zu erkennen, denn wenn bei der gedachten Drehung des Arms B um den Winkel α der Berührungspunkt von C nach D rückt, so ist der zuerst in C befindlich gewesene Punkt des Rades B an eine Stelle C' getreten, welche durch den Winkel

$$DB'C' = +\alpha \frac{a}{b}$$

gegeben ist, und es hat sich folglich der Radius $B'C'$ gegen seine ursprüngliche Lage BC um den Winkel

$$BEB' = DB'E + BAB' = \alpha \frac{a}{b} + \alpha = \alpha \frac{a+b}{b} = \alpha \frac{d}{b}$$

gedreht.

Man ersieht hieraus, daß, während eine Umdrehung des einen Rades A um den Winkel α bei feststehenden Azen eine entgegengesetzte Umdrehung des Rades b im Betrage $\alpha \frac{a}{b}$ zur Folge hat, so geht aus einer Umdrehung

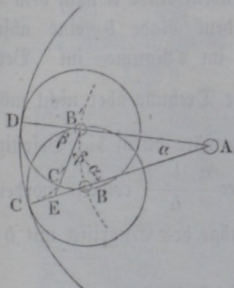
α der Axe B um die feste Axe A eine gleichgerichtete Umdrehung des Rades b um seine eigene Axe im Betrage $\alpha \frac{a}{b}$ hervor. Die relative Verdrehung der Räder gegen einander aber ist in allen Fällen durch

$$\alpha \frac{a + b}{b} = \alpha \frac{d}{b}$$

gegeben. Dasselbe Verhalten zeigen natürlich die Räder mit indirecter Bewegungsübertragung durch einen gekreuzten Riemen.

In ähnlicher Weise läßt sich auch die Bewegung zweier Räder a und b mit innerer Berührung, Fig. 147, untersuchen. Während hierbei eine Drehung

Fig. 147.



α des einen Rades A , bei festgehaltenen Axen eine gleichgerichtete Bewegung

des anderen Rades b um $\alpha \frac{a}{b}$ hervorruft,

so geht aus einer Umdrehung der Axe B um die feste Axe A eine entgegengesetzte Umdrehung des Rades b um

seine Axe im Betrage $\alpha \frac{a}{b}$ hervor. Die

relative Bewegung beider Räder gegen einander, welche im letztgedachten mit der absoluten Bewegung von b im Raume übereinstimmt, ist bei innerer

Radberührung, ebenso wie bei offenen Riemen durch

$$\alpha \frac{a - b}{b} = \alpha \frac{d}{b}$$

gegeben. Letzteres Resultat ergibt sich ebenfalls aus der Figur, denn es wird offenbar die relative Bewegung von b gegen a , oder die ganze Bewegung von b durch

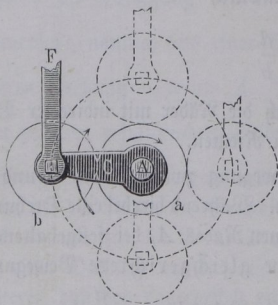
$$BEB' = DB'E - BAB' = \alpha \frac{a}{b} - \alpha = \alpha \frac{a - b}{b} = \alpha \frac{d}{b}$$

ausgedrückt.

Diese Bewegungsarten kommen in Wirklichkeit öfter vor, z. B. der erste mit äußerer Radberührung bei den Drehvorrichtungen der Uferkrane, bei welchen das Rad a mit der feststehenden Krahnssäule fest verschraubt ist, während die in dem drehbaren Windengestell gelagerte Axe B mit dem Rade b bei ihrer Drehung um die Krahnssäule herumschnebelt. Hierher gehört auch das mit dem Namen des Planetenradmechanismus bezeichnete Getriebe, welches durch die Verwendung bekannt geworden ist, welche Watt von dem-

selben bei seinen Dampfmaschinen machte. Hier trägt eine drehbare Ase *A* Fig. 148 ein Zahnrad *a* fest aufgekelt, während eine Kurbel *C* lose auf

Fig. 148.



A drehbar aufgesteckt ist. Diese durch eine Lenkerstange *F* bewegte Kurbel trägt ein zweites mit *a* im Eingriffe stehendes Zahnrad *b*, welches durch einen prismatischen Bolzen mit der Schubschraube verbunden ist und daher eine Drehung um seine eigene Ase nicht annehmen kann. Denkt man nun die Kurbel durch ihre Schubschraube *F* um einen Winkel $+\alpha$ gedreht, so würde bei feststehendem Rade *a* nach dem Vorstehenden dem Rade *b* eine absolute Drehung im Raume im Betrage

$+\alpha \frac{a+b}{b}$ mitgetheilt werden. Da eine solche Drehung aber nicht möglich ist, man sich also zu denken hat, dem Rade *b* wäre durch die Befestigung eine gleich große entgegengesetzte Drehung $-\alpha \frac{a+b}{b}$ ertheilt worden, so folgt hieraus, daß das Rad *a* hierdurch vermöge des Eingriffs mit *b* eine Umdrehung

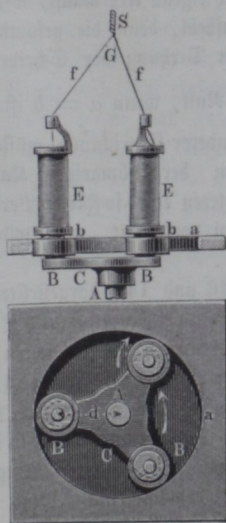
$$+\alpha \frac{a+b}{b} \cdot \frac{b}{a} = \alpha \frac{a+b}{a}$$

annehmen muß. Wenn $a = b$ gewählt wird, so ist die Drehung der Ase *A* gleich 2α , also doppelt so groß wie die Drehung der Kurbel.

Auch der Fall des inneren Radeingriffs findet öfter Verwendung, unter anderem bei gewissen Maschinen zum Zwirnen baumwollener Garne zu Strängen und gleichzeitigem Zusammendrehen der gebildeten Stränge zu Schnüren. Man denke sich nämlich um einen festen Zapfen *A*, Fig. 149, das mittelst einer Hülse aufgesteckte dreiarmlige Kreuz *C* gedreht, welches in seinen drei Augen die Bolzen *B* mit den Rädern *b* trägt. Diese Räder sind im inneren Eingriffe mit dem Zahnringe *a* und tragen oberhalb die Spulen *E*, welche die zusammenzuzwirnenden mehrfachen Fäden aufgewickelt enthalten. Die Fäden aller drei Spulen laufen oberhalb bei *G* zusammen, um durch ihre Vereinigung die Schnur *S* zu bilden. Durch die Drehung der Spulen um ihre eigenen Axen *B* werden die Fäden zu Strängen gezwirnt, während durch ihre Drehung mit dem Kreuze *C* um die Ase *A* ein Zusammendrehen der Stränge zur Schnur bewirkt wird. Bezeichnen *a* und *b* wieder die Halbmesser der Räder, so beträgt die Verdrehung einer

Spule, welche auf Zwirnen des Stranges wirkt, offenbar $+ \alpha \frac{d}{b}$, wenn das Kreuz eine Bewegung $-\alpha$ zum Zusammendrehen der Stränge vollendet. Die auf ein bestimmtes Stück der gefertigten Schnur entfallenden Schrauben-

Fig. 149.

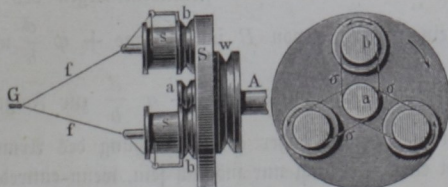


windungen der Stränge verhalten sich daher zu den Windungen der Garnfäden in jedem Strange wie $b : d$, und sind von entgegengesetzter Richtung, was bekanntlich bei allen Seilungsprocessen von Wichtigkeit ist.

Auch für die Ausführung ähnlicher Mechanismen unter Benutzung von Schnüren zur Bewegungsübertragung lassen sich Beispiele anführen. So wendet man zur Herstellung der Goldschnüre, welche aus einzelnen mit geplättetem Draht (Yahn) umwickelten sogenannten Gespinnsten zusammengedreht werden, die kleine Vorrichtung Fig. 150 an. Auf einem fest am Gestell befindlichen Stifte A wird durch den Schnurwirtel w eine Scheibe S gedreht, welche die drei Spülchen s zur Aufnahme der Gespinnstfäden trägt.

Diese drei Fäden f , welche bei G zusammenlaufen, werden durch die Drehung der Scheibe S zusammengezwirnt. Wären nun die Spulen s fest auf der Scheibe angebracht, so würde bei

Fig. 150.

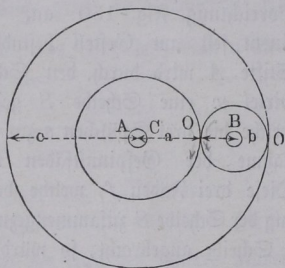


jedem Scheibenumlauf auch jeder Spulenfaden einmal in sich gedreht, was mit Rücksicht auf die metallischen Fäden hinderlich wäre. Um diese Drehung der Fäden in sich zu vermeiden, ist jede Spule mit einem Scheibchen b ver-

sehen, und auf dem festen Stifte A eine Scheibe a von gleicher Größe mit b fest angebracht, welche Scheibe an der Drehung also keinen Antheil hat. Durch die Schnüre σ ist eine Verbindung zwischen a und b vermittelt. Man erkennt ohne Weiteres, daß bei jeder Umdrehung der Scheibe S mit den Spulen s etwa im Sinne des Pfeils jede einzelne Spule in Folge der Schnur σ eine Umdrehung nach links um die eigene Axe macht, welche mit ihrer Umdrehung nach rechts um A sich aufhebt, denn die gesammte Bewegung der Spule ist nach Obigem bei einer Drehung der Scheibe S um $+$ α durch $\alpha \frac{a-b}{b}$ gegeben, beträgt also Null, wenn $a = b$ ist. Mechanismen zu gleichem Zwecke, aber von anderer Einrichtung müssen auch bei den großen Maschinen zum Umspinnen der submarinen Kabel mit Metalldrähten angewendet werden, da die letzteren einer so starken Verdrehung in sich, wie sie beim gewöhnlichen Zwirnen vorkommt, nicht widerstehen könnten.

§. 48. Es mögen jetzt die beiden durch Fig. 146 und 147 dargestellten Fälle combinirt werden, so zwar, daß nach Fig. 151 zwei Räder a und c auf der

Fig. 151.



Axe A angebracht sein sollen, welche letztere ein drehbarer Arm AB umschließt, der in B eine Axe für das Rad b trägt, welches mit a in äußeren und mit c in inneren Eingriff zu treten befähigt ist. Man erkennt dann, daß diese Anordnung überhaupt keine Bewegung zulassen würde, wenn die beiden Räder a und c mit ihrer Axe festgestellt wären, denn eine Drehung des Arms AB um irgend einen Winkel φ würde nach Vorstehendem wegen des äußeren Ein-

griffs mit a eine Drehung von B im Betrage $+\varphi \frac{d}{b}$ und wegen des

inneren Eingriffs mit c eine solche gleich $-\varphi \frac{d}{b}$ zur Folge haben, was

widersinnig wäre. Es wird daher eine Umdrehung des Arms AB um A sowie überhaupt eine Bewegung nur möglich sein, wenn entweder das Rad a , oder das Rad c , oder beide Räder a und c einer Drehung um ihre Axen fähig sind. Es möge sogleich der letztgedachte allgemeinere Fall vorausgesetzt werden, zu welchem Behufe man sich etwa denken kann, daß das Rad c lose drehbar auf die Axe A des Rades a aufgesteckt, oder auf einer hohlen Welle C angebracht sei, welche die massive Welle A umschließt. Es möge

ferner vorausgesetzt werden, daß die Ase A mit dem Rade a eine Umdrehung α , das Rad c eine solche γ und der Arm AB eine solche β um die Ase A vollführe. Die absolute Drehung des Rades b im Raume sei mit ω bezeichnet. Es ist ganz gleichgültig, in welchem Sinne diese Drehungen geschehen, nur soll das Pluszeichen für eine bestimmte Drehung, etwa für diejenige angenommen werden, welche einem Beschauer der Figur im Sinne der Uhrzeigerbewegung erscheint, dann werden negative Ergebnisse natürlich der entgegengesetzten Richtung entsprechen.

Die Frage nach dem Zusammenhange der einzelnen Drehungen ist nun sofort gelöst, wenn man unter Berücksichtigung des oben Angegebenen die absolute Verdrehung des Rades b im Raume ausrechnet, welche aus dem Zusammenwirken von b mit a sowohl wie von b mit c sich ergibt. Man findet in dieser Weise die absolute Verdrehung des Rades b

$$1. \text{ wegen der Drehung von } a \text{ um } \alpha \text{ gleich } -\alpha \frac{a}{b},$$

$$2. \text{ wegen der Drehung des Arms um } \beta \text{ gleich } +\beta \frac{a+b}{b}, \text{ zusammen}$$

also zu

$$\frac{-\alpha a + \beta a + \beta b}{b} = \omega_1;$$

ferner auch

$$3. \text{ wegen der Drehung von } c \text{ um } \gamma \text{ gleich } +\gamma \frac{c}{b},$$

$$4. \text{ wegen der Drehung des Arms um } \beta \text{ gleich } -\beta \frac{c-b}{b}, \text{ also zusammen}$$

$$\frac{\gamma c - \beta c + \beta b}{b} = \omega_2.$$

Beide Werthe ω_1 und ω_2 müssen gleich sein, folglich erhält man:

$$-\alpha a + \beta a + \beta b = \gamma c - \beta c + \beta b$$

oder

$$\alpha a + \gamma c = \beta (a + c)$$

als die für das betrachtete Getriebe ganz allgemein gültige Gleichung. Wenn man in dieser Gleichung γ der Richtung von α entgegengesetzt nimmt, so erhält man die Gleichung

$$\alpha a - \gamma c = \beta (a + c),$$

woraus man erkennt, daß die Bewegung des Arms AB proportional mit der Differenz der Bewegungen der beiden anderen Räder a und c ist. Mit Rücksicht hierauf hat man der betrachteten Anordnung den Namen Differentialvorgelege oder Differentialmechanismus, und dem Rade, als welches der Arm AB meistens ausgeführt wird, die Bezeichnung Differentialrad gegeben.

Die verschiedenen Anwendungen, welche man von dem hier angegebenen Getriebe machen kann, ergeben sich nun leicht durch bestimmte Annahmen. Setzt man z. B. $\gamma = 0$, macht also das Rad c unbeweglich, so erhält man aus obiger Grundgleichung:

$$\alpha = \beta \frac{a + c}{a} = \beta \left(1 + \frac{c}{a} \right).$$

Diese Gleichung entspricht dem bekannten Cylindergöpel von Barret, Crall und Andrews*), bei welchem, Fig. 152, auf dem cylindrischen Gehäuse C mit

Fig. 152.

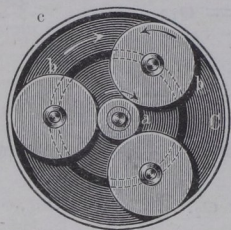
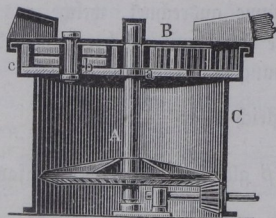
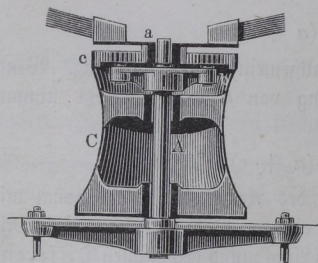


Fig. 153.



innerer Verzahnung der Deckel B mit den Rädern b direct von den Pferden herumgeführt wird. Die Räder b greifen ebensowohl in die innere Verzahnung c wie in das auf der stehenden Welle A befindliche Rad a ein, so daß letzteres mit vergrößerter Geschwindigkeit nach derselben Richtung, in welcher die Pferde umgehen, bewegt wird. Für jeden Umgang der Pferde macht die Welle A $\frac{c}{a} + 1$ Umdrehung.

Setzt man andererseits $\beta = 0$, so erhält man

$$\gamma = -\alpha \frac{a}{c}$$

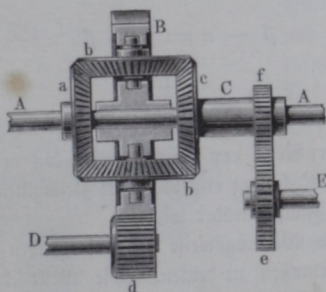
als Umdrehungsgeschwindigkeit des äußeren Rades. Auch diese Anordnung findet sich ausgeführt, so bei dem Gangspill, Fig. 153, bei welchem durch die Arbeiter mittelst Tummelbäumen die Axe A gedreht wird und dadurch bei feststehenden Rädern b eine im Verhältniß $\frac{a}{c}$ verminderte Umdrehungsgeschwindigkeit der Trommel C nach der entgegengesetzten Richtung erlangt wird.

Eine sehr wichtige und interessante Anwendung findet das Differential-

*) Siehe Perels, Landwirthschaftliche Maschinen und Geräthe.

getriebe ferner bei dem Bewegungsmechanismus der Spindelbänke oder Fleyer*), zum Vorspinnen von Baumwolle und Rammingarn 2c., bei welchen man von der angegebenen Eigenschaft Gebrauch macht, daß das Differentialrad eine Bewegung hat, welche proportional mit der Differenz der Bewegungen der beiden Wellen *A* und *C* ist. Man giebt in diesem Falle dem Getriebe meistens eine etwas abgeänderte Form, Fig. 154, indem man

Fig. 154.



die beiden Räder *a* und *c* gleich groß macht und die Bewegung durch zwei conische Räder *bb* vermittelt, welche beiden Räder lose drehbar in dem sogenannten Differentialrade *B* angebracht sind. Zwei Räder *b* sind hier nur der symmetrischen Anordnung und Wirkung wegen angebracht, dieselben wirken wie ein einziges. Es ist ohne Weiteres klar, daß die oben entwickelte Beziehung

$$\alpha a \pm \gamma c = \beta (a + c)$$

zwischen den Geschwindigkeiten der Räder auch hier ihre Gültigkeit hat, wenn man darin $a = c$ setzt; man erhält dann

$$\alpha a \pm \gamma a = \beta \cdot 2a$$

oder

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Man findet übrigens diese Gleichung auch direct, wenn man die Einwirkungen gleichsetzt, welche ein Wechselrad *b* einerseits von *a*, andererseits von *c* empfängt, sobald diese Räder um α resp. γ gedreht werden und sobald man das Differentialrad *B* mit den Wechselrädern *b* um den Winkel β herumschwenkt. Die Drehung von *a* erzeugt hierbei offenbar eine Umdrehung des Rades *b* um seine Axe im Betrage $-\alpha \frac{a}{b}$, während durch die Bewegung von *B* eine Drehung des Rades *b* um $+\beta \frac{a}{b}$, in Summa also $\frac{a}{b} (\beta - \alpha)$ hervorgebracht wird. Ebenso erzeugt die Drehung γ des Rades *c* eine solche

*) Siehe Artikel „Baumwolle“ von Hülße in Precht's, Technologische Encyclopädie. Supplement.

von b im Betrage $+ \gamma \frac{c}{b}$, während die Drehung des Differentialrades das Wechselrad b zu einer Drehung $- \beta \frac{c}{b}$ veranlaßt, so daß die Umdrehung von b um seine eigene Axe auch durch $\frac{c}{b} (\gamma - \beta)$ ausgedrückt werden kann. Beide Werthe gleichgesetzt, erhält man, da hier auch noch $a = c$ ist, offenbar

$$\beta - \alpha = \gamma - \beta$$

oder

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

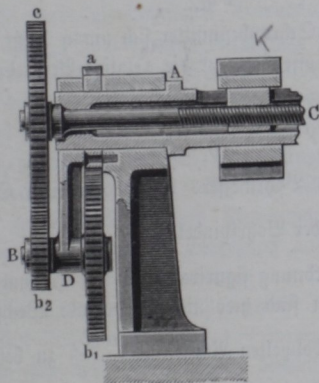
Die Räder b sind in der Regel von gleicher Größe mit a und c , doch ist die Größe von b , wie die Rechnung ergibt, ganz gleichgültig, da b überhaupt nur als Wechsel- oder Zwischenräder wirken.

Die Einrichtung und Wirkungsweise des betreffenden Mechanismus hat man sich nun folgendermaßen zu denken. Die Welle A , auf welcher das Rad a fest aufgekittet sich befindet, ist eine Betriebswelle, von welcher aus die Bewegung der Flügelspindeln der betreffenden Vorspinnmaschine bewirkt wird, während die auf diesen Spindeln befindlichen Spulen für das Vorgespinnst eine etwas andere Geschwindigkeit, größer oder kleiner, erhalten, die ihnen aber nicht direct von A , sondern von der Welle E ertheilt wird, welche ihre Bewegung unter Vermittelung von f und e von dem Rade c erhält, das zu dem Ende lose drehbar auf A aufgesteckt ist. Es werden also die Spindeln mit a , die Spulen mit e in Verbindung stehen, d. h. ihre Bewegung wird mit der Bewegung dieser Räder proportional sein. Denkt man nun dem Differentialrade B von einer dritten Axe D aus eine selbstständige Bewegung β ertheilt, so ist klar, daß diese Bewegung β zusammen mit der Bewegung α von A eine solche Drehung γ des Rades c hervorbringen muß, daß β als Differenz von α und γ erscheint. Die Differenz zwischen Spindel und Spulenbewegung ist aber die sogenannte Aufwindbewegung, welche das Aufwickeln des Garns auf die Spule bewirkt, und daraus geht hervor, daß, wenn man von A die Spindeln umdrehen läßt, und dem Rade B eine der Aufwindgeschwindigkeit proportionale Umdrehung ertheilt, die Spulen einen richtigen Gang annehmen müssen, sobald sie von dem Rade c getrieben werden. Da mit allmäliger Anfüllung der Spulen deren Durchmesser wächst, daher die zur Aufwindung der producirten constanten Garnmenge erforderliche Zahl von Windungen entsprechend kleiner wird, so hat man es dadurch, daß man auf das Differentialrad entsprechend die variable Aufwindgeschwindigkeit überträgt, in seiner Hand, den Bedingungen einer tadellosen Aufwindung zu genügen.

Auch sonst hat man, z. B. bei selbstthätigen Spinnstühlen*) und für andere specielle Zwecke, das Differentialgetriebe noch mehrfach angewendet. Der Gebrauch dieser Getriebe für Dynamometer ist schon in Thl. II. angegeben worden.

Man kann das Rad c des gewöhnlichen Differentialgetriebes, Fig. 151, auch mit äußerer anstatt mit innerer Verzahnung versehen, wenn man die Axe B mit zwei verschiedenen Rädern b_1 und b_2 versieht, Fig. 155, von

Fig. 155.



denen das eine b_1 mit a und das andere b_2 mit c zusammen wirkt. In dieser Art hat man mehrfach bei Bohrwerken Mechanismen in Gebrauch, welche die Verschiebung des Bohrmeßers oder Bohrtopfes bezwecken. Es sei wieder durch A die Bohrspindel, und durch C die zur Verschiebung des Bohrtopfes dienende Schraube dargestellt, welche auf ihrem freien Ende das Rad c trägt, während das Rad a nicht auf der Spindel A , sondern concentrisch dazu

undrehbar am Gestelle befestigt ist. Um dieses feste Rad wird das freisiehende Rad b_1 geführt, dessen Axe B auf einem Arme D befindlich ist, der von der Bohrspindel mit herumgenommen wird. Da ein zweites auf B festgekeiltes Rad b_2 , welches mit b_1 wie aus einem Stück bestehend zu betrachten ist, mit c im Eingriffe ist, so wird letzteres Rad c und also auch die Schraubenspindel C in eine bestimmte Drehung γ versetzt. Die Ermittlung des Umsetzungsverhältnisses macht sich hier ebenso einfach wie bisher. Die absolute Bewegung, welche der Axe B ertheilt wird, bestimmt sich nämlich aus der Wirkung zwischen b_1 und dem festen Rade a , lediglich zu

$$+ \alpha \frac{a + b_1}{b_1} = \omega_1,$$

wenn die Bohrspindel und mit ihr der Arm D den Winkel $+$ α beschreibt. Aus der Wirkung zwischen dem Rade c , welches sich um γ dreht, und dem

*) Siehe Zeitschrift Deutsch. Ingenieure, Jahrg. 1874, S. 216: Einrichtung der Selfactors von Rieter.

Rade b_2 , dessen Centrum um α herumgeführt wird, ergibt sich die absolute Verdrehung der Axe B zu

$$-\gamma \frac{c}{b_2} + \alpha \frac{c + b_2}{b_2} = \omega_2.$$

Die Gleichsetzung beider Werthe ω_1 und ω_2 liefert daher

$$-\gamma c b_1 + \alpha c b_1 = \alpha a b_2$$

oder

$$\gamma = \alpha \left(1 - \frac{a b_2}{c b_1} \right).$$

Da die Bohrerspindel selbst mit der Schraubenmutter sich um α dreht, so wird auf die Verschiebung des Bohrers offenbar nur die relative Verdrehung von Mutter gegen Spindel, also

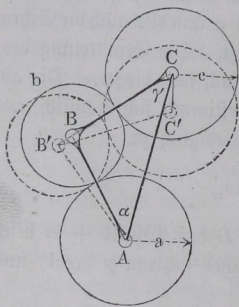
$$\alpha - \gamma = \alpha \frac{a b_2}{c b_1}$$

wirken, und die Verschiebung des Bohrmessers beträgt bei einer Steigung s der Schraube für jeden Umgang der Bohrerspindel $s \frac{a b_2}{b_1 c}$.

Bei der zuletzt betrachteten Anordnung figuriren auch die Halbmesser der Zwischenräder b_1 und b_2 , dieselben sind hier nicht mehr als Wechselräder, sondern als Vorgelegsräder eines doppelten Vorgeleges $\frac{a}{b_1} \frac{b_2}{c}$ zu betrachten, und die gewählte Anordnung unterscheidet sich offenbar von der in Fig. 134 §. 44 gegebenen Bohrvorrichtung nur dadurch, daß dort die Zwischenwelle fest gelagert war, während sie im vorliegenden Falle um die anderen beiden Axen herumgeführt wird.

In manchen Fällen hat man die Bewegung von einer Welle A auf eine

Fig. 156.



andere C in solcher Weise zu übertragen, daß der bewegten Welle C noch eine andere Bewegung senkrecht zu ihrer Länge ermöglicht ist, ohne daß dadurch die Betriebsübertragung unterbrochen oder auch nur gestört werde. Man erreicht dies durch das sogenannte Rädergehänge oder Kniegelenk, Fig. 156. Hierin ist A die in festen Lagern liegende Betriebswelle, von deren Rade a durch das Zwischenrad b die Bewegung in derselben

Richtung und im Verhältniß $\frac{a}{c}$ auf das Rad c der Welle C übertragen wird.

Soll nun der Welle C eine Bewegung etwa nach C' ermöglicht sein, so genügt es für die Bewegungsübertragung, die Aze des Zwischenrades b als den Drehpunkt eines Knies ABC zu construiren, dessen beide Schenkel AB und BC die Azen A resp. C umfassen. Rückt dann die Aze C nach C' , so gelangt die Aze B nach B' , so daß $AB = AB'$ und $CB = C'B'$ ist, und da also die Azenabstände zwischen A und B einerseits und C und B andererseits unverändert geblieben sind, so ist die Möglichkeit der Bewegung hierdurch gegeben. Man bedient sich dieser Vorrichtung ebenfalls bei Spindeln, indem von der Welle C die Bewegung der Spulen ausgeht, die behufs ihrer gleichmäßigen Bewickelung auf einer auf- und niedergehenden Bank (Spulenwagen) aufgestellt sind. Auf diesem Spulenwagen sind denn auch die Lager der Spulenbetriebswelle C angebracht, welche letztere daher an der auf- und niedergehenden Bewegung der Spulen Theil nimmt. Es genügt aber für diesen Zweck nicht, die Bewegungsübertragung nur überhaupt zu ermöglichen, es muß an die Anordnung auch noch die Bedingung gestellt werden, daß durch das Auf- und Abgehen der betriebenen Aze C eine Störung in der gleichmäßigen Bewegungsübertragung nicht herbeigeführt werde, da ein Einfluß der Versetzung auf die Umdrehung bald eine Vergrößerung, bald eine Verminderung der Umdrehung der Spulen zur Folge haben müßte, je nachdem die Spulenwelle C aufwärts oder abwärts geführt wird. Um die hierzu nöthigen Erfordernisse eines richtigen Kniegelenks zu prüfen, gehe man aus von einer bestimmten Lage des Azen dreiecks ABC , in welcher die Knieschenkel AB und CB die Winkel α und γ mit dem Azenabstände AC bilden. Kommt nun C nach einem unendlich wenig entfernten Punkte C' und B in Folge davon nach B' , so hat der Arm AB sich um den sehr kleinen Winkel $BAB' = \partial\alpha$ und zwar nach links gedreht. Während dessen hat der Arm BC , nachdem er in die Lage $B'C'$ gelangt ist, offenbar eine Drehung nach rechts gemacht, und zwar um den kleinen Winkel, den die beiden Lagen CB und $C'B'$ mit einander einschließen, und welcher mit $\partial\gamma$ bezeichnet sein mag. Es wird nun die Kniebewegung selbst ohne jeden Einfluß auf die Bewegungsübertragung sein, sobald bei stillstehender Welle A die Welle C durch die Kniebewegung nicht in Bewegung geräth. Wenn also c sowohl wie a eine Drehung überhaupt nicht empfangen, so kann dies natürlich auch mit dem Zwischenrade b nicht der Fall sein. Die beiden Wirkungen also, welche aus der Berührung von b mit a und von b mit c für b dadurch resultiren, daß die beiden Knieschenkel AB um $-\partial\alpha$ und CB um $+\partial\gamma$ gedreht werden, müssen sich aufheben. Das Rad b erleidet nun aber durch die Drehung des Schenkels AB um $-\partial\alpha$ offenbar eine Verdrehung im Raume um

$$-\partial\alpha \frac{a+b}{b} = -\partial\alpha \frac{d_1}{b},$$

wenn $a + b = AB$ mit d_1 bezeichnet wird. Durch die Verdrehung des Arms CB gegen das ruhende Rad c im Betrage $+\partial\gamma$ wird aber dem Zwischenrade b eine Verdrehung im Raume erteilt von

$$+\partial\gamma \frac{c+b}{b} = \partial\gamma \frac{d_2}{b},$$

unter d_2 die Schenkellänge $CB = c + b$ verstanden. Das Rad b wird in jedem Falle daher durch die Kniebewegung in eine Bewegung gleich der Summe jener Componenten

$$+\partial\gamma \frac{d_2}{b} - \partial\alpha \frac{d_1}{b}$$

versezt, welche bei der entgegengesetzten Verschiebung von C natürlich das entgegengesetzte Zeichen annimmt. Soll nun das Zwischenrad hierdurch gar keine Bewegung empfangen, so wird $d_1 \partial\alpha = d_2 \partial\gamma$ als Bedingung gefunden.

Um diese Bedingung näher zu prüfen, genügt die Betrachtung des Axendreiecks ABC . Offenbar ist in demselben für jede Lage von C immer

Fig. 157.

$$AB : CB = \sin \gamma : \sin \alpha$$

oder

$$d_1 \sin \alpha = d_2 \sin \gamma.$$

Folglich hat man auch immer durch Differentiation:

$$d_1 \cos \alpha \partial\alpha = d_2 \cos \gamma \partial\gamma.$$

Setzt man hierin

$$d_1 \partial\alpha = d_2 \partial\gamma,$$

so folgt

$$\cos \alpha = \cos \gamma,$$

oder da α und γ kleiner als π sind, $\alpha = \gamma$. Das Axendreieck ABC muß also ein gleichschenkeliges sein, wenn die Kniebewegung ohne Einfluß auf die Bewegungsübertragung sein soll. Damit

$$d_1 = d_2 \text{ oder } a + b = c + b$$

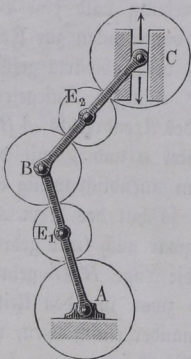
sei, müssen die beiden Räder a und c gleiche Größe haben.

Zuweilen wird das Kniegelenk auch so ausgeführt, daß auf jedem Schenkel zwischen b und a resp. zwischen b und c noch ein Wechselrad e_1 und e_2 eingeschaltet wird, Fig. 157. Da durch dieses Wechselrad nur die Richtung der Bewegung verändert wird, so hat man hier ähnlich wie vorher die Bedingung:

$$+\partial\alpha \frac{a+b}{b} - \partial\gamma \frac{c+b}{b} = 0;$$

also

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\gamma} = \frac{c+b}{a+b}.$$



Auch hat man, unter

$$d_1 = a + b + 2 e_1$$

und

$$d_2 = c + b + 2 e_2$$

die Schenkellängen verstanden, wie vorher

$$d_1 \cos \alpha \partial \alpha = d_2 \cos \gamma \partial \gamma,$$

und daher

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} = \frac{c + b + 2 e_2 \cos \gamma}{a + b + 2 e_1 \cos \alpha}.$$

Diese beiden Werthe für $\frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}$ können nur dann gleich sein, wenn $a = c$ und $e_1 = e_2$ ist, dann ist auch $d_1 = d_2$ und die beiden Winkel α und γ sind ebenfalls von gleicher Größe.

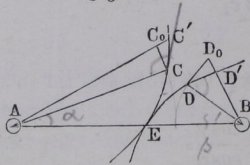
Unrunde Räder. Bei den vorhergehenden Untersuchungen ist immer §. 49. stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, daß das Umsetzungsverhältniß zwischen den Azen constant sein solle, so daß bei einer gleichmäßigen Bewegung der einen Welle auch die andere eine solche Bewegung annimmt. Dieser Fall ist auch der gewöhnliche bei allen Räderübertragungen und insbesondere bei schweren Transmissionen für große Kräfte der allein vorkommende. Nur bei manchen Arbeitsmaschinen macht die eigenthümliche Natur des Arbeitsganges eine zusammengesetztere Bewegung des arbeitenden Organs nöthig, von der Art nämlich, daß das Umsetzungsverhältniß gewissen periodischen Veränderungen unterworfen ist, so daß bei einer gleichmäßigen Bewegung der treibenden Welle die getriebene Aze abwechselnd mit größerer und kleinerer Geschwindigkeit umgedreht wird. Außer manchen anderen Mitteln, welche man, wie in der Folge sich zeigen wird, zu diesem Zwecke anwenden kann, sind auch gewisse Räder hierzu verwendbar. Offenbar werden diese Räder nicht mehr eine kreisförmige Grundform erhalten können, da dieselbe an die Bedingung eines unveränderlichen Umsetzungsverhältnisses gebunden ist, und deshalb ist die Bezeichnung *unrunde Räder* für die hier in Betracht kommende Gattung gebräuchlich. Dieselben kommen in der Praxis vergleichsweise nur sehr selten und stets nur bei parallelen Azen vor, da die ohnehin schon großen Schwierigkeiten der Ausführung fast unübersteigliche werden würden, wenn man für schneidende oder gekreuzte Azen derartige Räder anordnen wollte.

Für das richtige Zusammenwirken solcher unrunder Räder lassen sich folgende allgemein gültige Regeln aufstellen, aus denen in jedem einzelnen Falle die Grundform der Räder sich ableiten läßt.

Sind die beiden Azen *A* und *B* und deren Abstand *d*, Fig. 158 (a. f. S.), gegeben, und ist ebenso das Gesetz festgestellt, nach welchem das Umsetzungs-

verhältniß der beiden Axendrehungen veränderlich sein soll, so müssen die Räderumfänge von solcher Beschaffenheit sein, daß je zwei miteinander in

Fig. 158.



der Centrallinie AB in Berührung kommende Punkte wie C und D von ihren Axen Abstände a und b haben, deren Summe gleich dem gegebenen Axen- abstande d ist. Man hat daher als erste Bedingung für je zwei entsprechende

- 1) Punkte in den Radumfängen: $a + b = d$.
 2) Damit aber die beiden Radumfänge

bei dem Zusammentreffen der Punkte C und D sich berühren, ist es erforderlich, daß die Winkel, welche die Tangenten C'C und D'D der Umfänge mit den Radien AC und BD bilden, Supplementwinkel sind. Bezeichnet a allgemein die Länge eines Radius AC des Rades A, welcher von der Centrale um den Winkel $EAC = \alpha$ absteht, und sei mit b der Radius BD und mit β der Winkel EBD für den correspondirenden Punkt D des anderen Rades bezeichnet, so ist, wenn $CAC' = \partial\alpha$ und $DBD' = \partial\beta$ angenommen wird, jene Bedingung für die Berührung der Räder offenbar ausgedrückt durch

$$CC_0 + DD_0 = \pi,$$

d. h. wenn $CC_0 \perp AC$ und $DD_0 \perp BD$ ist, durch

$$C'CC_0 = -D'DD_0,$$

oder $\varphi = -\psi$, wenn man diese Winkel der Tangenten an die Curven mit den durch die Punkte gelegten Kreisbögen mit φ und ψ bezeichnet. Hieraus folgt auch

$$\tan \varphi = -\tan \psi,$$

d. h.

$$\frac{\partial a}{a \partial \alpha} = -\frac{\partial b}{b \partial \beta}.$$

Da nun aus $a + b = d$ sich $\partial a = -\partial b$ ergibt, so geht diese zweite Bedingung für die Berührung über in $a \partial \alpha = b \partial \beta$.

Das von Punkt zu Punkt wechselnde Umsetzungsverhältniß ist hier durch

$$n = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha} = \frac{a}{b}$$

ausgedrückt.

Ist dieses Umsetzungsverhältniß n für irgend einen Punkt gegeben, so findet man wie bei den Kreisrädern aus

$$a + b = d \quad \text{und} \quad \frac{a}{b} = n \quad \text{für diesen Punkt:}$$

$$a = \frac{d}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{d}{1 + \frac{\partial \alpha}{\partial \beta}}$$

$$b = \frac{d}{1 + n} = \frac{d}{1 + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}}$$

Meistens ist nicht das Umsetzungsverhältniß n für jeden Punkt gegeben, sondern es ist durch ein Gesetz der Umdrehungswinkel β bestimmt, um welchen das eine Rad B sich drehen soll, wenn das andere um einen Winkel α gedreht wird, so daß etwa $\beta = f(\alpha)$ gegeben ist. Dann kann man für jeden Augenblick $n = \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}$ bestimmen, und wenn man diesen Werth in obige

Ausdrücke von a und b einsetzt, so erhält man zwei Gleichungen, in welchen a und b als Functionen von α und β ausgedrückt sind, welche Gleichungen also offenbar diejenigen der beiden Radumfänge für zwei Polarcoordinatensysteme sind, deren Anfänge mit den Axen zusammenfallen. Einige Beispiele mögen dies erläutern.

Nimmt man zunächst an, es sei $\alpha = c\beta$ vorausgesetzt, worin c eine constante Größe ist, so wird $\partial \alpha = c \partial \beta$, und man erhält durch Einsetzung dieses Werthes in $a \partial \alpha = b \partial \beta$ hier $c = \frac{b}{a}$, d. h. den Fall kreisförmiger Räder.

Nimmt man dagegen als Gesetz der Bewegungsübertragung etwa die Gleichung

$$\alpha = c_1 \beta + c_2 \beta^2$$

an, worin c_1 und c_2 constant sein sollen, so findet man

$$\partial \alpha = c_1 \partial \beta + 2c_2 \beta \partial \beta,$$

daher

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = c_1 + 2c_2 \beta.$$

Dieser Werth, in die Formel

$$a = \frac{d}{1 + \frac{\partial \alpha}{\partial \beta}}$$

eingesetzt, liefert:

$$a = \frac{d}{1 + c_1 + 2c_2 \beta}$$

und ebenso wird

$$b = \frac{d(c_1 + 2c_2 \beta)}{1 + c_1 + 2c_2 \beta}.$$

Wenn nun c_1 und c_2 direct gegeben sind, so kann man für jeden beliebigen Winkel α offenbar β und das zugehörige a sowohl wie b berechnen, und die Radformen zeichnen. Meist sind jene Constanten aber nicht direct, sondern dadurch gegeben, daß für die beabsichtigte Bewegung gewisse Bedingungen vorgeschrieben sind. Es möge hier beispielsweise angenommen werden, daß bei einer Umdrehung des Rades A das Rad B ebenfalls eine volle Umdrehung gemacht haben möge, daß aber während einer Drehung des Rades A dasjenige B abwechselnd zweimal einer Beschleunigung und zweimal einer Verzögerung ausgesetzt sein soll, derart, daß jede dieser Verzögerungen und Beschleunigungen während einer Drehung der Welle A von je 90° geschehe, und daß die größte Geschwindigkeit des Rades B viermal so groß sein soll, wie ihre kleinste. Aus diesen Bedingungen lassen sich die Constanten wie folgt bestimmen.

Im Anfange der Bewegung für $\alpha = 0$ ist auch $\beta = 0$; dagegen für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ auch $\beta = \frac{\pi}{2}$, folglich hat man:

$$\frac{\pi}{2} = c_1 \frac{\pi}{2} + c_2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

oder

$$1 = c_1 + \frac{\pi}{2} c_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ferner ist im Anfange für $\alpha = \beta = 0$ das Umsetzungsverhältniß

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = c_1;$$

dagegen für $\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$ ist

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = c_1 + 2c_2 \frac{\pi}{2} = c_1 + c_2 \pi.$$

Das Verhältniß beider Größen ist gleich 4 zu setzen, daher

$$\frac{c_1 + c_2 \pi}{c_1} = 4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diese beiden Gleichungen (1) und (2) liefern nun

$$c_1 = 0,4 \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{6}{5\pi} = 0,382.$$

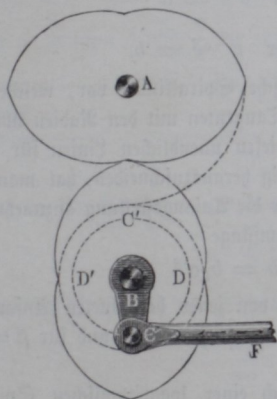
Man hat daher für die Bewegungsübertragung jetzt die Gleichung

$$\alpha = 0,4 \beta \pm 0,382 \beta^2,$$

worin das positive Zeichen für die beiden beschleunigenden und das negative Zeichen für die verzögernden Vierteldrehungen gilt. Ein dem hier berechneten analoges Räderpaar ist durch Fig. 159 dargestellt. Man wendet solche Räder beispielsweise bei Seidenpulmaschinen an, indem

man von der gleichmäßig sich bewegenden Betriebswelle A durch diese Räder die Ase B bald mit größerer, bald mit geringerer Geschwindigkeit dreht,

Fig. 159.



um dadurch die von der Kurbel BC zu erzeugende hin- und hergehende Bewegung des Fadenleiters und damit die Bewickelung der Spulen mit Seide möglichst gleichmäßig zu machen, indem man die Kurbel BC nämlich in der Nähe ihrer Todtpunkte D, D' , wo die Schiebung der Stange F mit geringer Geschwindigkeit vor sich geht, schneller umdreht als in den dazu winkelfrechten Lagen CC' .

Der Gang der Entwicklung bleibt ungeändert, welcher Art die Gleichung auch sein möge, welche zwischen α und β gegeben ist. Hätten die Räder etwa der Bedingung zu genügen, welche durch $\alpha = c_1 \beta + c_2 \sin \beta$ ausgedrückt ist,

so würde man aus

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta} = c_1 + c_2 \cos \beta$$

$$a = \frac{d}{1 + \frac{\partial \alpha}{\partial \beta}} = \frac{d}{1 + c_1 + c_2 \cos \beta}$$

und

$$b = \frac{d}{1 + \frac{\partial \beta}{\partial \alpha}} = \frac{c_1 + c_2 \cos \beta}{1 + c_1 + c_2 \cos \beta} d$$

erhalten u. f. w. *).

Man kann auch zuweilen die Bedingungen, denen die Räder genügen §. 50. sollen, in anderer Art als durch das Verhältniß der Umdrehungsgeschwindigkeiten feststellen, z. B. kann man die Annahme unterstellen, daß

$$\tan \varphi = - \tan \varphi = c$$

sei, d. h. daß die Tangenten der Curven in allen Punkten einen und denselben Winkel, dessen trigonometrische Tangente gleich c ist, mit den Kreisumfängen einschließen sollen. Man hat dann

*) S. u. a. Redtenbacher's Bewegungsmechanismen.

$$c = \frac{\partial a}{a \partial \alpha} = - \frac{\partial b}{b \partial \beta}$$

und erhält daraus durch Integration

$$c \alpha = \log \operatorname{nat} a \quad \text{oder} \quad e^{c\alpha} = a$$

und

$$-c\beta = \log \operatorname{nat} b \quad \text{oder} \quad e^{-c\beta} = b.$$

Diese Gleichungen stellen zwei logarithmische Spirallinien vor, welche bekanntlich die Eigenschaft haben, daß ihre Tangenten mit den Radien überall denselben Winkel einschließen. Um aus diesen unendlichen Linien für zwei Axen, deren Distanz d ist, die Stücke richtig herauszuschneiden, hat man die zwei zugehörigen Halbmesser a_1 und b_1 für die Anfangsstellung anzunehmen, daher sind die Gleichungen für die Räderumfänge

für Räderumfänge $a = a_1 e^{c\alpha} \quad \text{und} \quad b = b_1 e^{c\beta}$

zu schreiben, worin die Winkel α und β von jener betrachteten Anfangsstellung aus zu zählen sind, denn für $\alpha = 0$ muß $a = a_1$ und für $\beta = 0$ muß $b = b_1$ werden.

Die Construction der Räderumfänge nach einer logarithmischen Spirale wendet man wohl auch bei dreieckigen, viereckigen und anderen polygonalen Rädern an. In Fig. 160 ist ein quadratisches Räderpaar vor Augen geführt.

Fig. 160.

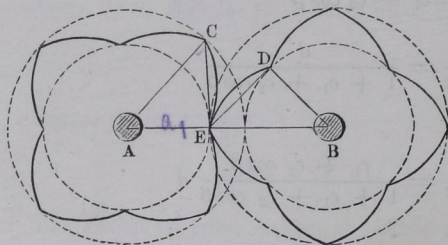
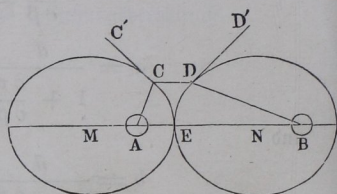


Fig. 161.



Ist hier der kleinste Halbmesser AE des Rades A gleich a_1 , so hat man den größten Halbmesser

$$AC = a_1 \sqrt{2} = 1,4142 a_1$$

für den Umdrehungswinkel

$$\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ.$$

Setzt man in der Gleichung

$$a = a_1 e^{c\alpha} \quad \text{oder} \quad c\alpha = \log \operatorname{nat} \frac{a}{a_1}$$

für α den Werth $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{a}{a_1} = \sqrt{2}$ ein, so findet sich

$$c = \tan \varphi = \frac{4}{\pi} \log \text{nat} \sqrt{2} = 0,44128,$$

und daher $\varphi = 23^\circ 49'$. Die Gleichung der Radcurven schreibt sich also nun: $a = a_1 e^{0,44128 \alpha}$, woraus man durch Einsetzung verschiedener Werthe für α zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ die zugehörigen Werthe von a und also auch von $b = d - a$ findet. Das Umsetzungsverhältniß bei der Berührung in E ist

$$n_1 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und bei der Berührung zwischen C und D_1

$$n_2 = \frac{b_1}{a_1} = \sqrt{2},$$

also das Verhältniß der größten zur kleinsten Geschwindigkeit

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1/2}} = 2.$$

Polygonale Räder sind u. A. von Bacon und Donkin bei ihren Buchdruckerpressen angewendet worden, bei welchen die Druckerformen auf den Seiten eines rotirenden Prismas angebracht waren und durch diese Räder die Bewegung zwischen dem Prisma und der Druckwalze vermittelt wurde. S. Nicholson's *The operative mechanic*, 1834, p. 302.

In ähnlicher Weise lassen sich polygonale Räder von beliebiger Seitenzahl construiren, und ist es keineswegs Bedingung, daß die Anzahl der Polygonseiten bei beiden Rädern dieselbe sei. Hat das eine Rad m_1 und das andere m_2 Seiten, und sind die Umdrehungszahlen für eine bestimmte Zeit z_1 und z_2 , so hat man immer $m_1 z_1 = m_2 z_2$.

Einen besonderen hierher gehörigen Fall bilden die elliptischen Räder, Fig. 161. Zwei gleiche Ellipsen, die um ihre entsprechenden Brennpunkte A und B sich drehen, genügen offenbar den allgemeinen Bedingungen des Zusammenwirkens, denn irgend ein Punkt C der einen Ellipse findet in der anderen Ellipse einen Gegenpunkt D von solcher Beschaffenheit, daß die beiden Radien $AC + BD$ gleich der großen Ellipsenaxe, also auch gleich dem Axenabstande sind, und schließen die beiden Radien irgend eines Punktes bekanntlich bei der Ellipse, also auch bei congruenten Ellipsen denselben Winkel mit der Tangente dieses Punktes ein. Die große Axe der Ellipsen ist gleich dem Axenabstande d . Setzt man die große Halbaxe $\frac{d}{2} = a$ und die kleine Halbaxe b , so ist die Excentricität

$$MA = NB = e = \sqrt{a^2 - b^2},$$

und man hat daher das größte Umsetzungsverhältniß

$$n_1 = \frac{a + e}{a - e}$$

und das kleinste

$$n_2 = \frac{a - e}{a + e},$$

folglich bei gleichmäßiger Bewegung des treibenden Rades A das Verhältniß zwischen der größten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades

$$v = \frac{n_1}{n_2} = \left(\frac{a + e}{a - e} \right)^2.$$

Ist dieses Verhältniß v vorgeschrieben, so folgt bei gegebenem Arenabstande $d = 2a$ aus dieser Gleichung

$$a + e = (a - e) \sqrt{v}$$

und daher

$$e = a \frac{\sqrt{v} - 1}{\sqrt{v} + 1},$$

also die kleine Halbaxe

$$b = \sqrt{a^2 - e^2} = \frac{2a \sqrt{v}}{\sqrt{v} + 1}.$$

Die elliptischen Räder wendet man mehrfach bei Hobelmaschinen an, um dem Schlitten, welcher von der Welle B durch eine Kurbel hin- und herbewegt wird, einen langsamen Vorgang beim Arbeitsproceß des Meißels und einen schnellen Rücklauf zu geben. Sollte die größte Geschwindigkeit der Welle B mit der Kurbel 4 mal so groß sein, als die kleinste, so hätte man den Ellipsen die Excentricität

$$e = a \frac{\sqrt{4} - 1}{\sqrt{4} + 1} = \frac{a}{3}$$

zu geben und die kleine Halbaxe

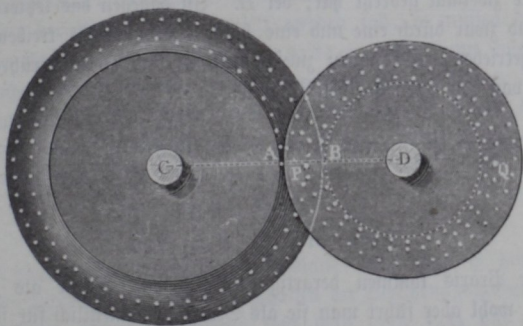
$$b = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{9}} = a \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,943 a$$

zu machen.

Man kann auch Räder so anordnen, daß der Berührungspunkt auf jedem derselben einer Schraubenlinie entlang wandert. Die Oberflächen der Räder werden hierbei conische werden, sobald das Umsetzungsverhältniß ein veränderliches ist. Derartige conische Räder sind zuerst von dem Astronomen Römer angegeben worden und giebt Fig. 162 einen Begriff von einem solchen Räderpaare. Dasselbe ist der Bedingung gemäß construirt, daß das getriebene Rad BC zwei Umgänge gemacht haben soll, sobald das treibende

Rad AD sich dreimal herum bewegt hat, und daß das Umsetzungsverhältniß dabei schließlich auf die Hälfte seines anfänglichen Werthes vermindert werden

Fig. 162.



soß, d. h. daß also $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{2} \frac{AD}{AC}$ sei. Legt man hier wieder das Gesetz für die Aenderung der Bewegung zu Grunde, welches durch $\alpha = c_1 \beta + c_2 \beta^2$ ausgedrückt ist, so findet man die Constanten c_1 und c_2 mit Rücksicht auf die gestellten Bedingungen wie früher aus:

$$3 \cdot 2\pi = c_1 \cdot 2 \cdot 2\pi + c_2 (2 \cdot 2\pi)^2$$

und

$$\frac{c_1}{c_1 + 2c_2 \cdot 2 \cdot 2\pi} = \frac{1}{2}$$

zu

$$c_1 = 1 \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{1}{8\pi}.$$

Daher ergeben sich bei dem Arenabstande $DC = d$ die Halbmesser der Räder für den Anfang der Bewegung

$$AD = a_1 = \frac{d}{1 + c_1} = \frac{d}{2}$$

und also auch

$$AC = b_1 = \frac{d}{2},$$

und für das Ende der Bewegung

$$BD = a_2 = \frac{d}{1 + c_1 + 2c_2 \cdot 2 \cdot 2\pi} = \frac{d}{3},$$

also

$$BC = b_2 = \frac{2}{3} d.$$

Die Zähne sind in der Figur durch Punkte angedeutet, welche bei dem Rade AD in drei, bei dem Rade BC in zwei Windungen angeordnet sind. Anfangs ist der Eingriff bei A und nachdem das treibende Rad sich dreimal, das andere zweimal gedreht hat, bei B . Ist dagegen das letztere Rad nur einmal und zwar durch eine und eine halbe Drehung des treibenden Rades AD umgetrieben, so kommen zwei Punkte P und Q in Berührung, deren Abstände von den Ären gegeben sind zu:

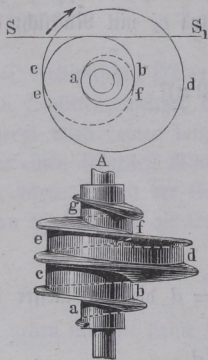
$$QD = \frac{d}{1 + c_1 + 2c_2\beta} = \frac{d}{1 + 1 + 2 \frac{1}{8\pi} 2\pi} = \frac{2}{5} d$$

und

$$PC = d - \frac{2}{5} d = \frac{3}{5} d.$$

In der Praxis kommen derartige spiralförmige Räder als Zahnräder kaum vor, wohl aber führt man sie als Seilräder namentlich für selbstthätige Spinnstühle als sogenannte Einzugsschnecken und Auszugsschnecken vielfach aus, wovon Fig. 163 eine Anschauung giebt. Der Zweck ist dabei,

Fig. 163.



von einer mit gleichmäßiger Geschwindigkeit umlaufenden Welle A den die Spindeln tragenden Wagen durch den Zug eines Seiles S mit geringer Geschwindigkeit anzuziehen, die sich allmählig steigert, um im Zustande des höchsten Betrages ebenso allmählig wieder auf die geringe anfängliche Größe herabzusinken, so daß etwaige durch die beträchtliche Masse des Wagens veranlaßte Stößwirkungen möglichst verringert werden. Das Seil wickelt sich zu diesem Zwecke nach und nach an den Stellen a, b, c, d, e, f und g auf und auch ab, indem zwei Seilstücke S und S_1 angeordnet sind, von denen S bei a und S_1 bei g befestigt ist, und welche die Schnecke in entgegengesetzten Richtungen umschlingen. Da beide Seile stets an demselben Punkte die Schnecke verlassen (zu welchem Zwecke die Schneckengänge breit genug für zwei Seilstärken gehalten sind), so folgt, daß bei der Drehung der Schnecke etwa im Sinne des Pfeils von dem Seile S sich genau so viel aufwickelt, wie sich von dem Seile S_1 abwindet. Die Seile S und S_1 kann man sich auf jeder Seite um feste Leitrollen geschlagen, und mit ihren anderen Enden an dem hier nicht gezeichneten Spindelwagen befestigt denken*).

*) S. Prechtl's Technolog. Encyclopädie den Artikel „Baumwolle“ von Hülße; ferner Stamm, Der Selfactor u. a. a. D.

Zu den Spirälrädern muß auch die in den Spindeluhren gebräuchliche conische Schnecke gerechnet werden (s. w. u.).

Reibungsräder. Wenn die Mittheilung der Bewegung durch bloße §. 51. Verührung der Radumfänge bewirkt werden soll, so müssen die Räder, welche dann Frictions- oder Reibungsräder heißen, mit solcher Kraft gegen einander gepreßt werden, daß die zwischen den Umfängen entstehende Reibung mindestens den Betrag der zu übertragenden Kraft K erreicht. Bezeichnet φ den Reibungscoefficienten, so ist der nöthige Druck der Räder gegen einander

$$R = \frac{K}{\varphi},$$

und damit dieser nicht unnöthig groß ausfalle, muß man φ durch richtige Auswahl der Materien und durch Rauhhalten der Verührungsflächen möglichst groß zu machen suchen. Deshalb läßt man gern Holz auf Holz, oder mindestens Holz auf Gußeisen laufen, oder belegt wohl gar den einen Radumfang mit Leder, und zwar vorzüglich mit Büffelleder. Man fertigt kleinere Frictionsräder auch wohl ganz aus concentrischen Scheiben von Leder und in neuerer Zeit wohl auch aus vielen solchen Scheiben aus festem Hanfpapier, welche durch den Druck starker hydraulischer Pressen in derselben Art mit einander vereinigt werden, wie dies bei der Herstellung der Papierwalzen für die Kalander geschieht. Nimmt man im Mittel für diese Materialien $\varphi = 0,4$ an, so folgt der zwischen den Rädern erforderliche Druck mindestens zu

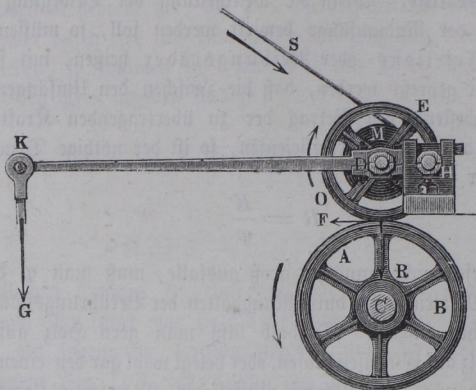
$$R = \frac{K}{\varphi} = 2,5 K,$$

welcher Druck nur an den Zapfen beider Axen Reibung erzeugt. Ueberdies bieten aber die Reibungsräder noch den Uebelstand dar, daß wenigstens das eine von ihnen keine feste Lagerung erhalten darf, da nur durch die Axenlager der Druck R auf das Rad übertragen werden kann. Es werden deshalb die Reibungsräder auch nur selten, und in der Regel nur da angewendet, wo man es, wie z. B. bei Mühlen- oder Sichtaufzügen, mit einer unveränderlichen Last zu thun hat, und wo ein sich oft wiederholendes In- und Außergangsetzen der Maschine nöthig ist.

Die Einrichtung eines solchen Räderwerks zur Bewegung einer Winde zeigt Fig. 164 (a. f. S.). Hier ist AB das auf der festgelagerten Welle befindliche Treibrad, von welchem das auf der Trommelwelle D angebrachte Rad EO seine Bewegung empfängt. Zu dem Ende sitzen die Zapfenlager des letzteren in einem gegabelten Hebel KDH , der um H drehbar ist, und durch eine bei K angreifende Kraft G auf- oder niedergedrückt wird, je nachdem die Trommel außer oder in Gang gesetzt werden soll. Beim Niederziehen des

gedachten Hebels wird das Rad DEO mit einer gewissen Kraft R gegen den Umfang des Treibrades ACB gedrückt, und mittelst der aus letzterer

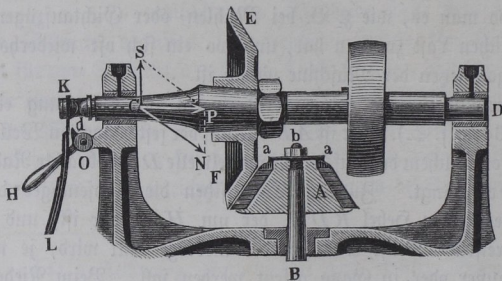
Fig. 164.



hervorgehenden Reibung $F = \varphi R$ die Umdrehung der Welle C dieses Rades auf die Welle D der Trommel M übertragen, um welche sich das die Last tragende Seil S wickelt.

Die Frictionsräder wendet man auch bei Maschinen mit schnell umlaufenden Wellen an, welche oft in und außer Gang zu setzen sind. Da die Reibung nur allmählig eine Geschwindigkeitsveränderung hervorbringt, so werden bei Anwendung derselben als Transmissionskraft die Stöße vermieden, welche in dem angegebenen Falle bei Zahnradwerken bedeutend ausfallen können. In dieser Hinsicht wirken die Frictionsräder ähnlich wie die Frictionskupplungen, und sind deshalb namentlich zur Vermittelung der schnellen Bewegung bei Centrifugaltrockenmaschinen beliebt. Ein conisches Frictionsräderwerk für eine schnell umlaufende Turbine führt Fig. 165 vor

Fig. 165.



Augen. Das auf der Turbinenwelle sitzende conische Rad A ist von einer Schicht Federringe umgeben, welche mittelst einer ringförmigen Schraubennutter aa zusammengebrückt werden, während das Rad selbst durch eine Schraube b fest mit der Welle B verbunden wird. Auf der horizontalen Welle CD sitzt das glatt abgedrehte conische Rad EF , welches mittelst einer gewissen Normalkraft N gegen den Federmantel des ersten Rades gedrückt wird. Die hieraus hervorgehende Reibung φN ist der größte Werth der von einem Rade auf das andere zu übertragenden Kraft. Eine Feder KL sucht die Welle CD in ihrer Azenrichtung mit einer gewissen Kraft P fortzuschieben, welche sich in die Componenten N und S zerlegt, wovon die erstere die gedachte Normalkraft und die andere eine von den Zapfenlagern aufzunehmende Seitenkraft ist. Ist α der Neigungswinkel der Seite des Kegels A gegen die Aze, also auch der Winkel DCN , so haben die gedachten Seitenkräfte die Werthe

$$N = \frac{P}{\cos \alpha} \text{ und } S = P \tan \alpha,$$

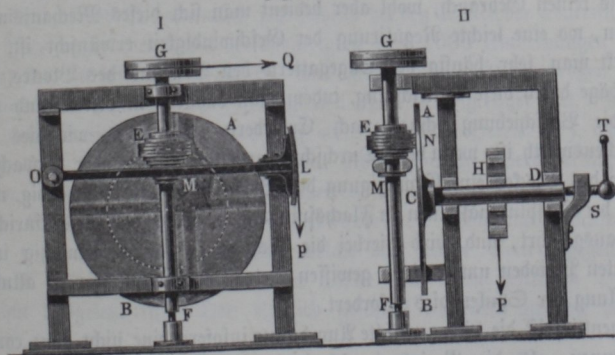
und es ist die mögliche Umdrehungskraft des Räderwerkes

$$K = \varphi N = \frac{\varphi P}{\cos \alpha}.$$

Während der Bewegung wird durch den Federdruck P am Ende der Welle DC eine Spurzapfenreibung erzeugt, welche man durch kugelförmige Bildung des Wellenendes bei d möglichst herabzuziehen pflegt. Zum Ausrücken der Bewegung genügt ein Druck auf den Winkelhebel HOd , dessen kürzerer Arm Od dann, wie aus der Figur ersichtlich ist, die Feder zurückbiegt.

Anstatt der conischen Frictionsscheiben wendet man befuß der bequemen §. 52. Veränderung des Umsetzungsverhältnisses in vielen Fällen die in Fig. 166

Fig. 166.



dargestellte Anordnung an, bei welcher die treibende Welle CD an einem Ende mit einer ebenen Scheibe von Gußeisen (Planscheibe) versehen ist, während die zu treibende Axe GF eine cylindrische als Holz- oder Leder-scheibe gefertigte Frictionsscheibe E erhält. Der genügende Druck der Scheiben gegen einander wird dadurch herbeigeführt, daß man die Welle DC in ihren Lagern verschiebbar, d. h. ohne Anläufe lagert, und durch eine gegen das Wellenende wirkende Schraube S vermöge des Schlüssels T gegen die Scheibe E preßt. Die Welle DC erhält ihren Betrieb von einer Transmissionswelle aus auf die Riemscheibe H , während die getriebene Welle FG durch das Rad G die Bewegung weiter fortpflanzen kann. Durch den um O drehbaren Hebel OL , welcher bei M die Scheibe E in einer Halsmuth umfaßt, läßt sich erstere auf ihrer Axe verschieben und erreicht man hierdurch den Vortheil, jederzeit das Umsetzungsverhältniß nach Belieben ändern zu können. Ist nämlich der mittlere Berührungspunkt N beider Scheiben von der Mitte C der Planscheibe um a entfernt, und b der Halbmesser der Frictionsscheibe E , so hat man als Umsetzungsverhältniß den Werth $\frac{a}{b}$ in Rechnung zu stellen, indem in den beiden durch N gehenden, zu den Axen concentrischen Kreisen die Peripheriegeschwindigkeiten gleich groß vorausgesetzt werden müssen. Bezeichnet a_1 den größten Abstand von C , bis zu welchem die Mitte der Scheibe E gebracht werden kann, so ist das größte Umsetzungsverhältniß durch $\frac{a_1}{b}$ gegeben, welches dadurch, daß man die Scheibe E bis zur Mitte C herunterschiebt, bis auf Null gebracht wird. Wird nun die Scheibe E noch tiefer, also unter die Mitte C heruntersgeschoben, so wird das Umsetzungsverhältniß absolut genommen wieder größer aber negativ, d. h. die Welle GF nimmt jetzt eine entgegengesetzt gerichtete Umdrehung an. Von letzterem Umstande macht man in der Regel in der Praxis keinen Gebrauch, wohl aber bedient man sich dieses Mechanismus in Fällen, wo eine leichte Regulirung der Geschwindigkeit erwünscht ist. So bewirkt man sehr häufig bei Sägegattern den Vorschub des Blockes gegen die Säge durch diese Einrichtung, indem man dadurch in den Stand gesetzt ist, die Vorschiebung schnell nach Erfordern zu ändern, wie dies z. B. wünschenswerth ist, wenn beim Durchschneiden einer ästigen oder verwachsenen Stelle des Blockes eine Ermäßigung des Vorschubes sich nothwendig macht. Auch bei Vorspinnmaschinen in Flachspinnereien findet man diese Einrichtung öfter ausgeführt, und wird hierbei die Scheibe E ganz regelmäßig in bestimmten Perioden um je einen gewissen Betrag verschoben, wie die allmälige Anfüllung der Spulen dies erfordert.

Eigentlich ist die hier gewählte Anordnung insofern eine nicht ganz correcte zu nennen, als die Peripheriegeschwindigkeiten der beiden Scheiben nicht

in allen Punkten ihrer Berührungslinie gleich groß sein können, indem dazu nach §. 45 erforderlich ist, daß die Scheiben die Form von Kegelmänteln haben, deren gemeinschaftliche Spitze im Durchschnitte der Axen gelegen ist. Da diese Bedingung wegen der Verschiebung der Scheibe *E* nicht ermöglicht werden kann, so wird die Peripheriegeschwindigkeit beider Scheiben auch nur in einem Punkte der Berührungslinie, etwa im Mittelpunkt *N* derselben, gleich sein, obwohl auch nicht mit voller Sicherheit behauptet werden kann, daß dieser Punkt gerade die Mitte der Berührungslinie ist. Alle über diesen Punkt *N* gleicher Geschwindigkeit hinausliegenden Punkte der Planscheibe bewegen sich mit größerer, alle innerhalb liegenden Punkte mit geringerer Geschwindigkeit, als die mit ihnen in Berührung kommenden Punkte der Scheibe *E*. Die Folge davon ist, daß durch die beständige Friction die Scheibe *E* bald ein derartig leicht abgerundetes Profil annimmt, daß die Berührung nur in einer sehr schmalen Fläche vor sich geht. Man führt daher die Scheibe *E* meist von vornherein in nur geringer Breite aus.

Bei Centrifugaltrockenmaschinen wählt man dieses Getriebe hauptsächlich auch aus dem Grunde, um die Trommel, welche hierbei direct auf der Welle *GF* angebracht ist, bei schnell rotirender Axe *DC* doch ganz allmählig in und außer Gang setzen zu können, indem man dazu nur nöthig hat, die Scheibe *E* von der Mitte *C* langsam nach außen, beziehungsweise von außen langsam nach innen zu bewegen. Ginge man beim Außergangsetzen noch unter die Mitte *C* herab, so würde der nun entgegengesetzt wirkende Antrieb sogar bremsend wirken, wovon man aus Rücksicht auf die gute Erhaltung der Theile aber meist keinen Gebrauch zu machen pflegt.

Ein großer Uebelstand der besprochenen Einrichtung besteht auch hier, wie bei allen Frictionsscheiben, in dem Auftreten großer Zapfenreibungswiderstände, welche bei der vorliegenden Anordnung einestheils an der Spur der Schraube *S*, anderentheils in dem Halslager der Axe *GF* sich einstellen. Letzterer Widerstand ist namentlich sehr störend bei den Wellen der Centrifugen, die bei ihrer außerordentlichen Geschwindigkeit (bis 1000 Umdrehungen pro Minute) bald zu schlottern beginnen, was gerade wegen dieser großen Geschwindigkeit die bedenklichsten Zufälligkeiten schon herbeigeführt hat. Man hat in dieser Beziehung die Anordnung eines doppelten Betriebes*), wie sie in Fig. 167 (a. f. S.) dargestellt ist, als wesentliche Verbesserung zu erkennen. Hier sind zwei Planscheiben *A* und *A'* auf zwei mit gleicher Geschwindigkeit nach entgegengesetzten Richtungen laufenden Wellen *CD* und *C'D'* angebracht, welche von beiden Seiten gegen die Scheibe *E* gepreßt werden, so daß die Welle *GF* einem seitlichen Drucke gar nicht ausgesetzt ist. Der Antrieb geschieht natürlich auf die beiden

*) S. Zeitschrift deutsch. Ing. Jahrg. 1874, S. 531.

Riemenscheiben H und H' durch einen offenen und durch einen gekreuzten Riemen.

Um die Uebertragung auch größerer Kräfte durch Frictionsräder zu ermöglichen, ohne die Pressung beträchtlich machen zu müssen, sind von

Fig. 167.

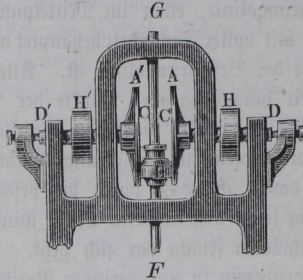
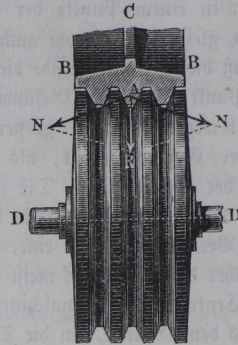


Fig. 168.



Minotto die sogenannten Keilräder angegeben worden, von denen Fig. 168 eine DAD in der Seitenansicht, das zugehörige im Kranzdurchschnitt BCB darstellt. Hier sind die cylindrischen Kränze mit einer Anzahl ringsum eingebrochter Nuthen oder Furchen von keilförmigem Querschnitte derartig versehen, daß die erhabenen Ringe des einen in die Furchen des anderen eingreifen. Daß hierdurch eine Vergrößerung der Friction herbeigeführt wird, ergibt ohne Weiteres die Theorie des Keils, es wird eine auf die Räder wirkende Arenpressung R sich in zwei Componenten AN zerlegen, für welche man die bekannte Beziehung hat:

$$R = 2 N \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \varphi \cos \frac{\alpha}{2} \right),$$

wenn α den Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander angiebt. Ganz ähnlich wie in früheren Beispielen (s. §. 11 und §. 31) wird daher auch hier, unter φ den Reibungscoefficienten verstanden, die Größe der Friction, welche einem Gleiten der Radumfangs auf einander sich entgegensetzt, durch

$$F = \frac{\varphi R}{\sin \frac{\alpha}{2} + \varphi \cos \frac{\alpha}{2}} \quad *)$$

gefunden.

*) Auch hierfür findet man mehrfach in Lehrbüchern die Formel $F = \frac{\varphi R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$

angegeben, es gilt hierfür das in §. 31 darüber Gesagte.

Die Anzahl der Keilnuthen ist für die Theorie gleichgültig, für die Ausführung ist die Anordnung mehrerer Nuthen jedoch derjenigen einer einzigen vorzuziehen, weil dabei die Tiefe der Nuthen vermindert werden und der Flächendruck hinreichend klein gehalten werden kann. Daß nämlich die Tiefe der Furchen um so nachtheiliger wirkt, je größer sie ist, erkennt man leicht. Berühren sich ein Ring und eine Furche, Fig. 169, in einer Länge ab , so können die Umfangsgeschwindigkeiten doch nur in einem Punkte, etwa in

Fig. 169.

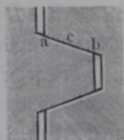
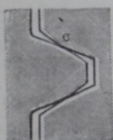


Fig. 170.



c , gleich groß sein; in allen anderen Punkten zwischen c und a sowie c und b sind ungleiche Geschwindigkeiten vorhanden, welche starke schädliche Reibungen herbeiführen, die um so größer ausfallen müssen, je größer die Längen ca und cb im Verhältnisse zu den Radhalbmessern sind. In Folge dieser

Reibungen werden die Oberflächen bald eine Form wie Fig. 170 andeuten annehmen, so daß der Druck sich doch nur auf einen Punkt c oder eine sehr schmale Fläche concentrirt, weshalb die Anordnung mehrerer Furchen resp. Rippen neben einander sich empfiehlt.

Der Winkel α der Keile wird etwa zu 30° angenommen. Auch für conische Räder hat Minotto diese Anordnung unter Anwendung nur einer nachstellbaren Rinne angewandt, ebenso hat man Keilräder für Locomotivbetrieb zur Ueberwindung größerer Steigungen in Vorschlag gebracht. Reuleaux empfiehlt die Keilräder vorzugsweise für Uebersetzungen ins Langsame.

Anmerkung. Nimmt man den Reibungscoefficienten zu $0,2$ und den Winkel $\alpha = 30^\circ$ an, so erhält man

$$F = \frac{0,2 R}{\sin 15^\circ + 0,2 \cdot \cos 15^\circ} = 0,43 R,$$

während die öfter angegebene einfachere Formel den unwahrscheinlich hohen Werth

$$F = \frac{0,2 R}{\sin 15^\circ} = 0,77 R$$

liefert.

Riemenräder. Die Riemenräder sind ebenfalls zu den Reibungs- §. 53. rädern zu rechnen, indem auch bei ihnen die Uebertragung der Bewegung nur dadurch ermöglicht wird, daß an den Umfängen der beiden Räder Reibungswiderstände auftreten, welche größer sind, als der zu überwindende Nutzwiderstand; denn da von zwei Widerständen natürlich immer der kleinere zunächst überwunden wird, so wird dies mit dem Nutzwiderstande so lange geschehen, als derselbe kleiner ist, als die Reibung, welche bei einem etwaigen

Gleiten des einen Rades überwunden werden muß. Von den gewöhnlichen Frictionscheiben unterscheiden sich die Riemenräder durch die mittelbare Bewegungsübertragung durch Riemen, Schnüre oder Seile, überhaupt durch Körper von hinreichender Biegsamkeit, um ein möglichst inniges Anschmiegen an die Räderoberflächen zu gestatten. Sind A und B , Fig. 171 und 172,

Fig. 171.

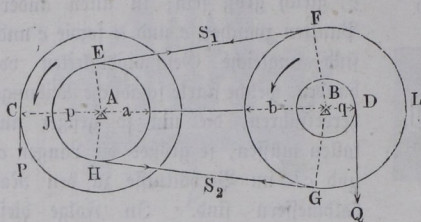
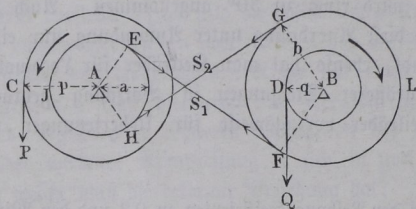


Fig. 172.



die Axen zweier Riemen-
scheiben, deren Umfänge
durch den endlosen Riemen
 $EFGH$ umspannt sind,
und wirkt an der Axe B ein
zu überwindender Wider-
stand Q am Hebelarme q ,
so ist in dem Früheren
schon ermittelt, daß, ab-
gesehen von Nebenhinder-
nissen, zur Ueberwindung
dieses Widerstandes eine
Kraft P an der Axe A ,
etwa im Abstande p wirk-
sam sein muß, die sich be-
stimmt zu:

$$P = Q \frac{q}{p} \frac{a}{b}.$$

Die am Umfange der
Scheibe B wirkende Wider-
standskraft ist durch $Q \frac{q}{b}$

gegeben, und ebenso groß
muß natürlich die Kraft K

sein, welche am Umfange des Rades A wirkt, um vermöge des Riemens
den Widerstand der Axe B zu überwinden. Um letzteren Zweck zu erreichen,
darf ein Gleiten des Riemens weder auf der Scheibe A noch auf B statt-
finden, es muß also an jedem der Radumfänge ein Reibungswiderstand von
mindestens der Größe

$$K = Q \frac{q}{b} = P \frac{p}{a}$$

sich dem Gleiten des Riemens entgegenstellen. Dieser Widerstand nun,
welchen ein biegsamer Körper, Riemen oder Seil, erfährt, wenn er auf einem
Cylinder gleitet, ist nach den Entwicklungen in Theil I. §. 199 leicht zu
bestimmen. Bezeichnet nämlich S_2 eine in dem Riemenstücke GH vor-

handene Spannung, so muß, um den Riemen zum Hinweggleiten über die festgehaltene Scheibe A zu veranlassen, bei E eine Kraft S_1 in der Richtung EF wirksam sein, welche sich nach den früheren Ermittlungen bestimmt zu: $S_1 = S_2 e^{\varphi \gamma_1}$, wenn γ_1 den vom Riemen umspannten Bogen (vom Halbmesser Eins) HJE bedeutet. Die dabei auftretende Reibung ist also durch

$$F_1 = S_1 - S_2 = S_2 (e^{\varphi \gamma_1} - 1)$$

ausgedrückt. Dieselbe Betrachtung läßt sich auch für die Scheibe B anstellen, und es folgt für dieselbe der Reibungswiderstand des gleitenden Riemens zu

$$F_2 = S_1 - S_2 = S_2 (e^{\varphi \gamma_2} - 1),$$

wenn unter γ_2 der umspannte Bogen FLG verstanden wird. Von diesen beiden Werthen ist derjenige offenbar der kleinere, für welchen der umspannte Bogen den kleineren Werth hat, und man kann daher, unter γ den kleineren dieser Bögen verstanden, nach dem Obigen schließen, daß die zu übertragende Kraft K höchstens den Werth dieses kleineren Reibungsbetrages haben kann, d. h. man erhält die Gleichung:

$$K = S_1 - S_2 = S_2 (e^{\varphi \gamma} - 1),$$

welche man auch schreiben kann:

$$S_2 = \frac{K}{e^{\varphi \gamma} - 1},$$

$$S_1 = \frac{e^{\varphi \gamma} K}{e^{\varphi \gamma} - 1}.$$

Diese Gleichungen lehren, daß zur Uebertragung einer bestimmten Kraft K die Spannungen der Riemen in den beiden Stücken zwischen den Rädern von verschiedener Größe sein müssen, und daß die Differenz dieser Spannungen gleich der übertragenen Kraft ist. Man nennt das Riemenende, welches die größere Spannung S_1 hat, das ziehende oder treibende auch wohl straffe, das andere mit der kleineren Spannung S_2 heißt dagegen das gezogene oder getriebene auch wohl schlaffe Riemenende. Im Zustande der Ruhe haben beide Riemenstücke gleiche Spannung S , und man muß, wenn der Riemen nicht rutschen soll, diese Spannung zu

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{e^{\varphi \gamma} + 1}{e^{\varphi \gamma} - 1} \frac{K}{2}$$

normiren. Der durch den Riemen erzeugte Druck auf jede der beiden Axen beträgt daher

$$2S = S_1 + S_2 = \frac{e^{\varphi \gamma} + 1}{e^{\varphi \gamma} - 1} K,$$

ist also unter allen Umständen größer als K . Ist die Kraft K nicht durch die Angabe von Q und q gegeben, sondern kennt man, wie dies gewöhnlich der Fall ist, außer der Anzahl der Umdrehungen u_1 und u_2 der Wellen A und B

pro Minute noch die Größe des zu übertragenden Arbeitsmomentes N in Pferdekraften, so ergibt sich, die Halbmesser a und b in Metern verstanden, K in Kilogrammen durch

$$K = \frac{30 N 75}{\pi a u_1} = \frac{30 N 75}{\pi b u_2}$$

$$= 716,2 \frac{N}{a u_1} = 716,2 \frac{N}{b u_2}.$$

Kennt man die Riemen Geschwindigkeit

$$v = \frac{2 \pi a u_1}{60} = \frac{2 \pi b u_2}{60},$$

so hat man direct

$$K = \frac{75 N}{v}.$$

Beispiel. Wenn ein Riemenbetrieb ein Arbeitsquantum N von 2 Pferdekraften zu je 75 Kilogramm Meter bei 2 Meter Riemen Geschwindigkeit fortpflanzt, und wenn ferner die beiden Räder, um welche der Riemen läuft, so weit von einander entfernt sind, daß man annehmen kann, der letztere bedeckt den halben Umfang von jedem der Räder, so hat man bei dem Reibungscoefficienten $\varphi = \frac{1}{2}$ zwischen Riemen und Rad:

$$e^{\varphi \gamma} = (2,71828)^{0,5 \cdot 3,1416} = 2,71828^{1,5708} = 4,81,$$

daher die Riemen Spannungen:

$$S_2 = \frac{K}{e^{\varphi \gamma} - 1} = \frac{N 75}{v (e^{\varphi \gamma} - 1)} = \frac{2 \cdot 75}{2 (4,81 - 1)} = \frac{75}{3,81} = 19,68 \text{ Kilogramm}$$

und

$$S_1 = e^{\varphi \gamma} S_2 = 4,81 \cdot 19,68 = 94,68 \text{ Kilogramm,}$$

folglich die mittlere Spannung vor dem Zangengehen der Maschine:

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{94,68 + 19,68}{2} = 57,2 \text{ Kilogramm.}$$

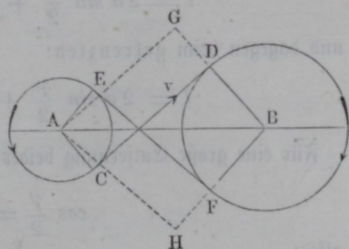
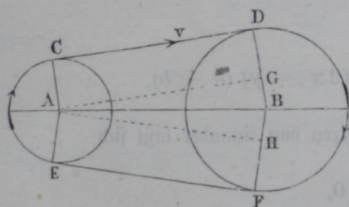
§. 54. **Riemen Spannungen.** Zur Berechnung der Riemen Spannungen ist dem Vorhergehenden zufolge die Kenntniß der Reibungscoefficienten zwischen Riemen und Rad, sowie die Größe des durch den Riemen bedeckten Bogens nothwendig. Was die ersten anlangt, so hat man nach Morin (siehe dessen Aide mémoire oder dessen Nouvelles expériences sur le frottement etc., Paris 1838):

- $\varphi = 0,50$ für Hanfseile auf hölzernen Rädern,
- $= 0,50$ für neue Riemen auf dergleichen,
- $= 0,47$ für gewöhnlich fette Riemen auf hölzernen Trommeln,
- $= 0,38$ für feuchte Riemen auf abgedrehten gußeisernen Rädern,
- $= 0,28$ für gewöhnlich fette Riemen auf dergleichen,
- $= 0,12$ für eingefettete Riemen auf dergleichen.

Die Größe der durch den Riemen bedeckten Bögen läßt sich aus den Radhalbmessern $AC = a$ und $BD = b$ und der Entfernung $AB = d$ beider Radaxen, Fig. 173 und 174, bestimmen. Wir haben zwei Fälle zu

Fig. 173.

Fig. 174.



unterscheiden; entweder ist der Leibriemen offen oder er ist gekreuzt. Bei dem offenen oder ungeschränkten Riemen ohne Ende, wie Fig. 173, wird die Hälfte des Winkels $DBF = CAE = \gamma_1$ durch die Formel

$$\cos ABD = \frac{BG}{AB} = \frac{BD - AC}{AB},$$

d. i. durch

$$\cos \frac{\gamma_1}{2} = \frac{b - a}{d}$$

bestimmt; bei dem gekreuzten oder geschränkten Riemen, Fig. 174, findet man den Winkel

$$DBF = 2\pi - \gamma_1 = 2\pi - \gamma_2$$

durch

$$\cos ABD = \frac{BG}{AB} = \frac{BD + AC}{AB},$$

d. i.

$$\cos \left(\pi - \frac{\gamma}{2} \right) = \frac{a + b}{d}.$$

Im letzteren Falle ist jedes Rad in dem Bogen $2\pi - \gamma$ durch den Riemen bedeckt, während der offene Riemen, Fig. 173, das kleinere Rad nur in dem Bogen γ_1 und das größere in dem Bogen $\gamma_2 = 2\pi - \gamma_1$ bedeckt; es findet daher bei dem gekreuzten Riemen wegen des größeren umspannten Bogens die Uebertragung einer gewissen Kraft bei einer kleineren Riemenspannung statt, als bei dem offenen Riemen.

Unter γ ist immer die Länge des Bogens vom Halbmesser Eins zu verstehen, ist γ daher in Graden gegeben (γ^0), so hat man

$$\gamma = 0,017453 \gamma^0 \quad \text{oder} \quad \gamma^0 = 57,297 \gamma = 57,297 \frac{\lambda}{a}$$

zu setzen, wenn λ die Bogenlänge für den Halbmesser a bezeichnet.

Die Länge des ganzen Riemens ist beim offenen Riemen
 $l = CD + EF + \text{Bog. } EC + \text{Bog. } DF = 2AG + \gamma_1 a + (2\pi - \gamma_1) b$,
 d. i.

$$l = 2d \sin \frac{\gamma_1}{2} + \gamma_1 a + (2\pi - \gamma_1) b,$$

und dagegen beim gekreuzten:

$$l = 2d \sin \frac{\gamma}{2} + (2\pi - \gamma) (a + b).$$

Für eine große Entfernung beider Axen von einander läßt sich

$$\cos \frac{\gamma}{2} = 0,$$

also

$$\frac{\gamma^0}{2} = 90^\circ \text{ oder } \gamma = \pi$$

und daher in beiden Fällen

$$l = 2d + \pi (a + b)$$

annehmen.

Aus φ und γ bestimmt sich nun auch die Potenz $e^{\varphi\gamma}$ und hieraus wieder das Verhältniß der Riemenspannungen. Vorzüglichste Dienste leistet hierbei folgende Tabelle der Riemenspannungen:

Verhältniß $\frac{\gamma}{2\pi} = \frac{\gamma^0}{360^0}$	Werthe von e^{γ}					
	Neue Riemen auf hölzernen Rädern $\varphi = 0,50$	Gewöhnliche Riemen		Feuchte Riemen auf eisernen Rädern $\varphi = 0,38$	Sehnüre auf Rädern von Holz	
		auf hölzernen Rädern $\varphi = 0,47$	auf eisernen Rädern $\varphi = 0,28$		rauh $\varphi = 0,50$	polirt $\varphi = 0,33$
0,2	1,87	1,80	1,42	1,61	1,87	1,51
0,3	2,57	2,43	1,69	2,05	2,57	1,86
0,4	3,51	3,26	2,02	2,60	3,51	2,29
0,5	4,81	4,38	2,41	3,30	4,81	2,82
0,6	6,59	5,88	2,87	4,19	6,59	3,47
0,7	9,00	7,90	3,43	5,32	9,00	4,27
0,8	12,34	10,62	4,09	6,75	12,34	5,25
0,9	16,90	14,27	4,87	8,57	16,90	6,46
1,0	23,14	19,16	5,81	10,89	23,14	7,95

Beispiel. Wenn ein Riemen auf eisernen Scheiben bei 3 Meter Geschwindigkeit ein Arbeitsmoment von 4 Pferdekraft übertragen soll, und der Halbmesser des Treibrades 0,75 Meter, der der getriebenen Scheibe 0,125 Meter und der Arenabstand 2,25 Meter beträgt, wie groß sind die Riemenspannungen anzunehmen?

Man hat hier $a = 0,75$, $b = 0,125$, $d = 2,25$, daher bei offenem Riemen:

$$\cos \frac{\gamma_1}{2} = \frac{0,75 - 0,125}{2,25} = \frac{5}{18} = 0,277 \dots;$$

hiernach

$$\frac{\gamma_1}{2} = 73^\circ 52\frac{1}{2}' \quad \text{und} \quad \frac{\gamma_2}{2} = 106^\circ 7\frac{1}{2}'$$

und

$$\gamma_1 = 147^\circ 45', \quad \gamma_2 = 212^\circ 15',$$

dagegen bei gekreuztem Riemen:

$$\cos. \frac{\gamma}{2} = -\frac{75 + 12,5}{225} = -\frac{7}{18} = -0,388 \dots;$$

folglich hiernach

$$\frac{\gamma}{2} = 180^\circ - 67^\circ 7' = 112^\circ 53'$$

und

$$\gamma = 225^\circ 46'.$$

Im ersten Falle ist natürlich der kleinere Winkel $\gamma_1 = 147^\circ 45'$ anzunehmen, damit der Riemen auf keinem der beiden Radumfangs fortrutsche. Wir haben hiernach hier

$$\frac{\gamma}{2\pi} = \frac{147,75}{360} = 0,410,$$

und im zweiten Falle bei gekreuztem Riemen:

$$\frac{\gamma}{2\pi} = \frac{225,77}{360} = 0,627.$$

Nimmt man $\varphi = 0,28$ an, so erhält man durch Interpolation mittels der letzten Tabelle für den ersten Fall:

$$e^{\varphi\gamma} = 2,02 + 0,1 \cdot (2,41 - 2,02) = 2,06,$$

und für den zweiten:

$$e^{\varphi\gamma} = 2,87 + 0,27 \cdot (3,43 - 2,87) = 3,02,$$

womit die unmittelbare Rechnung auch ziemlich übereinstimmt. Nun ist noch die zu übertragende Kraft

$$K = \frac{N}{v} = \frac{4 \cdot 75}{3} = 100 \text{ Kilogramm};$$

daher folgt für den ersten Fall:

$$S_2 = \frac{100}{2,06 - 1} = \frac{100}{1,06} = 94,3 \text{ Kilogramm},$$

$$S_1 = 2,06 \cdot 94,3 = 194,3 \text{ Kilogramm und}$$

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = 144,3 \text{ Kilogramm},$$

wozu der Sicherheit wegen noch 10 Procent gesetzt werden können, so daß also $S = 158,7$ Kilogramm als Riemenspannung während des Stillstandes anzunehmen ist. Für den gekreuzten Riemen ist:

$$S_2 = \frac{100}{3,02 - 1} = \frac{100}{2,02} = 49,5 \text{ Kilogramm,}$$

$$S_1 = 3,02 \cdot 49,5 = 149,5 \text{ Kilogramm,}$$

$$S = \frac{S_1 + S_2}{2} = 99,5 \text{ Kilogramm,}$$

oder der Sicherheit wegen,

$$S = 99,5 + 10 = 109,5 \text{ Kilogramm.}$$

§. 55 **Treibriemen.** Die Riemen werden gewöhnlich aus gutem lohgaren Rindsleder, und zwar am besten aus dem sogenannten Kernleder, vom Rücken der Thiere, geschnitten. Eine Haut giebt zwei Streifen von ungefähr 4 bis 5 Millimeter Dicke, 20 Centimeter Breite und $2\frac{1}{2}$ Meter Länge. Diese Lederstreifen werden entweder unmittelbar oder nachdem man sie erst in schmalere Riemen zerschnitten hat, an den Enden zusammengenäht.

Nach neueren Versuchen*) kann man den Elasticitätsmodul des Rindsleders zu $E = 15 - 20$ Kilogramm per Quadratmillimeter und den Festigkeitsmodul zu 2,9 Kilogramm annehmen; als zulässige Spannung k des Riemens kann man nach Morin etwa 0,2 Kilogramm per Quadratmillimeter Querschnitt (etwa 275 Pfund per Quadrat Zoll) rechnen. Reuleaux macht die zulässige Spannung abhängig von der Breite b des Riemens nach der Formel

$$k = \frac{1}{200} \sqrt[4]{b^3},$$

wonach sich folgende Werthe von k für verschiedene Breiten b ergeben:

$b =$	50	100	150	200	Millimeter
$k =$	0,09	0,16	0,21	0,27	Kilogramm.

Die Riemendicke schwankt zwischen 4 und 6 Millimeter, daher kann man bei einer durchschnittlichen Dicke von 5 Millimeter für jeden Millimeter Riemenbreite eine Spannung $S_1 = b \delta k = 5 \cdot 0,2 = 1$ Kilogramm rechnen, so daß bei gegebener Spannung S_1 sich die Breite des Riemens $b = S_1$ findet.

Nun ist aber im Mittel, namentlich dann, wenn der Riemen nahe den halben Umfang des Rades bedeckt und der Reibungscoefficient $\varphi = 0,28$ angenommen wird, S_1 nahe $2K = 2 \frac{N}{v}$, daher erhält man auch

*) Nach den älteren Versuchen von Bevan (s. Dingler Bd. XVI.) ist der Elasticitätsmodul nur 10 050 Pfd. per Quadrat Zoll (7,33 Kilogramm pro Quadratmillimeter).

$$b = 2 K = 2 \frac{N}{v},$$

oder wenn man die Leistung N nicht in Meterkilogramm, sondern in Pferdekraften zu je 75 Meterkilogramm giebt,

$$b = 150 \frac{N}{v} \text{ Millimeter,}$$

wobei die Riemengeschwindigkeit v in Metern auszudrücken ist. Nach Armengaud ist die Riemengeschwindigkeit v nicht unter $0,5 (N + 1)$ Meter anzunehmen.

Es wächst hiernach die Riemenbreite direct wie das zu übertragende Arbeitsquantum und umgekehrt wie die Geschwindigkeit. Für $\frac{N}{v} = \frac{5}{4}$, z. B.

für $N = 10$ Pferdekraften und $v = 8$ Meter, oder $N = 5$ Pferdekraften und $v = 4$ Meter, fällt die Riemenbreite schon 0,2 Meter aus. Man ersieht hieraus, daß die Anwendung eines Riemenräderwerkes nur bei einer kleinen oder mäßigen Leistung und bei einer großen Geschwindigkeit möglich ist. Riemen von $\frac{1}{4}$ Meter Breite und mehr anzuwenden, ist deshalb nicht zweckmäßig, weil sich dieselben in Folge ihrer ungleichen Dicke ungleich reiben und deshalb nicht gleichmäßig auf die Radumfangen auslegen. Bei größeren Kräften ($\frac{N}{v}$) bedient man sich daher zweier Riemen, oder einer Kette, oder besser eines Zahnäderwerkes.

Ueber einander genähte Riemen wendet man wegen ihrer Steifigkeit und ihres starken Abführens nicht gern an. Nach Armengaud besitzen die Riemen, welche nur an den Rändern verdoppelt, in der Mitte aber einfach sind, bei einer $1\frac{1}{2}$ fachen Tragfähigkeit noch eine genügende Elasticität.

Der Dauerhaftigkeit und nöthigen Schmiegbarkeit wegen hat man übrigens die Riemen durch eine Talgschmiere stets fettig zu halten.

Die Riemen von Guttapercha haben ziemlich dieselben Eigenschaften wie die Lederriemen; es ist nicht allein die Dichtigkeit der Guttapercha nahe gleich der des Rindleders (specif. Gewicht = 0,84), sondern es ist auch nach den allerdings sehr im Kleinen angestellten Versuchen von Herrn Feistmantel der Festigkeitsmodul ziemlich derselbe und nur der Elasticitätsmodul ungefähr 30 Procent kleiner als beim Leder. Man kann daher bei gleicher Dicke die Guttapercha-Riemen von derselben Breite verwenden wie die Lederriemen. Riemen aus Guttapercha haben sich nur wenig in der Praxis eingeführt, weil sie dem großen Uebelstande ausgesetzt sind, bei geringer Erwärmung, wie sie z. B. bei allfälligem Rutschen sich einstellt, sich zu reiben und dadurch an Spannung zu verlieren. Dagegen haben sich Riemen aus vulcanisirtem Gummi sehr gut bewährt, insbesondere in solchen Fällen, wo sie in

feuchten Räumen (Brennereien u.) oder im Freien (Maschinen für die Baustellen oder Landwirtschaft) laufen. Hierbei sind nämlich die Lederriemen einem fortwährenden Verlängern auf Kosten ihrer Breite ausgesetzt, und ein wiederholtes Anspannen macht sich nöthig. Gummiriemen verhalten sich gegen Feuchtigkeit jedoch indifferent. Diese Riemen bestehen nicht aus Gummi allein, sondern aus mehr oder weniger Bändern fester Hanfleinwand, welche in der eigentlichen Gummimasse eingeschlossen und durch dieselbe mit einander zu einem Ganzen vereinigt sind. Auch hat man in der neueren Zeit statt der lederen Treibriemen Flachs- oder Hanfbänder oder Riemen aus sogenanntem vegetabilischen Leder sowie solche aus Haaren gewebte in Anwendung gebracht.

Beispiel. Für das im letzten Beispiel (§. 54) behandelte Riemenräderwerk wurde die Maximalspannung des gekreuzten Riemens

$$S = \frac{e^{\gamma\gamma} K}{e^{\gamma\gamma} - 1} = 149,5 = \text{rot. 150 Kilogramm}$$

gefunden; es ist daher die Breite des hierzu nöthigen Riemens

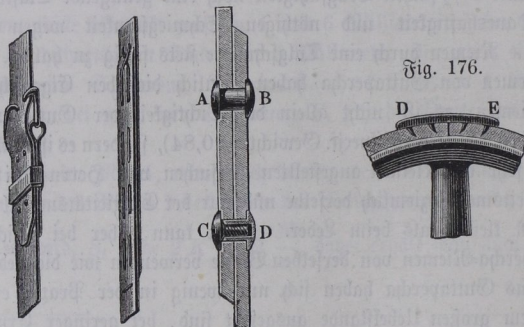
$$b = S_1 = 150 \text{ Millimeter.}$$

Die Länge desselben aber hat man nach der Formel:

$$l = 2d \sin \frac{\gamma}{2} + (2\pi - \gamma)(a + b)$$

$$\begin{aligned} l &= 2 \cdot 2,25 \sin 112^\circ 53' + (0,75 + 0,125) \text{ arc. } 225^\circ 46' \\ &= 4,146 + 3,448 = 7,594 \text{ Meter.} \end{aligned}$$

- §. 56. **Spannrollen.** Da sich die Riemen, namentlich wenn sie neu sind, fortwährendrecken (dehnen), so muß man deren Spannung von Zeit zu Zeit
Fig. 175. Fig. 177. Fig. 178.



nachhelfen. Sind nun die Riemenenden zusammengeschnallt, wie Fig. 175 vor Augen führt, oder durch einfache Schließplättchen *DE* mit Spitzen wie

Fig. 176 vereinigt, so hat diese Correction gar keine Schwierigkeit; hat man es aber mit einem zusammengefügten, Fig. 177, oder zusammengeleimten Treibriemen zu thun, so ist das Trennen und Wiedervereinigen der Riemenenden umständlich, weswegen man auch in solchem Falle an wenigstens einer Stelle eine leicht lösbare Verbindung etwa durch Riemschrauben nach Fig. 178 anbringt. In manchen Fällen kann es auch vortheilhaft sein, durch eine besondere Vorkehrung die Anspannung des Riemens zu bewirken, und beruht dieses Mittel entweder auf der Anwendung sogenannter Spannrollen oder in der Verückung der einen Ase, indem durch den vergrößerten Arenabstand eine größere Spannung des Riemens eintritt. Letzteres Mittel findet jedoch nur in den seltensten Fällen Anwendung, so z. B. bei den Aufzügen oder Fahrstühlen in Mahlmühlen, weil im Allgemeinen die Wellen fest gelagert sein müssen. Defter hat man jedoch Veranlassung zur Anwendung von Spannrollen und besonders in Fällen, wo man gleichzeitig in der Spannrolle ein Mittel zum bequemen Ein- und Ausrüken haben will.

Zwei solcher Spannrollen sind in Fig. 179 und Fig. 180 abgebildet.

Fig. 179.

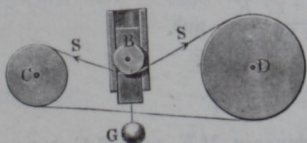
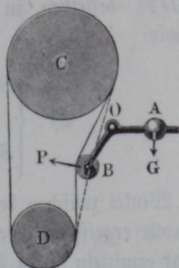


Fig. 180.



Bei der Einrichtung in Fig. 179 sitzt die Rolle B auf einem Schieber, den ein Gewicht G niederzieht, bei der Einrichtung Fig. 180 hingegen ist dieselbe an einem Winkelhebel AOB angebracht und wird mittels eines am Arme OA hängenden Gewichtes gegen den Riemen gedrückt. Ist im letzteren Falle a der Hebelarm OA des Gewichtes G und b der Hebelarm OB der Spannkraft P, so hat man:

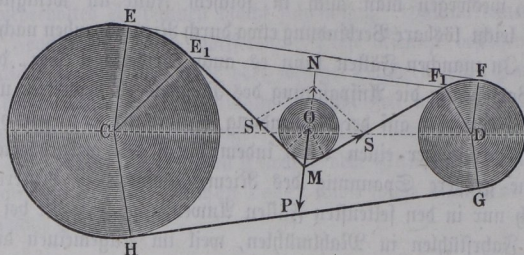
$$P = \frac{a}{b} G \text{ und umgekehrt: } G = \frac{b}{a} P.$$

Die Spannkraft P halbirte den Winkel $E_1 M F_1 = \delta$, Fig. 181 (a. f. S.), zwischen beiden Riemenrichtungen $M E_1$ und $M F_1$, und ist S die Spannung des Riemens, so hat man, wie bei einer losen Rolle (s. Bd. I, §. 167):

$$1) \quad P = 2 S \cos \frac{\delta}{2}.$$

Was die Spannung S anlangt, so hat man zu unterscheiden, ob die Spannrolle gegen den straffen oder gegen den schlaffen Riementheil drückt;

Fig. 181.



im ersten Falle ist S_1 und im zweiten S_2 in der obigen Formel einzuführen. Uebrigens wird aber auch durch die Spannrolle der mit Riemen bedeckte Bogen FG noch um einen Bogen FF_1 größer; setzen wir, wie oben, den Winkel $ECH = FDG = \gamma$, sowie den Zuwachs $ECE_1 = FDF_1$ desselben in Folge der Wirkung der Spannrolle $= \gamma'$, so haben wir:

$$2) \quad \begin{cases} S_1 = \frac{e^{\varphi(\gamma + \gamma')} K}{e^{\varphi(\gamma + \gamma')} - 1} \quad \text{und} \\ S_2 = \frac{K}{e^{\varphi(\gamma + \gamma')} - 1}. \end{cases}$$

Der Winkel zwischen den beiden Richtungen ME_1 und MF_1 des von der Spannrolle ergriffenen Seilstücks, d. i. $E_1MF_1 = SMS = \delta$, läßt sich wie folgt ermitteln. In Folge der Spannung durch die Spannrolle MO geht das Riemenstück $EF = d \sin \frac{\gamma}{2}$ in EE_1MF_1F über oder annähernd in $\frac{EF}{\sin \frac{\delta}{2}}$, nimmt also um

$$\lambda = \frac{EF}{\sin \frac{\delta}{2}} - EF = d \sin \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} - 1 \right),$$

und daher der ganze Riemen l in dem Verhältniß

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{d}{l} \sin \frac{\gamma}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} - 1 \right) = \frac{d \sin \frac{\gamma}{2} \left(1 - \sin \frac{\delta}{2} \right)}{l \sin \frac{\delta}{2}}$$

an Länge zu. Nun ist aber auch $\frac{\lambda}{l} = \frac{k}{E}$ anzunehmen, wenn k die zulässige Spannung und E den Elasticitätsmodul des Treibriemens bezeichnet, daher läßt sich setzen:

$$\frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} - 1 = \frac{lk}{dE \sin \frac{\gamma}{2}},$$

d. i.

$$3) \sin \frac{\delta}{2} = \frac{1}{1 + \frac{lk}{dE \sin \frac{\gamma}{2}}} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2} + \frac{lk}{dE}}.$$

Unter der Voraussetzung, daß die Zunahme des Riemenbogens γ beim Aufdrücken der Spannrolle gegen beide Rollen CE und DF eine und dieselbe, also $ECE_1 = FDF_1 = \gamma'$ sei, ist noch zu setzen:

$$\delta = SMS = CDF_1 + DCE_1 = \frac{\gamma}{2} - \gamma' + 180^\circ - \left(\frac{\gamma}{2} + \gamma'\right) \\ = 2(90^\circ - \gamma'), \text{ daher:}$$

$$\frac{\delta}{2} = 90^\circ - \gamma'$$

und umgekehrt:

$$4) \gamma' = 90^\circ - \frac{\delta}{2}.$$

Setzt man nun diesen Werth von γ' in obige Formeln (2) für S_1 und S_2 ein, so geben dieselben die gesuchten Riemenspannungen, woraus sich dann mittels der Formel (1) die erforderliche Größe der Spannkraft

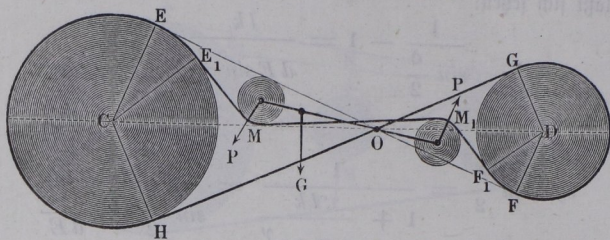
$$P = 2S \cos \frac{\delta}{2}$$

berechnen läßt, wenn man, je nachdem die Spannrolle auf das straffe oder auf das schlafe Riemenstück drückt, S_1 oder S_2 als S in die Rechnung einführt. Da die Kraft P direct proportional mit S ist, so gilt es im Allgemeinen als Regel, die Spannrolle auf das schlafe Riemenende wirken zu lassen, weil dabei der Rollendruck P der kleinere wird und in Folge dessen auch die Zapfenreibung an der Rolle geringer ausfällt.

Der gekreuzte Riemen $EFGH$, Fig. 182 (a. f. S.), hat zwei entgegengesetzt wirkende Spannrollen wie M, M_1 nöthig. Weil hier die Riemenbögen mehr als den halben Umfang einnehmen und unter sich gleich sind, so ist diese Fortpflanzungsweise die vollkommnere. Man kann hier beide Spannrollen auf einem Hebel $MO M_1$ befestigen und durch ein Gewicht G

an den Riemen andrücken lassen, doch werden bei gekreuzten Riemen nur selten Spannrollen angewandt.

Fig. 182.



Beispiel. Wenn bei einem Räderwerk mit offenem Treibriemen, wie Fig. 180, die Umtriebskraft $K = 130$ Kilogramm, der Halbmesser des einen Rades $b = 0,75$ und der des anderen $a = 0,125$, sowie der Augenabstand $d = 2,25$ Meter mißt, so ist, wie im Beispiel zu §. 54, der Riemenbogen des kleineren Rades:

$$\gamma = 147^{\circ} 45' \quad \text{und} \quad \sin \frac{\gamma}{2} = 0,961,$$

auch hat man noch die ganze Riemenlänge:

$$l = 2d \sin \frac{\gamma}{2} + \gamma a + (2\pi - \gamma)b$$

$$= 4,5 \cdot 0,961 + 2,578 \cdot 0,125 + 3,706 \cdot 0,75 = 7,424 \text{ Meter,}$$

daher das Verhältniß

$$\frac{l}{d} = \frac{7,424}{2,25} = 3,30.$$

Nimmt man noch $\frac{\lambda}{l} = \frac{k}{E} = \frac{1}{80}$ an, so erhält man

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2} + \frac{l}{d} \frac{k}{E}} = \frac{0,961}{0,961 + 0,0412} = 0,959,$$

wonach $\frac{\delta}{2} = 73^{\circ} 33'$, also der gesuchte Winkel, unter welchem die Spannrolle vom Treibriemen umgeben wird,

$$\delta = 147^{\circ} 6',$$

und der Winkel, um welchen durch den Druck der Spannrolle der Riemenbogen auf jeder Trommel vergrößert wird,

$$\gamma' = 90^{\circ} - \frac{\delta}{2} = 16^{\circ} 27'.$$

Da nun hiernach

$$\gamma + \gamma' = 147^{\circ} 45' + 16^{\circ} 27' = 164^{\circ} 12',$$

so wie

$$\varphi (\gamma + \gamma') = 0,28 \frac{164,2}{180} \pi = 0,801$$

und

$$e\varphi (\gamma + \gamma') = 2,7183^{0,801} = 2,222$$

ausfällt, so ist die Spannung des schlaffen Riemenstücks, auf welches hier die Spannrolle wirkt:

$$S_2 = \frac{K}{e(\gamma + \gamma') - 1} = \frac{130}{2,222 - 1} = 106,4 \text{ Kilogramm,}$$

und endlich die erforderliche Kraft der Spannrolle:

$$P = 2 S_2 \cos \frac{\delta}{2} = 212,8 \cdot 0,283 = 60 \text{ Kilogramm.}$$

Uebrigens ist die Anwendung der Spannrolle nicht immer von mechanischem Vortheil, da in der Reibung und in dem Steifigkeitswiderstande des Riemens beim Umliegen um die Spannrolle dem Räderwerke neue Nebenhindernisse zu wachsen. Obgleich durch diesen Apparat das übermäßige Anspannen des Treibriemens und also auch die daraus entspringende Vergrößerung der Radagerreibungen vermieden wird, so sind dafür auch die Widerstände der Spannrolle zu überwinden.

Riemenführung. Wenn ein Riemen *A*, Fig. 183, einer glatten §. 57. cylindrischen Scheibe *BC* in einer zur Axe derselben normalen Richtung zugeführt wird, also in einer Richtung, welche in die Mittelebene der Scheibe hineinfällt, so verbleibt er bei der Drehung der Scheibe auf der Oberfläche derselben, ohne daß besondere Mittel zu seiner Leitung oder Führung nothwendig wären. Gelangt indeß ein Riemen, Fig. 184, zu der Scheibe in

Fig. 183.

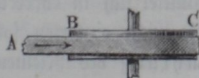


Fig. 184.

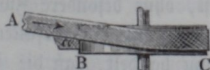
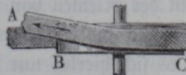


Fig. 185.

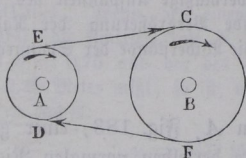


einer Richtung, welche gegen deren Mittelebene unter einem gewissen Winkel α geneigt ist, so verbleibt der Riemen nicht auf der Scheibe, sondern fällt von derselben seitlich herab, indem ihm durch die Neigung α das Bestreben ertheilt wird, auf dem Umfange der Scheibe einen schraubensförmigen Weg von jenem Neigungswinkel α zu verfolgen. Hierbei ist schon ein sehr geringer Winkel α genügend, um ein Abfallen des Riemens herbeizuführen, und daher bei der Aufstellung von Riemscheiben auf eine genaue Zuführung des Riemens in der Ebene der Scheiben besonders zu achten.

Bei der Abführung des Riemens von der Riemscheibe kann man dagegen den Winkel, welchen das ablaufende Riemenende *A*, Fig. 185, mit der Mittelebene *BC* der Scheibe bildet, erfahrungsmäßig beträchtlich größer (bis 25° und darüber) annehmen, ohne ein Abfallen des Riemens befürchten zu müssen. Der Grund dieser Erscheinung ist darin zu suchen, daß zu einem

Abziehen des Riemens durch einen auf das ablaufende Ende ausgeübten seitlichen Zug der letztere so beträchtlich sein muß, daß die bedeutende zwischen Riemen und Scheibe auftretende Reibung überwunden wird, während dem auflaufenden Riemenende nur die geeignete Richtung ertheilt zu werden braucht, um es in der erwähnten Weise zu einem schraubenförmigen Ablaufen von der Scheibe zu veranlassen. Man kann sich von diesem Verhalten sehr leicht bei jedem Riemen überzeugen, welcher die Bewegung zwischen zwei Scheiben vermittelt. Uebt man nämlich auf diesen Riemen während der Bewegung einen seitlichen Druck aus, so wird der Riemen hierbei durch die geringste Kraft heruntergeschoben, sobald letztere in der Nähe einer der beiden Auflaufstellen der Scheiben bei *C* oder *D*, Fig. 186, auf den Riemen ein-

Fig. 186.



wirkt, während es auch bei großer Anstrengung kaum gelingen wird, den Riemen durch Einwirkung auf ihn an den Ablaufstellen *E* oder *F* von den Scheiben herunterzuschieben. Es ergibt sich hieraus ohne Weiteres, daß in solchen Fällen, wo behufs des Ein- und Ausrückens der Bewegung der Betriebsriemen abwechselnd auf eine feste und lose Scheibe

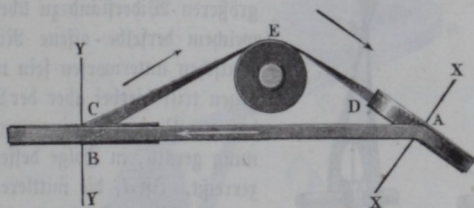
geschoben werden muß (s. später), der diese Verschiebung bewirkende Hebel den Riemen in der Nähe eines Auflaufpunktes *C* oder *D* ergreifen muß.

Aus dem vorstehend erläuterten Verhalten des Riemens ergibt sich nun auch sogleich, welchen Anforderungen eine Riemenführung genügen muß, wenn der Riemen von selbst, ohne besondere Zwangsmittel sich in correcter Weise auf die Scheiben legen, und ein Abfallen also nicht eintreten soll. Da es sich hierbei nur darum handelt, daß die Zuführung des Riemens auf irgend eine Scheibe genau in der Ebene derselben (Mittlebene) geschehe, so ergibt sich für jeden Riemenbetrieb als Grundbedingung eine solche Anordnung, bei welcher die Mittlebene jeder Scheibe den Ablaufpunkt des Riemens von der vorhergehenden Scheibe in sich enthalten muß. Diese Bedingung gilt ganz allgemein für die Vereinigung von nur zwei sowohl wie von beliebig vielen Scheiben oder Rollen. Auch ist diese Bedingung des richtigen Auflaufens des Riemens auf jede Scheibe die einzige zu erfüllende, vorausgesetzt nur, daß das Ablaufen des Riemens nicht gar zu schief, also unter Abweichungen von den Ebenen der Scheiben geschehe, welche nicht größer als etwa 25° bis 30° sind.

Wenn die obige Bedingung erfüllt ist, daß jede Scheibe in ihrer erweiterten Mittlebene den Ablaufpunkt der vorhergehenden Scheibe enthält, so ist die Riemenführung eine richtige für die zu Grunde gelegte Bewegung des Riemens, es ist damit aber noch keineswegs gesagt, daß sie auch für die

entgegengesetzte Umdrehungsrichtung der Scheiben genüge. Da vielmehr bei dieser letzteren Bewegung jeder vorherige Anlaufspunkt zu einem Ablaufspunkte wird, so ist klar, daß auch für diese entgegengesetzte Bewegungsrichtung die obige Grundbedingung erfüllt sein muß. Wenn z. B. drei Riemscheiben in der Fig. 187 dargestellten Weise durch einen Riemen ver-

Fig. 187.



bunden sind, so ist die Riemenführung richtig für die durch die Pfeile angedeutete Bewegung, denn es liegt der Ablaufspunkt A in der Ebene der Scheibe B, der Ablaufspunkt C in der Ebene der Scheibe E und endlich deren Ablaufspunkt E in der Ebene der Scheibe AD. Für die entgegengesetzte Bewegungsrichtung ist diese Anordnung aber nicht geeignet, denn dafür müßte z. B. der jetzt zur Ablaufsstelle gewordene Punkt B der Scheibe BC in der Ebene AD liegen, was nicht der Fall ist, wie auch der Punkt E nicht in der Ebene der Scheibe BC liegt. Es geht hieraus hervor, daß, wenn eine Riemenführung richtig ist für eine Bewegungsrichtung, daraus noch nicht die richtige Anordnung für die entgegengesetzte Richtung sich folgern läßt, doch wird auf Grund der oben angegebenen Regel für das Auslaufen des Riemens in jedem Falle sich leicht ergeben, ob eine Anordnung nur für eine oder beide Richtungen eine richtige Riemenführung gewährt.

Der einfachste Fall der Riemenführung liegt vor, wenn zwei parallele Axen direct durch einen Riemen verbunden werden können, und man erhält dabei bekanntlich den offenen, Fig. 188 (a. f. S.), oder den gekreuzten Riemen, Fig. 189, je nachdem die Drehungsrichtungen beider Wellen übereinstimmen oder entgegengesetzt sind. Um der Bedingung für ein richtiges Auslaufen der Riemen zu genügen, müssen hier die beiden Mittelebenen wegen des Parallelismus der Axen zusammenfallen, und es folgt ohne Weiteres, daß alsdann die Riemenführung sowohl für die eine wie für die entgegengesetzte Umdrehungsrichtung eine passende ist.

Man muß hierbei bemerken, daß die Anordnung des gekreuzten Riemens eine derartige Verdrehung desselben erfordert, daß jedes Riemenstück eine Wendung um 180° macht, wodurch gleichzeitig ein Vorübergehen der beiden Riemenstücke an einander an der Kreuzungsstelle ermöglicht wird. Daß bei der Kreuzung des Riemens die unspannten Bögen größer werden, daher

schon eine geringere Anspannung des Riemens zur Erzeugung einer bestimmten Reibung genügt, wurde bereits oben angeführt. In Fällen, wo die Um-

Fig. 188.

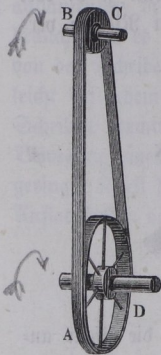
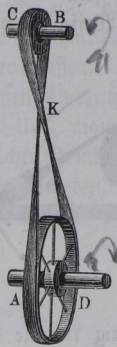


Fig. 189.



drehungsrichtung einer getriebenen Welle gleichgültig ist, bedient man sich daher in der Praxis zuweilen des Kunstgriffs, durch Kreuzung des Riemens einen größeren Widerstand zu überwinden, bei welchem derselbe offene Riemen einem Rutschen unterworfen sein würde. Dagegen tritt hierbei aber der Nachtheil ein, daß der Riemen in eine ungleiche Spannung geräth, in Folge dessen er leichter zerreißt. Ist l_1 die mittlere Länge eines geraden Riemenstückes von Berührungspunkt zu Berührungspunkt gemessen, und b die Riemenbreite, so hat man die

entsprechende Länge an den schraubenförmig gewundenen Rändern desselben:

$$l_2 = \sqrt{l_1^2 + \left(\frac{\pi b}{2}\right)^2}, \text{ annähernd } = l_1 \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\pi b}{l_1}\right)^2\right],$$

daher die Dehnung an jedem Rande:

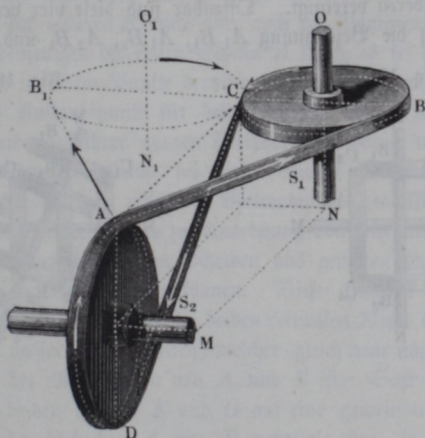
$$\lambda = l_2 - l_1 = \frac{1}{8} \frac{(\pi b)^2}{l_1} = 1,234 \frac{b^2}{l_1},$$

woraus man leicht beurtheilen kann, welche Spannung, d. h. welchen Verlust an Festigkeit der Riemen durch diese Wendung erfährt.

Wenn die beiden Axen nicht parallel sind, und daher die Ebenen der Scheiben nicht zusammenfallen können, so läßt sich doch die Bedingung des geraden Auflaufens durch eine geeignete Stellung der Scheiben erreichen. Zu diesem Zwecke hat man die beiden Räder, Fig. 190, so gegen einander zu stellen, und den Treibriemen so aufzulegen, daß die gerade Verbindungslinie AC der beiden Ablaufspunkte in den Durchschnitt der beiden Radebenen hineinfällt, indem alsdann offenbar der Ablaufspunkt eines jeden Rades in der Ebene des anderen Rades liegt. Diese Linie AC ist übrigens, wie leicht zu erkennen, dem kürzesten Abstände MN beider Axen gleich und parallel. Das Auflaufen des Riemens geschieht hier in den Punkten B und D tangential, während das Abflauen schräg gegen die Radebenen in A und C erfolgt. Durch dieses schräge Abflauen entsteht zwar ein Seitendruck und demselben entsprechend eine Seitenreibung zwischen dem Riemen und Rade, sowie auch in den Lagern der Axen, das Bewegungsverhältniß wird aber dadurch nicht geändert. Diese Reibungen möglichst klein zu machen und ein Abfallen des Riemens überhaupt zu verhindern,

gilt für die Größe der Abweichung des ablaufenden Riemens das oben Gesagte. Nach Redtenbacher soll man den Rollenabstand AC mindestens

Fig. 190.



gleich dem doppelten Durchmesser der größeren Scheibe wählen, wobei der Ablenkungswinkel γ durch $\tan \gamma = \frac{1}{2}$ zu $\gamma = 26^\circ 40'$ sich bestimmt. Ueber die Anstrengung des Riemens siehe den Aufsatz von Völker, Zeitschrift deutsch. Ing. 1860, S. 115.

Wegen des schrägen Ablaufens ist nach dem Vorherigen die Bewegungsübertragung nur für den einen Drehungssinn möglich, wie er in der Figur durch die eingezeichneten Pfeile angedeutet ist, indem bei der entgegengesetzten Drehung die vorherigen Auflaufspunkte B und D zu Ablaufspunkten werden, welche nun nicht in den Ebenen der anderen Scheiben liegen. Es unterliegt aber keiner Schwierigkeit, die Anordnung doch so zu treffen, daß die Bewegungsübertragung auch für die entgegengesetzte Bewegungsrichtung der einen Scheibe möglich ist; man erreicht dies ohne Weiteres, wie aus der Figur ersichtlich, durch Verschiebung der Scheibe AD auf ihrer Axe um den Durchmesser der Scheibe B , welche neue Stellung in der Figur durch die punktirte Lage B_1 angedeutet ist. In beiden Fällen dreht sich die Scheibe A in derselben Richtung um, und es ist ohne Weiteres klar, daß man auch bei entgegengesetzter Bewegung dieser Scheibe A die Riemenführung für jede Drehung von B anordnen kann, wenn man eine Verschiebung von B auf der eignen Axe entsprechend dem Durchmesser von A vornimmt. Dies zu erkennen, seien MM' und NN' , Fig. 191 (a. f. S.), die Projectionen der Axen auf eine Ebene senkrecht zu ihrem kürzesten Abstände, so sind die

vier möglichen Stellungen der Riemscheiben ersichtlich, welche den oben-gedachten vier verschiedenen Bewegungszuständen entsprechen, die man erhält, wenn man jede Drehungsrichtung der einen Scheibe mit jeder Drehungsrichtung der anderen vereinigt. Offenbar sind diese vier verschiedenen Aufstellungen durch die Bezeichnung $A_1 B_1$, $A_1 B_2$, $A_2 B_1$ und $A_2 B_2$ gegeben,

Fig. 191.

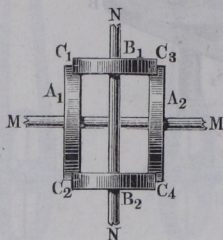
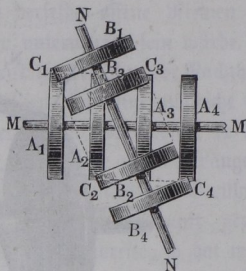


Fig. 192.

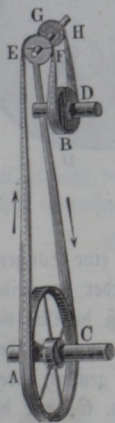


welchen Lagen entsprechend die Ablaufspunkte sich beziehentlich in C_1 , C_2 , C_3 und C_4 projectiren. Wenn die Axen, wie hierbei zu Grunde gelegt, einander rechtwinkelig schneiden, so ist bei einer Umkehrung der Drehung einer Scheibe auch nur die Verschiebung der anderen Scheibe auf ihrer Axe erforderlich. Sind indessen die Axen nicht unter rechten Winkeln gegen einander geneigt, so müssen nach Fig. 192 beide Scheiben auf ihren Axen entsprechend verschoben werden, sobald auch nur der einen von ihnen die entgegengesetzte Drehung ertheilt werden soll. Es bezeichnen hier $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ und $A_4 B_4$ in unzweideutiger Weise die Stellungen der Riemscheiben zu einander, welche den vier mehrerwähnten Bewegungszuständen entsprechen.

Vorstehende Betrachtung ergibt übrigens, daß für zwei sich im Raume kreuzende Axen der Riemenbetrieb ganz allgemein für jede Drehungsrichtung ebenso möglich ist, wie bei parallelen Axen, bei welchen man den verschiedenen Drehungsrichtungen durch den offenen und gekrenzten Riemen Rechnung trägt. Zum Unterschiede von dem gekrenzten oder geschränkten Riemen bei zwei parallelen Axen, bei welchem die Verwindung jedes Riemens 180° beträgt, nennt man den Riemen bei zwei windschiefen, zu einander rechtwinkelligen Axen, bei welchen jedes Riemenstück um 90° in sich verwunden ist, den halbverschränkten Riemen und kann unter Umständen auch von einer Viertelschränkung, Sechstelschränkung u. s. w. sprechen, wenn der Winkel der Axen gegen einander den Betrag $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$ u. s. w. hat.

Leitrollen. Wenn der vorstehend entwickelten Bedingung für die §. 58. Riemenleitung nicht genügt werden kann, so muß man seine Zuflucht zu Leitrollen nehmen. Dies ist z. B. immer der Fall, wenn die beiden Ären sich schneiden, denn dann kann man wohl den Ablaufspunkt der einen Scheibe *A* in die Ebene der anderen *B*, nicht aber auch den Ablaufspunkt der anderen Scheibe *B* in denjenigen der ersten Scheibe *A* legen, es sei denn, daß man die Scheiben sich in einem Punkte berühren ließe, welcher als Ablaufspunkt sowohl wie als Auflaufspunkt für beide Scheiben dienen müßte, d. h. es müßte jede Scheibe auf ihrer ganzen Peripherie umspannt werden. Wenn eine solche Anordnung vielleicht bei einer dünnen Schnur möglich sein möchte, so gestattet sie doch nicht die Verwendung eines Riemens von bestimmter Breite. Ebenso ist man zur Anordnung von Leitrollen bei parallelen Wellen genöthigt, wenn die beiden Scheiben aus gewissen Gründen nicht in derselben Ebene angebracht werden können. Dieser Fall ist durch Fig. 193

Fig. 193.



dargestellt, wobei die beiden Leitrollen *E* und *G* einen Durchmesser *EF* erhalten, welcher gleich dem normalen Abstände der Mittelebenen von *A* und *B* ist. Setzt man hierbei die beiden Rollen *E* und *G* auf eine gemeinsame, den Ebenen der Scheiben *A* und *B* parallele Äre, so gestattet dieser Riemen nur die eine Drehungsrichtung, und zwar muß bei der durch die Pfeile angedeuteten Umdrehung die Rolle *EF* in der Berührungsebene liegen, welche *AC* im Ablaufspunkte *A* berührt, während die Rolle *GH* in der die Scheibe *BD* im Ablaufspunkte *D* berührenden Tangentialebene gelegen sein muß. Bei der entgegengesetzten Drehung sind die Rollen *EF* und *GH* derartig auf ihrer Äre zu verschieben, daß *GH* in der durch *C* gelegten Berührungsebene an *AC* und *EF* in der durch den Ablaufspunkt *B* an *BD* gelegten Berührungsebene liegt. Meist wird eine derartige Riemenführung nur einer Drehungsrichtung zu genügen haben, soll indessen die Möglichkeit beider

Richtungen erreicht werden, so hat man die beiden Leitrollen auf besondere Ären zu setzen, derartig, daß die Scheibe *EF* die beiden Punkte *A* und *B*, die Scheibe *GH* die Punkte *C* und *D* aufnimmt. Die Ären der Leitrollen *E* und *G* fallen hierbei nur in dem Falle in dieselbe Gerade zusammen, wenn *AC* und *BD* gleiche Größe haben.

Wenn man in diesem Falle *BD* als Leitrolle und *EF* und *GH* als Betriebscheiben behandelt, welche ihren resp. Ären die Bewegung mittheilen sollen, so gestattet diese Anordnung, von einer Betriebscheibe *AC* auf einer Transmissionswelle aus durch einen Riemen zweien anderen Wellen, etwa denen zweier Arbeitsmaschinen (Webstühle 2c.), selbstständig Bewegung im

entgegengesetzten Sinne zu ertheilen. Solche Anordnungen, die man häufig in Spinnereien u. findet, bieten in mancher Beziehung, namentlich was die Ausnützung des oft beschränkten Raums anbetrifft, manche Vortheile; hinsichtlich des Riemenverbrauchs und der durch die Riemenstriche erzeugten Reibung dürften sich aber eher Nachtheile als Vortheile dieser Anordnung gegenüber derjenigen eines zweimal ausgeführten einfachen Riemenbetriebs ergeben.

Bei zwei windschiefen Axen, bei denen man die Scheiben nicht so legen kann, daß die Durchschnittslinie ihrer Ebenen beide Scheiben berührt (s. §. 57), hat man ebenfalls zwei Leitrollen anzuordnen. Hierzu denke man sich in der Durchschnittslinie OZ , Fig. 194, der beiden Radebenen zwei beliebige

Fig. 194.

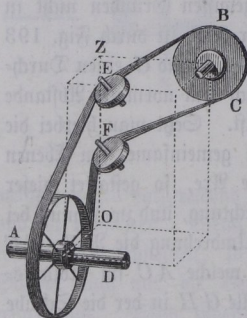
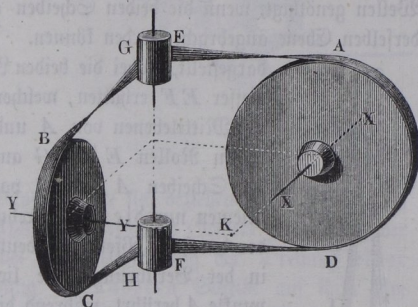


Fig. 195.



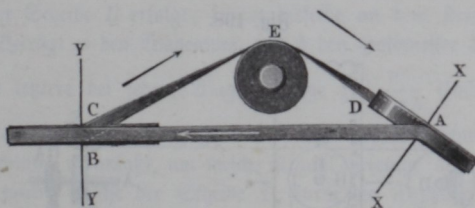
Punkte E und F gewählt, und lege von ihnen an jedes Rad eine Tangente EA und EB , sowie FD und FC . Ordnet man nun in jeder der beiden Ebenen AEB und DFC eine Leitrolle E und F so an, daß dieselbe von diesen Tangenten berührt wird, so ist hierdurch eine Riemenleitung gefunden, welche, wie leicht zu ersehen ist, für beide Drehungsrichtungen genügt, indem jede Leitrolle in ihrer Ebene sowohl den Ablaufspunkt A resp. C , wie den Auslaufspunkt B resp. D in sich zu liegen hat, daher diese Punkte ihre Functionen vertauschen können, d. h. der Betrieb kann in den entgegengesetzten Richtungen stattfinden. Die beiden Leitrollen E und F sind hierbei auf besonderen Axen anzubringen.

Für zwei sich schneidende Axen, X und Y , Fig. 195, kann man diese Anordnung in dem Falle, daß der Betrieb nur nach einer Richtung stattfindet, dadurch vereinfachen, daß man die beiden Leitrollen auf eine und dieselbe Axe setzt. Hierzu denke man sich durch die Ablaufspunkte A und C der beiden Riemscheiben Ebenen senkrecht zu der Durchschnittslinie ihrer beiden Mittelebenen gelegt, und ordne in diesen beiden parallelen Ebenen die gleichgroßen Rollen E und F so an, daß die Gerade AE eine

Tangente an E und CH eine Tangente an F ist. Die gemeinschaftliche Axe EF fällt dann parallel zur Durchschnittslinie der beiden Radebenen aus. Wegen des schrägen Riemenabzugs von den Leitrollen bei G und F gestattet diese Anordnung nur die Drehung im Sinne der Pfeile; soll die entgegengesetzte Drehungsrichtung ermöglicht sein, so hat man die Normal-ebenen zur Durchschnittslinie durch B und D zu legen und in ihnen die Rolle E tangirend an BG und F tangirend an DF anzuordnen, d. h. die Rollen E und F sind auf ihrer Axe entsprechend zu verschieben.

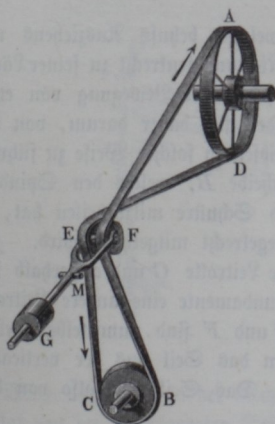
Bei diesem letzteren Riemenbetrieb findet ein schräger Ablauf des Riemens nur von den Leitrollen statt, während Ablauf wie Auflauf an den Riemenscheiben A und B also bei A, B, C und D in den Radebenen geschieht. Wenn man auch bei diesen Betriebscheiben ein schräges Ablaufen zulassen

Fig. 196.



will, so läßt sich diese Anordnung für zwei sich schneidende Axen noch weiter dahin vereinfachen, daß nur eine Leitrolle E , Fig. 196, erforderlich ist.

Fig. 197.



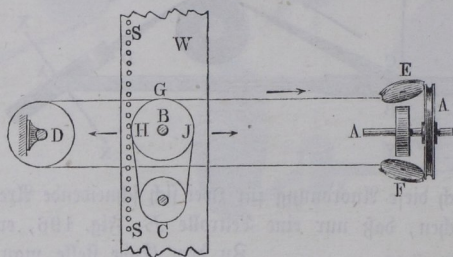
Zu dem Ende stelle man B in solche Lage, daß ihre Mittelebene durch den Ablauf von A hindurchgeht und ordne die Leitrolle E derartig an, daß ihre Ebene den Ablaufpunkt C der Scheibe B aufnimmt, und daß sie selbst von der Mittelebene AD berührt wird, wodurch also der oben angegebenen Grundbedingung Genüge gethan ist, daß jede Scheibe den Ablaufpunkt der vorhergehenden Scheibe enthält.

Zuweilen werden Leitrollen auch nur angewendet, um wegen Mangel oder zur Ersparniß an Raum den Riemen zur Seite zu ziehen. Auch kann man öfter die Leitrolle gleichzeitig als Spannsrolle benutzen, wie z. B. in Fig. 197, wo der Riemen über zwei Rollen E und F läuft, welche an dem gabelförmigen Ende eines um M drehbaren

Hebels sitzen, der mittels des Gewichtes *G* die Rollen behufs Anspannung des Riemens empordrückt*).

Hier ist auch noch die Anwendung der Leitrollen für diejenigen Fälle anzuführen, in denen die zu betreibende Scheibe nicht fest aufgestellt sein kann, sondern auf einem beweglichen wagenförmigen Gestelle angebracht ist, an dessen traversirender Bewegung sie Theil nehmen muß. Dieser Fall findet insbesondere bei der Bewegung der Spindeln bei Jenny- und Mulemaschinen sowie zum Betriebe von Lauftrahnen durch Dampfkraft statt. Es geschieht hierbei der Betrieb nicht durch Riemen, sondern meistens durch baumwollene Schnüre, welche mit einer oft außerordentlich großen Geschwindigkeit, bei Lauftrahnen bis zu 25 Meter per Secunde, laufen. In Fig. 198 ist die Anordnung der Seilführung bei einer Mulemaschine dargestellt. Hier ist *W* ein langer, mehrere Hundert in einer Reihe auf-

Fig. 198.



gestellter Spindeln enthaltender Wagen, welcher behufs Ausziehens und nachherigen Aufwindens der Fäden in der Richtung senkrecht zu seiner Länge in regelmäßiger Wiederkehr eine hin- und hergehende Bewegung von etwa 2 Meter Länge vollführen muß. Es handelt sich daher darum, von der festgelagerten Triebsscheibe *A* aus das Treibseil in solcher Weise zu führen, daß der auf dem Wagen befindlichen Scheibe *B*, welche den Spindeln ihre Bewegung durch geeignete Räder und Schnüre mitzutheilen hat, in jeder Stellung des Wagens die Drehung regelrecht mitgetheilt wird. Zu dem Ende ist zunächst auf dem Wagen eine Leitrolle *C* und außerhalb der äußersten Wagenstellung auf dem festen Fundamente eine andere Leitrolle *D* aufgestellt. Zwei andere Leitrollen *E* und *F* sind unmittelbar neben der verticalen Triebsscheibe *A* angebracht, um das Seil aus der verticalen Richtung in die horizontale überzuführen. Das Seil geht also von der

*) Interessante Riemenführungen mit Leitrollen siehe in Reuleaux's Constructeur.

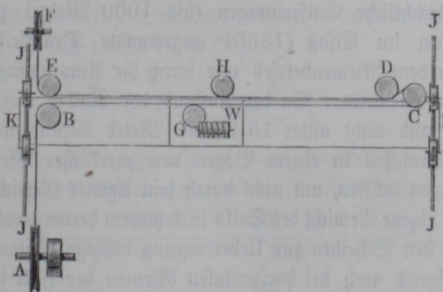
Treibscheibe *A* über *E* nach der Scheibe *B* im Wagen, welche mit zwei Seilnuthen versehen ist, umschlingt diese Scheibe auf dem Bogen *GH* in einer Nuth, geht dann über *C* und zum zweiten Male über die Scheibe *B*, welche auf dem Bogen *JG* in der zweiten Nuth umschlungen wird, und gelangt endlich über die feste Leitrolle *D* nach *F* und *A* zurück. Die zweimalige Umföhrung des Seils um die doppelspurige Scheibe *B* wird hier nur gewöhlt, um den umspannten Bogen von genügender Größe zu erhalten. Es ist klar, daß bei dieser Anordnung, unter der Voraussetzung, daß die Richtung der Geraden zwischen *D* und *E* mit der Richtung der Wagenbewegung zusammenfällt, die Länge des umschlingenden Seils in allen Wagenstellungen dieselbe ist, daher auch für alle Stellungen der Betrieb von *A* auf *B* und damit auf die Spindeln erfolgen muß. Hierbei ist nur zu bemerken, daß durch die Bewegung des Wagens selbst ebenfalls eine gewisse Drehung der Scheibe *B* erfolgt, indem dieselbe an dem straffen Seile sich abwälzt. Beträgt *w* den Wagenweg und *b* den Halbmesser der Scheibe *B*,

so wird die letztere bei jedem Wagenauszuge zu $\frac{w}{2\pi b}$ Umdrehungen nach

der einen und bei jedem Einzuge um ebenso viel Umdrehungen nach der anderen Richtung veranlaßt, um welche Anzahl diejenige also vermehrt oder vermindert wird, welche der Scheibe *B* durch die Drehung derjenigen *A* mitgetheilt wird.

Die Anordnung des Seiltriebs für einen Lauftrahn zeigt Fig. 199. Hier ist *KK* die auf den Schienen *JJ* fahrbare Brücke, auf welcher selbst wiederum

Fig. 199.



der Windewagen *W* in der Richtung *KK* transportabel ist. Der Betrieb erfolgt von der festgelagerten Seilscheibe *A* aus, von welcher das Seil über die horizontalen Scheiben *B*, *C*, *D* und *E* hinweggeführt wird, welche sämtlich auf der Brücke *KK* aufgestellt sind, um nach Passirung der Scheibe *F*,

welche mit einer Spannvorrichtung für die Schnur versehen ist, nach *A* zurückzuföhren. Man ersieht, daß bei dieser Seilföhührung die Rolle *E*, welche die Längenverschiebung der Brücke zu bewirken hat, in jeder Stellung des Wagens ihre Bewegung von *A* empfängt. Da ferner die beiden auf dem Windewagen angebrachten Seilrollen *G* und *H* nach Belieben mit den Seilen *BC* und *DE* durch Druckrollen in Beröhührung gebracht werden können, so folgt hieraus, daß auch in jeder Stellung des Wagens *W* auf der Brücke eine Mittheilung der Bewegung von *A* aus auf *G* und *H* veranlaßt werden kann, daß man also vermittelst der Scheibe *G* die Windevorrichtung zum Heben der Last betreiben und mittels *H* den Windewagen längs der Brücke versetzen kann. Hinsichtlich der durch die Verschiebung der Rollen an den Seilen hervorgebrachten Umdrehung der ersteren gilt hier dasselbe wie bei dem vorigen Beispiele, und es ergibt sich, daß, unter *b* und *h* die Halbmesser der Scheiben *B* und *H* verstanden, durch eine Verschiebung der Brücke um w_1 und durch eine gleichzeitige Verschiebung des Windewagens auf der Brücke um w_2 nach der einen oder anderen Richtung der Scheibe *B* eine zusätzliche Drehung im Betrage $\pm \frac{w_1}{2\pi b}$, und derjenigen *H* eine solche von der Größe $\pm \frac{w_1}{2\pi h} \pm \frac{w_2}{2\pi h}$ mitgetheilt wird.

Man läßt das Seil für derartige Laufbahn meist mit der großen Geschwindigkeit von 25 Meter per Secunde laufen, um auch bei geringem übertragenen Drucke eine erhebliche Leistung zu erlangen*).

§. 59. **Drahtseiltrieb**).** Der in neuerer Zeit zur Uebertragung größerer Kräfte auf beträchtliche Entfernungen (bis 1000 Meter) zuerst von den Gebrüdern Hirn im Elsaß (1850) angewandte Drahtseilbetrieb unterscheidet sich von dem Riemenbetrieb nur durch die Anwendung eines Drahtseils anstatt des Riemens. Da der Abstand der Rollen hierbei immer ein bedeutender ist und nicht unter 15 bis 20 Meter anzunehmen sein dürfte, so wird das Drahtseil in einem Bogen von merklicher Pfeilhöhe zwischen den Rollen hängen müssen, um nicht durch sein eigenes Gewicht zu zerreißen. Die durch das eigene Gewicht des Seils in letzterem hervorgerufene Spannung erzeugt die auf den Scheiben zur Uebertragung nöthige Reibung, was streng genommen übrigens auch bei horizontalen Riemen der Fall ist, bei welchen letzteren indessen wegen des geringen Rollenabstandes die Durchhängung nicht so augenfällig ist, wie bei den langen Drahtseilen.

*) S. den Aufsatz von Lenz. Zeitsch. deutsch. Ing. 1868, S. 289.

**) Ueber Drahtseiltrieb siehe Reuleaux, Der Constructeur.

Zur Uebertragung der Kraft verwendet man Drahtseile, welche aus einzelnen sechs- oder mehrdrähtigen Litzen, Fig. 200, um eine Hanfseile ge-

Fig. 200.

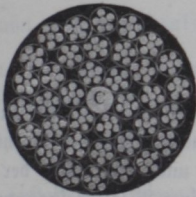


Fig. 201.



spunnen sind. Die Stärke der einzelnen Drähte variirt etwa zwischen 0,5 und 2 Millimeter, und wird die Stärke und Uebertragungsfähigkeit der Drahtseile wesentlich durch die Anzahl der in ihnen enthaltenen Drähte bestimmt. Wegen der Steifigkeit stärkerer Drähte wird es gerathen sein, bei größeren Kräften die Anzahl ν der Drähte zu vergrößern, deren Stärke δ aber möglichst gering zu halten.

Der Drahtseiltrieb findet nur zwischen parallelen Axen und in der Regel zwischen Scheiben von gleicher Größe statt. Die Drahtseile selbst legen sich auf den Grund der, nach Fig. 201, mit Guttapercha oder mit Kork ausgefüllten Seilrinne und übertragen lediglich durch Reibung die Bewegung in derselben Art wie die Riemen von Scheibe zu Scheibe. Es gelten daher die für den Riemenbetrieb gefundenen Gesetze ohne Weiteres für Drahtseile und man hat speciell wieder (s. §. 53)

$$S_1 = \frac{e^{\varphi\gamma} K}{e^{\varphi\gamma} - 1}; \quad S_2 = \frac{K}{e^{\varphi\gamma} - 1}; \quad S = \frac{S_1 + S_2}{2}.$$

Nimmt man den Reibungscoefficienten zwischen Seil und Rolle zu $\varphi = 0,24$ und bei gleich großen Rollen $\gamma = \pi$ an, so erhält man

$$S_1 = \frac{e^{0,753} K}{e^{0,753} - 1} = \frac{2,11 K}{1,11} = 1,90 K,$$

$$S_2 = \frac{K}{e^{0,753} - 1} = \frac{K}{1,11} = 0,90 K,$$

$$S = \frac{0,90 + 1,90}{2} K = 1,40 K.$$

Zur Abrundung sollen die eine etwas größere Sicherheit bietenden Werthe

$S_1 = 2K$, $S_2 = K$ und $S = 1,5K$ angenommen werden.

Kennt man nun die am Umfange einer Rolle vom Halbmesser R wirkende Kraft K , welche das Seil zu übertragen hat, so ergibt sich der wirksame Querschnitt des Drahtseils, d. h. bei ν Drähten vom Durchmesser δ die Größe

$$\frac{\pi \delta^2 \nu}{4} = \frac{S_1}{k_1} = \frac{2K}{k_1},$$

unter k_1 die zulässige Spannung der Drähte verstanden. Um diese zulässige Spannung k_1 richtig zu wählen, hat man zu beachten, daß die Drähte hier zwei verschiedenen Anstrengungen ausgesetzt sind, und zwar außer der durch S_1 herbeigeführten Dehnungsspannung k_1 noch einer Biegungsspannung k_2 , welche in Folge der Umbiegung der Drähte um die Rolle vom Halbmesser R entsteht. Diese Biegungsspannung k_2 läßt sich mit Hilfe des Elasticitätsmoduls E und der Ausdehnung λ des Drahtes bei der Biegung leicht ermitteln. Nimmt man an, daß die mittlere Faserschicht eines Drahtes bei der Biegung um die Scheibe vom Halbmesser R ihre Länge unverändert beibehält, die inneren Schichten sich also verkürzen, die äußeren verlängern, so beträgt die Länge einer äußersten Schicht im Abstände $R + \frac{\delta}{2}$ für den halben Rollenumfang $\pi \left(R + \frac{\delta}{2} \right)$, während ihre ursprüngliche Länge gleich der der unveränderten Schicht πR ist. Man hat somit die spezifische Verlängerung zu

$$\frac{\pi \left(R + \frac{\delta}{2} \right) - \pi R}{\pi R} = \frac{\delta}{2R},$$

und es folgt daher die einem solchen Verlängerungsverhältniß entsprechende Spannung k_2 pro Quadratmillimeter (s. Thl. I, §. 210) aus

$$\frac{k_2}{E} = \frac{\delta}{2R} \quad \text{zu} \quad k_2 = \frac{E\delta}{2R}.$$

Nimmt man daher den Elasticitätsmodul des Eisens zu 20 000 Kilogramm an, so erhält man die Biegungsspannung

$$k_2 = \frac{10\,000\,\delta}{R}.$$

Bezeichnet nunmehr k die gesammte, in den Drähten überhaupt zulässige Anspannung pro Quadratmillimeter, welche man bei dem guten Materiale, wie es in dünnen Drähten nur vorhanden sein kann, zu $k = 18$ Kilogramm annehmen darf, so hat man

$$k = k_1 + k_2 = 18,$$

also

$$k_1 = 18 - k_2 = 18 - \frac{10\,000\,\delta}{R}$$

in obiger Formel für den Drahtseilquerschnitt einzuführen.

Nimmt man nach Neuleaux als passendes Verhältniß für $\frac{k_1}{k_2}$ den Werth $\frac{1}{2}$ an, bei welchem unter sonst gleichen Umständen der Rollenhalbmesser R ein Minimum wird, so hat man daher $k_1 = 6$ und

$$\frac{\pi \delta^2 v}{4} = \frac{2 K}{6} \quad \text{oder} \quad v \delta^2 = 0,425 K.$$

Ist anstatt der Umfangskraft K die Leistung N in Pferdekraften und die Seilgeschwindigkeit v in Metern gegeben, so hat man auch

$$v \delta^2 = 0,425 K = 0,425 \frac{75 N}{v} = 32 \frac{N}{v}.$$

Diese Formeln, welche sich für $k_1 = \frac{1}{2} k_2 = 6$ Kilogramm ergeben, setzen natürlich eine Biegungsspannung in den Drähten von nicht mehr als $k_2 = 12$ Kilogramm voraus, und es muß, damit diese Biegungsspannung nicht größer werde, nach Vorstehendem der Halbmesser R der Rollen mindestens den Werth

$$R = \frac{10\,000\,\delta}{k_2} = \frac{10\,000\,\delta}{12} = 833\,\delta$$

haben. Wäre der Halbmesser R von anderer Größe, so hätte man

$$k_2 = \frac{10\,000\,\delta}{R}$$

zu bestimmen, und dann für k_1 den Werth $18 - k_2$ in die Rechnung für $v \delta^2$ einzuführen.

Von besonderer Wichtigkeit für den Seilbetrieb ist noch die Kenntniß der Durchsenkungen der Seile, da von denselben bekanntlich die Spannungen abhängig sind, und man daher den Seilen genau die zu den oben berechneten Dehnungsspannungen zugehörigen Senkungen geben muß, um sicher zu sein, daß weder ein Gleiten des Seils wegen zu geringer Spannung noch ein Ueberspannen desselben eintrete. Bezeichnet d den Abstand der beiden in gleicher Höhe gelegenen Axen C und D , Fig. 202 (a. f. S.), und h die Höhe EK eines annähernd als Parabel anzusehenden Seilbogens KB , so hat man für die Neigung $EAT = \alpha$ der Seilenden A und B gegen den Horizont:

$$\sin \alpha = \frac{ET}{AT} = \frac{2h}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (2h)^2}} = \frac{4h}{\sqrt{d^2 + (4h)^2}}$$

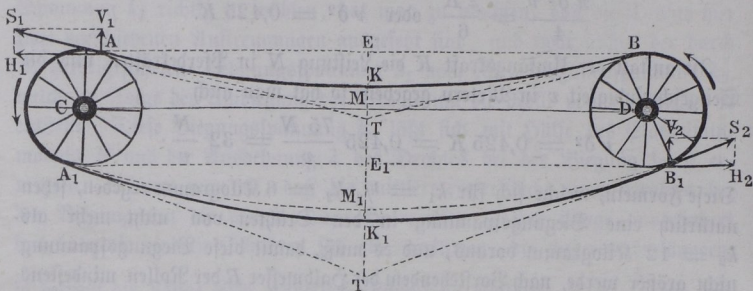
und daher auch, unter V die Verticalcomponente der Seilspannung S verstanden:

$$S = \frac{V}{\sin \alpha} = \frac{V \sqrt{d^2 + (4h)^2}}{4h} = \frac{G}{8h} \sqrt{d^2 + (4h)^2},$$

wenn $G = 2V$ das Gewicht des Seiltrunks AKB bedeutet. Annähernd hat man

$$S = \frac{G}{8h} d,$$

Fig. 202.



daher die Durchsenkung des Seils in der Mitte

$$h = \frac{Gd}{8S}.$$

Diese Gleichung ergibt die Durchsenkung des treibenden, des getriebenen oder des ruhenden Seils, je nachdem man für S die Spannungen

$$S_1 = 2K, \quad S_2 = K, \quad S_0 = 1,5K$$

einführt, und man erhält demnach

$$h_1 = \frac{Gd}{16K}; \quad h_2 = \frac{Gd}{8K} \quad \text{und} \quad h_0 = \frac{Gd}{12K}.$$

Das Gewicht des Drahtseils pro laufenden Meter berechnet sich bei einem spezifischen Gewichte des Eisens im Draht von 7,7, und wenn man eine Verfürzung der Drähte beim Zusammendrehen um 10 Proc. annimmt, zu:

$$q = \frac{10}{9} \frac{\pi \delta^2 v \cdot 7,7}{4 \cdot 1000} = 0,00672 v \delta^2,$$

und daher hat man unter der hier gemachten Voraussetzung ($k_1 = 6$ Kilogramm), wonach $v \delta^2 = 0,425 K$ sich ergab, auch

$$G = 2q \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + (2h)^2} = 0,00286 K \sqrt{d^2 + (4h)^2},$$

oder annähernd:

$$G = 0,00286 K d.$$

Dies eingesetzt giebt:

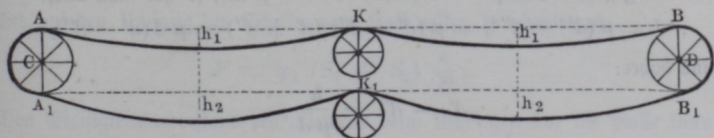
$$h_1 = \frac{0,00286}{16} d^2 = 0,000179 d^2; \quad h_2 = 0,000358 d^2;$$

$$h_0 = 0,000238 d^2.$$

Demnach wären z. B. für einen Axenabstand von 100 Metern die Einseifungen $h_1 = 1,79$ Meter, $h_2 = 3,58$ Meter und $h_0 = 2,38$ Meter.

Um keine zu großen Durchseifungen zu erhalten, kann man nach Fig. 203 in Abständen von 60 bis 120 Metern besondere Tragrollen KK_1 anwenden,

Fig. 203.



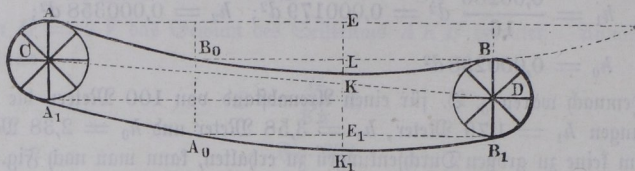
doch empfiehlt es sich mehr, anstatt der beiden Tragrollen eine doppelspurige Rolle aufzustellen, welche durch ein Seil von A aus getrieben wird, und durch ein anderes Seil in ihrer zweiten Spur die Bewegung nach der Rolle B beziehungsweise erst nach einer ferneren Zwischenstation weiter fortpflanzt. Diese Anordnung eines zusammengesetzten Seiltriebs mit Zwischenstationen gewährt den Vortheil, mehrere kürzere Seile anstatt eines langen verwenden und daher ein bequemeres Auflegen sowie eine schnellere Reparatur im Falle eines Seilbruchs bewirken zu können.

In Fällen, wo die disponibele Höhe unter den Seilen sehr beschränkt ist, kann man außerdem die Durchseifung noch dadurch vermindern, daß man ein Seil mit verschärfter Anspannung anwendet, d. h. daß man das Seil stärker anspannt, als zur Verhütung des Gleitens allein nöthig wäre. Hierdurch wird das Seil natürlich nicht nur stärker, sondern auch die Zapfenreibungen fallen größer aus, doch fallen diese Umstände nur wenig in Betracht, da die Seilstärken doch meist nur geringe sind, und da auch die Reibungswiderstände meist nur verhältnißmäßig klein ausfallen. (Ueber die verschärfte Seilspannung s. Reuleaux.)

Wenn die Axen der Scheiben C und D nicht in einer und derselben Horizontalebene liegen, so erhält man den schiefen Seiltrieb, Fig. 204 (a. f. S.). Hierbei besteht der Seilbogen AKB aus zwei ungleichen Theilen AK und KB , deren Pfeilhöhen KE mit h' und KL mit h'' und deren Horizontalprojektionen AE mit d' und BL mit d'' bezeichnet werden mögen. Der gegebene Höhenabstand EL der beiden Seiltrommeln ist $h = h' - h''$ und ihr

Horizontalabstand $d = d' + d''$. Da nun nach dem Obigen $h' = \mu d'^2$ und $h'' = \mu d''^2$ gesetzt werden kann, wobei μ ein von der Seilspannung

Fig. 204.



abhängiger Coefficient ist (z. B. für das führende Seil $\mu = 4 \cdot 0,000179$, für das geführte Seil $\mu = 4 \cdot 0,000358$ u. f. w.), so hat man auch:

$$h = \mu (d'^2 - d''^2) = \mu (d' - d'') (d' + d'') = \mu d (d' - d''),$$

und daher:

$$d' - d'' = \frac{h}{\mu d},$$

wonach die Horizontalabstände

$$d' = \frac{h + \mu d^2}{2\mu d}, \quad d'' = \frac{\mu d^2 - h}{2\mu d},$$

sowie die Bogenhöhen

$$h' = \mu \left(\frac{h + \mu d^2}{2\mu d} \right)^2 \quad \text{und} \quad h'' = \mu \left(\frac{\mu d^2 - h}{2\mu d} \right)^2$$

folgen.

Anmerkung. Ueber den Drahtseiltrieb siehe außer dem Constructeur von Reuleaux nach Le Vignole de Mécaniciens par Armengaud aîné, sowie verschiedene Artikel in technischen Journalen, u. A. Zeitschrift deutsch. Ingenieure 1862, S. 212, 1866, S. 480, 731 und 1870, S. 14; ferner Dingler's Polyt. Journal Bd. 172, Heft 3.

§. 60. **Widerstände beim Riemen- und Seilbetrieb.** In den vorhergehenden Untersuchungen wurde der Einfluß der schädlichen Widerstände vernachlässigt, welche sich bei dem Betrieb durch Riemen oder Seile einstellen. Da diese Widerstände aber in den meisten Fällen nicht unerheblich ausfallen, so ist noch eine Untersuchung derselben hier vorzunehmen, mit Rücksicht auf deren Ergebnisse die vorstehenden Resultate noch entsprechend zu corrigiren sind. Der hauptsächlichste Widerstand jedes Riemenbetriebs besteht in der Reibung an den Zapfen der Scheiben und ebenso macht sich die Steifigkeit der Riemen beim Umbiegen derselben um die Rollen in gewissem, wenn auch meist geringerem Grade geltend. Bei sehr schnell laufenden Riemen und Seilen muß auch der Widerstand der Luft einen gewissen Be-

trag erreichen, welcher sich jedoch einer zuverlässigen Berechnung entzieht, so daß man ihn, wenn nöthig, am besten schätzungsweise in Anschlag bringen wird.

Die Zapfenreibung ist direct von dem Drucke abhängig, mit welchem die Aze einer Scheibe durch den Zug des Riemens oder Seils in ihre Lager gepreßt wird. Dieser Druck setzt sich außer aus dem Gewichte der Scheibe und ihrer Aze aus den Anspannungen des führenden sowohl wie des geführten Riemens zusammen. Da die Richtungen dieser beiden Spannungen, besonders wenn die mit einander arbeitenden Scheiben nicht sehr verschieden im Durchmesser und ihr Abstand nicht sehr klein ist, als parallel angenommen werden können, so bestimmt sich, unter r den Zapfenhalbmesser und unter φ_1 den Coefficienten der Zapfenreibung verstanden, die Zapfenreibung zu:

$$\varphi_1 (S_1 + S_2) r,$$

und auf den Umfang der Scheibe vom Halbmesser R reducirt zu:

$$F = \varphi_1 (S_1 + S_2) \frac{r}{R}.$$

Den Steifigkeitswiderstand des Riemens beim Umbiegen um die Rolle kann man, ähnlich wie bei Seilen, direct proportional der Spannung S und dem Quadrate der Dicke δ , sowie umgekehrt proportional dem Krümmungshalbmesser R annehmen, so daß man den Coefficienten dieses Steifigkeitswiderstandes an jedem Riemenstücke setzen kann:

$$s = \sigma \frac{\delta^2}{R}.$$

Bezeichnet man noch mit $f = \varphi_1 \frac{r}{R}$ den Coefficienten des auf den Rollenumfang reducirten Zapfenreibungswiderstandes, welcher durch die Spannung S eines Riemens erzeugt wird, so hat man für die Summe beider Widerstände

$$u = f + s = \varphi_1 \frac{r}{R} + \sigma \frac{\delta^2}{R}.$$

Wenn nun wieder S_1 und S_2 die totalen Spannkraften des geführten und des führenden Riemens bedeuten, so wirken der Spannung S_1 außer der zu übertragenden Umfangskraft K und der Spannung S_2 noch die auf den Umfang reducirten Widerstände $u S_2$ und $u S_1$ entgegen, und man hat daher

$$S_1 = S_2 + K + u S_1 + u S_2$$

oder

$$S_1 (1 - u) = S_2 (1 + u) + K.$$

Wenn der normale Zustand vorausgesetzt wird, in welchem S_2 keinen unnöthig großen, sondern nur denjenigen Werth besitzt, welcher zur Uebertragung von K erforderlich ist, so kann man nach dem Vorstehenden

$$S_1 = S_2 e^{\varphi \varphi'}$$

setzen und erhält dann

$$S_2 e^{\varphi\gamma} (1 - u) = S_2 (1 + u) + K,$$

oder

$$S_2 = \frac{K}{e^{\varphi\gamma} (1 - u) - (1 + u)}$$

und

$$S_1 = \frac{e^{\varphi\gamma} K}{e^{\varphi\gamma} (1 - u) - (1 + u)}.$$

Die Summe aller Widerstände der Reibung und Steifigkeit an einer Scheibe, auf deren Umfang reducirt, beträgt alsdann:

$$W = (S_1 + S_2) u = S_2 (e^{\varphi\gamma} + 1) u,$$

daher an beiden Scheiben, wenn dieselben gleich sind:

$$2 S_2 (e^{\varphi\gamma} + 1) u.$$

Das Verhältniß dieser Widerstände zu der übertragenen Kraft K , also auch das Verhältniß der entsprechenden Arbeiten bestimmt sich daher zu

$$\frac{W}{K} = \frac{2 (e^{\varphi\gamma} + 1) u}{e^{\varphi\gamma} (1 - u) - (1 + u)}.$$

Nimmt man nun den Coefficienten der Zapfenreibung $\varphi_1 = 0,08$ an, so erhält man für

$\frac{r}{R} =$	0,20	0,15	0,1	0,08	0,05
$f = 0,08 \frac{r}{R} =$	0,016	0,012	0,008	0,006	0,004

Setzt man ferner die Steifigkeit eines Riemens gleich der eines gleichstarken Seils von der Dicke $\delta = 5$ Millim., so hat man nach Eytelwein (Thl. I, §. 202) für jedes Aufwickeln oder Abwickeln des Riemens

$$s = 0,0186 \frac{\delta^2}{2R} = 0,009 \frac{\delta^2}{R},$$

wenn δ und R in Millimetern genommen werden. Diese Formel ergibt für

$R =$	100	200	300	500	800	1000
$s =$	0,0023	0,0012	0,0008	0,0004	0,0003	0,0002

Hieraus folgt z. B. für $R = 300$ Millimeter und $r = 0,1 R = 30$ Millimeter:

$$u = f + s = 0,0088 = \text{rot. } 0,009.$$

Nimmt man noch den Reibungscoefficienten des Riemens auf eisernen Scheiben $\varphi = 0,28$ und den unspannten Bogen gleich dem Halbmesser, also $e^{\varphi} = 2,41$ an (s. §. 54), so erhält man für diesen mittleren Werth von $u = 0,009$:

$$\frac{W}{K} = \frac{2(e^{\varphi} + 1)u}{e^{\varphi}(1 - u) - (1 + u)} = \frac{0,0614}{1,379} = 0,045.$$

Es wird daher zur Ueberwindung der Widerstände des Riemenbetriebs in diesem Falle eine Arbeit von 4,5 Proc. der übertragenen Leistung erfordert.

Aus den vorstehenden Ermittlungen erkennt man auch leicht den Einfluß, welchen die Geschwindigkeit des Riemens oder der betriebenen Welle auf die Widerstände ausübt. Nimmt man nämlich in einem bestimmten Falle, wo eine Leistung von N Meterkilogramm per Secunde übertragen werden soll, für den Riemen eine Geschwindigkeit v an, so erhält man $K = \frac{N}{v}$, und da der Widerstand W am Umfange der Scheibe proportional mit K wächst, so hat man

$$W = \alpha K = \alpha \frac{N}{v},$$

wenn der Werth

$$\frac{2(e^{\varphi} + 1)u}{e^{\varphi}(1 - u) - (1 + u)}$$

mit α bezeichnet wird. Die mechanische Arbeit, welche dieser Widerstand per Secunde verzehrt, ist

$$Wv = \alpha \frac{N}{v} v = \alpha N,$$

und man erkennt hieraus, daß der Arbeitsverlust durch Widerstände unabhängig von der Geschwindigkeit v sein würde, wenn α einen davon unabhängigen Werth hätte. Letzteres ist aber nicht der Fall, indem mit wachsender Geschwindigkeit v die Stärke der Welle wegen des kleineren Torsionsmomentes geringer zu sein braucht und daher auch das Moment der Zapfenreibung kleiner ausfällt. Aus dem Grunde rechtfertigt es sich, die Transmissionswellen, bei denen der Riemenbetrieb sehr häufig auftritt, innerhalb gewisser Grenzen thunlichst schnell laufen zu lassen (s. §. 21), um so mehr, als damit auch die Constructionsgewichte für Scheiben u. kleiner sowie die Kosten der Riemen geringer werden.

Im Allgemeinen variiert der Werth von u zufolge der in den letzten Tabellen für f und s zu Grunde gelegten Verhältnisse zwischen

$$u_1 = 0,016 + 0,0023 = 0,0183$$

und

$$u_2 = 0,004 + 0,0002 = 0,0042,$$

man kann daher zur Bestimmung der Widerstände unter Zugrundelegung von $e^{\mathcal{V}} = e^{0,28 \cdot \pi} = 2,41$ sich folgender kleinen Tabelle bedienen:

$u =$	0,020	0,015	0,01	0,006	0,004
$\frac{W}{K} =$	0,102	0,076	0,049	0,029	0,020

Es muß hierbei ausdrücklich bemerkt werden, daß diese Werthe nur so lange gelten, als die Spannung des Riemens keine unnöthig große ist, sondern als die Größen S_1 , S_2 und K zu einander in den durch die Formeln des §. 53 ausgedrückten Beziehungen stehen, daß also speciell

$$K = S_2 (e^{\mathcal{V}} - 1)$$

ist. Wenn letzteres nicht der Fall ist, wenn z. B. die zu betreibende Welle zeitweise einen nur geringen Widerstand K' zu überwinden hat, während die Riemen mit einer Spannung S gespannt sind, die einem viel größeren Widerstande K genügt, so sind die Spannungen S_1 und S_2 bei Ueberwindung des kleinen Widerstandes K' nicht mehr durch die Beziehung

$$S_1 = S_2 e^{\mathcal{V}},$$

sondern lediglich durch

$$S_1 - S_2 = K' \quad \text{und} \quad S_1 + S_2 = 2S$$

gegeben. Es ist klar, daß in diesem Falle die Widerstände der Reibung und Steifigkeit wegen ihrer Abhängigkeit von S im Verhältniß zu dem geringen Drucke K' einen relativ viel größeren Werth annehmen, und durch diese Widerstände daher ein viel höherer Procentsatz der wirklich übertragenen Nutzarbeit aufgezehrt werden kann, und zwar um so mehr, je kleiner die übertragene Kraft gegen die bei der vorhandenen Spannung S mögliche ist. Man erkennt daraus den großen Nachtheil zu stark gespannter Riemen und sieht, daß bei bedeutenden Schwankungen des Arbeitswiderstandes der Riemenbetrieb nicht sehr ökonomisch sein kann.

Dieselben Betrachtungen, welche hier für Riemenbetrieb angestellt wurden, gelten auch für Drahtseile, nur kann hier der Steifigkeitswiderstand ganz unbeachtet gelassen werden, da derselbe wegen der geringen Dicke der Drähte und bei dem bedeutenden Durchmesser der Rollen ganz unmerklich klein ausfällt. Auch die Zapfenreibungen fallen hier viel geringer aus, da das Verhältniß $\frac{r}{R}$ hier immer weit kleiner ist, als bei Riemenbetrieb. Nimmt man

im Durchschnitt bei Drahtseilen $\frac{r}{R} = 0,03$ an, so findet man:

$$f = 0,08 \frac{r}{R} = 0,0024$$

und es würde bei Vernachlässigung von s und für $e^{\gamma} = e^{0,24 \cdot \pi} = 2,11$ der Arbeitsverlust folgen aus

$$\frac{W}{K} = \frac{2 (2,11 + 1) 0,0024}{2,11 \cdot 0,9976 - 1,0024} = 0,014.$$

also nur 1,4 Proc. der übertragenen Kraft. Hiermit stimmt auch die Erfahrung überein, denn man hat bei Drahtseiltransmissionen den schädlichen Widerstand überall sehr klein gefunden. Es scheint, daß bei dem schnell laufenden Drahtseile ein größerer Einfluß durch den Widerstand der Luft geboten wird, wenigstens steht damit im Zusammenhange eine Angabe von Guilleaume*), wonach der Verlust proportional der Seillänge und zwar pro je 100 Fuß (31 Meter) höchstens $\frac{1}{3}$ Proc. der übertragenen Kraft beträgt. Bei der Drahtseiltransmission in Oberursel, welche 100 Pferdekraft in 8 Abtheilungen zu je 125 Metern Länge überträgt, ergab sich ein Verlust von 8 Pferden.

Die vorstehend ermittelten Beziehungen gelten nur für die treibende und für die getriebene Scheibe, nicht aber für die Leitrollen beim Riemenbetrieb und auch nicht für die Zwischenstationen bei Drahtseiltransmissionen. Bei den Leitrollen ist, wenn S_2 die Spannung des auflaufenden Seils, Fig. 205, und γ den umspannten Bogen bedeutet, die Spannung S_1 des ablaufenden Seils durch die Widerstände vergrößert zu:

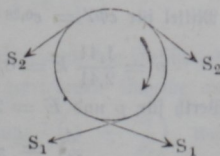
$$S_1 = S_2 \frac{1 + s + f \sin \frac{\gamma}{2}}{1 - s - f \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Bei der Zwischenstation des Drahtseilbetriebs, Fig. 206, hängt die Zapfenreibung hauptsächlich nur von dem Verticaldrucke ab, da die nahezu gleichen

Fig. 205.



Fig. 206.



Horizontalspannungen in den beiderseits abgehenden Seilen sich gegenseitig aufheben. Bezeichnet daher G das Gewicht des zwischen zwei Stationen

*) Zeitschrift deutsch. Ingenieure 1870, S. 35.

laufenden Seiles, so kann die Zapfenreibung der Zwischenstation auf den Rollenumfang reducirt zu $\varphi_1 G \frac{r}{R}$ angenommen werden.

Anmerkung. Den Arbeitsverlust, welcher durch die Steifigkeit der Lederriemen hervorgerufen wird, bestimmt Autenheimer*) aus der mechanischen Arbeit, welche zum Biegen eines prismatischen Stabes erforderlich ist, dessen Faserspannung pro Flächeneinheit k und dessen Elasticitätsmodul E ist. Die Arbeit A , welche ein solcher Stab von der Länge l zu der Biegung um einen Kreis vom Halbmesser R erfordert, drückt sich aus durch

$$A = \frac{E}{24} \left(1 + \frac{k}{E}\right)^2 \frac{l b \delta^3}{R^2},$$

unter b die Breite und δ die Dicke verstanden. Bei dem Riemen, wo nach §. 55

$$\frac{k}{E} = \frac{0,2}{15} \text{ bis } \frac{0,2}{20} = 0,013 \text{ bis } 0,01$$

ist, kann $\left(\frac{k}{E}\right)$ gegen 1 vernachlässigt werden, daher folgt der Arbeitsverlust an einer Scheibe:

$$A = \frac{E}{24} \frac{l b \delta^3}{R^2}.$$

Wenn nun der Riemen per Quadrateinheit des Querschnitts die Kraft p überträgt, so daß $K = b \delta p$ und $Kl = l b \delta p$ die auf dem Wege l übertragene Nugarbeit ist, so hat man das Verhältniß

$$\frac{A}{Kl} = \frac{A}{l b \delta p} = \frac{E}{24 p} \frac{\delta^2}{R^2}.$$

Nun hat man

$$K = S_1 \frac{e^{\varphi\gamma} - 1}{e^{\varphi\gamma}},$$

oder

$$b \delta p = b \delta k \frac{e^{\varphi\gamma} - 1}{e^{\varphi\gamma}},$$

daher

$$p = k \frac{e^{\varphi\gamma} - 1}{e^{\varphi\gamma}},$$

und im Mittel für $e^{\varphi\gamma} = e^{0,28} \cdot \pi = 2,41$:

$$p = \frac{1,41}{2,41} k = 0,58 \cdot 0,2 = 0,116 \text{ Kilogramm.}$$

Dieser Werth für p und $E = 20$ geben

$$\frac{A}{Kl} = \frac{20}{24 \cdot 0,116} \frac{25}{R^2} = \frac{180}{R^2}.$$

Nimmt man z. B. für R einen Halbmesser von 200 Millimetern an, so folgt:

$$\frac{A}{Kl} = \frac{180}{200 \cdot 200} = 0,0045;$$

*) S. Schweiz. polyt. Zeitschrift 1861, Heft 5 und daraus Ztsch. deutsch. Ing. 1861, S. 302.

d. h. die Steifigkeit des Riemens veranlaßt wegen dessen Biegung einen Arbeitsverlust gleich 0,45 Proc. der Nutzwirkung KI , wenn man voraussetzt, daß das Wiedergeradeziehen des Riemens Arbeit nicht weiter erfordert. Nimmt man den Durchmesser der zweiten Scheibe von gleicher Größe an, so erhält man für sie denselben Betrag, daher im Ganzen einen Arbeitsverlust durch Steifigkeit des Riemens von 0,9 oder rund 1 Proc. der übertragenen Nußarbeit.

Gleitungsverlust. In Folge der verschiedenen Anspannungen S_1 und S_2 §. 61. des führenden und des geführten Riemenendes tritt noch ein sogenannter Gleitungsverlust des Riemens auf den Scheiben ein, der zur Folge hat, daß der Umfang der getriebenen Scheibe (immer bis zur Mitte des Riemens gemessen, also $R + \frac{\delta}{2}$ als Halbmesser in Rechnung gesetzt) etwas langsamer sich bewegt als der Umfang der treibenden Scheibe. Diese Wirkung zu ermitteln denke man sich ein beliebiges Stück Riemen, welches im nicht ausgedehnten Zustande die Länge l habe, so wird dasselbe, wenn es als Theil des führenden Riemens auftritt, welcher mit der Kraft S_1 angespannt wird, einer specifischen Spannung $k_1 = \frac{S_1}{b\delta}$ ausgesetzt sein, während die Spannung pro Querschnittseinheit nur $k_2 = \frac{S_2}{b\delta}$ beträgt, sobald dieses Riemenstück einen Theil des geführten Riemens ausmacht. Durch diese Spannungen k_1 und k_2 wird nun aber das betrachtete Stück bekanntlich (Thl. I, §. 210) um

$$l \frac{k_1}{E} \quad \text{und bezw.} \quad l \frac{k_2}{E}$$

ausgedehnt, so daß die Längen, welche es während seines Aufenthalts im führenden und im geführten Riemenzweig hat, resp. durch

$$l \left(1 + \frac{k_1}{E} \right) \quad \text{und} \quad l \left(1 + \frac{k_2}{E} \right)$$

dargestellt sind. Diese Längen geben nun aber auch die Geschwindigkeiten in den Umfängen der treibenden und der getriebenen Scheibe an, denn es ist klar, daß jedes Riemenstück von der Länge $l \left(1 + \frac{k_1}{E} \right)$, wo l eine beliebige Größe ist, welches die treibende Scheibe an sich heranzieht, nachher, wenn es von dieser wieder abgegeben wird, wegen der geringeren Spannung k_2 sich auf die geringere Länge $l \left(1 + \frac{k_2}{E} \right)$ zusammenzieht, daher der getriebenen Scheibe auch nur eine Umfangsbewegung in diesem Betrage gestattet. Der Verlust an Bewegung, welcher hierdurch herbeigeführt wird, drückt sich im Verhältniß zur Bewegung der treibenden Scheibe offenbar aus durch:

$$\frac{l \left(1 + \frac{k_1}{E} \right) - l \left(1 + \frac{k_2}{E} \right)}{l \left(1 + \frac{k_1}{E} \right)} = \frac{1 - \frac{k_2}{k_1}}{1 + \frac{E}{k_1}}$$

Nun ist aber offenbar

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{e^{\gamma \gamma'}}$$

im Mittel

$$= \frac{1}{e^{0,28 \pi}} = \frac{1}{2,41} = 0,415,$$

und man erhält daher mit diesem Werthe und wenn $E = 20$, $k_1 = 0,2$ gesetzt wird:

$$\frac{1 - \frac{k_2}{k_1}}{1 + \frac{E}{k_1}} = \frac{1 - 0,415}{1 + 100} = 0,0058.$$

Der Gleitungsverlust beträgt daher im Durchschnitt etwa $\frac{1}{2}$ Proc.

Bei Drahtseilen ist der Gleitungsverlust wegen der geringeren Dehnung des Materials ganz unbedeutend, denn man erhält für dieselben aus

$$E = 20\,000, k_1 = 6 \quad \text{und} \quad k_2 = \frac{1}{2} k_1$$

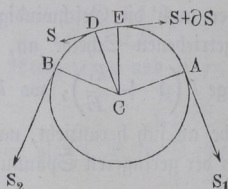
den Gleitungsverlust zu

$$\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{20\,000}{6}} = 0,00016.$$

Bei schnell laufenden Riemen und Seilen übt auch noch die Centrifugalkraft derselben einen bemerkbaren Einfluß aus, indem durch diese Centrifugalkraft der Druck, mit welchem der Riemen auf den Scheibenumfang gepreßt wird, zum Theil aufgehoben und daher die Reibung zwischen Riemen und Scheibe vermindert wird. Aus diesem Grunde wird ein Riemen, welcher eine bestimmte Umfangskraft K übertragen soll, um so stärker gespannt werden müssen, je größer die mit der

Geschwindigkeit wachsende Centrifugalkraft ist. Um diesen Einfluß kennen zu lernen, sei ACB , Fig. 207, der vom Riemen umspannte Bogen einer Riemenscheibe. Ist S die Riemen-

Fig. 207.



seil ist. Um diesen Einfluß kennen zu lernen, sei ACB , Fig. 207, der vom Riemen umspannte Bogen einer Riemenscheibe. Ist S die Riemen-

spannung in einem beliebigen Punkte D und ist die Spannung in dem um das Winkелеlement $\partial \gamma$ entfernten Punkte E durch $S + \partial S$ ausgedrückt, so ist, unter F die Friction auf dem Bogenelemente DE verstanden, für den Grenzfall des Rutschens: $\partial S = F$. Die Friction, bestimmt sich aber aus dem Normaldrucke N des Riemens, welcher als Resultirende aus den drei auf das Riemenstück DE wirkenden Kräften S , $S + \partial S$ und der Centrifugalkraft zu bestimmen ist. Die beiden Spannungen S und $S + \partial S$ haben eine Mittelfraft gleich

$$S \sin \frac{\partial \gamma}{2} + (S + \partial S) \sin \frac{\partial \gamma}{2},$$

oder wegen der Kleinheit von $\partial \gamma$ und ∂S von $S \partial \gamma$. Hierzu kommt die entgegengesetzt gerichtete Centrifugalkraft des Riemenstückes, welche durch

$$q R \partial \gamma \frac{v^2}{R g} = q \partial \gamma \frac{v^2}{g}$$

ausgedrückt ist, wenn q das Gewicht der Längeneinheit des Riemens, v dessen Geschwindigkeit und R den Halbmesser der Scheibe bis Mitte Riemen bedeutet. Die Reibung zwischen Riemen und Scheibe beträgt daher für das Bogenelement

$$\partial S = F = \varphi \left(S \partial \gamma - q \partial \gamma \frac{v^2}{g} \right),$$

und man erhält daher:

$$\varphi \partial \gamma = \frac{\partial S}{S - q \frac{v^2}{g}}.$$

Dies giebt zwischen den Grenzen γ und 0, resp. S_1 und S_2 den Ausdruck:

$$\varphi \int_0^\gamma \partial \gamma = \int_{S_2}^{S_1} \frac{\partial S}{S - q \frac{v^2}{g}},$$

d. i.

$$\varphi \gamma = \log. \text{ nat. } \frac{S_1 - q \frac{v^2}{g}}{S_2 - q \frac{v^2}{g}},$$

oder:

$$S_1 = S_2 e^{\varphi \gamma} - q \frac{v^2}{g} (e^{\varphi \gamma} - 1),$$

somit:

$$K = S_1 - S_2 = \left(S_2 - q \frac{v^2}{g} \right) (e^{\varphi \gamma} - 1),$$

sowie:

$$S_2 = \frac{K}{e^{\varphi\gamma} - 1} + q \frac{v^2}{g}$$

und

$$S_1 = \frac{e^{\varphi\gamma} K}{e^{\varphi\gamma} - 1} + q \frac{v^2}{g}.$$

Die zu übertragende Kraft K vermindert sich also wegen der Centrifugalkraft in dem Verhältnisse von $q \frac{v^2}{g}$ zu S_2 . Setzt man in der gefundenen Formel

$$S_2 = q \frac{v^2}{g}, \text{ so wird } K = 0 \text{ und } S_1 = S_2.$$

Man erhält hierdurch diejenige Grenze der Riemen Geschwindigkeit, bei welcher unter Zugrundelegung eines zulässigen Werthes von S_2 oder S_1 eine Uebertragung von Kraft überhaupt nicht mehr möglich ist. Nennt man f den Querschnitt eines Riemens resp. Seils, k die höchstens zulässige Spannung und ε die Dichte des Materials, so hat man für obige Voraussetzung $S_2 = S_1 = fk$ Kilogramm, und $q = f\varepsilon$ Milligramm, und es folgt daher die gedachte höchstens mögliche Geschwindigkeit v aus

$$fk = \frac{f\varepsilon}{1\,000\,000} \frac{v^2}{g}$$

zu

$$v = \sqrt{\frac{k g}{\varepsilon} 1\,000\,000} = 1000 \sqrt{\frac{k g}{\varepsilon}} \text{ Millimeter} = \sqrt{\frac{k g}{\varepsilon}} \text{ Meter.}$$

Für Lederriemen war $k = 0,2$ angenommen, man erhält daher, wenn die Dichte 0,9 beträgt:

$$v = \sqrt{\frac{0,2 \cdot 9810}{0,9}} = 46,8 \text{ Meter,}$$

während für Drahtseile bei $k = 6$ Kilogramm und $\varepsilon = 7,7$ die höchste Geschwindigkeit, bei welcher noch Uebertragung möglich ist, zu:

$$v = \sqrt{\frac{6 \cdot 9810}{7,7}} = 87,5 \text{ Meter}$$

folgt.

Beispiel. Wenn eine Kreissäge zu ihrem Betriebe bei 1200 Umdrehungen pro Minute 6 Pferdekraft gebraucht, wie stark muß der Riemen gespannt werden, wenn die Betriebscheibe einen Durchmesser von 0,24 Meter hat?

Es ist hier

$$v = \frac{1200}{60} \cdot 0,24 \cdot 3,14 = 15,08 \text{ Meter,}$$

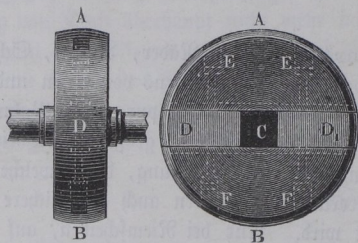
daher die Umfangskraft

$$K = \frac{6 \cdot 75}{15,08} = 29,8 \text{ Kilogramm;}$$

stellung sind die in §. 58 angegebenen Bedingungen einer richtigen Riemenführung sorgfältig zu beachten. Wirken Seitenkräfte auf den Riemen, welche dessen Abfallen bewirken könnten, wie z. B. das Gewicht des Riemens bei stehenden Wellen (Mahlmühlen mit Riemenbetrieb), oder liegt die Riemenaxe nicht genau in der Umdrehungsebene, wie dies der Fall bei gekreuzten Riemen ist, so muß man das Rad mit einem vorstehenden Rande oder Kranze versehen, um das Ablaufen des Riemens zu verhüten.

Nur kleine hölzerne Riemscheiben bis zu etwa $\frac{1}{4}$ Meter Durchmesser lassen sich aus einem einzigen Bohlenstücke drehen, größere muß man aus mehreren Holzstücken zusammensetzen. Eine Scheibe der letzteren Art führt Fig. 209 in zwei Ansichten vor Augen. Es sind hier die Mittel-

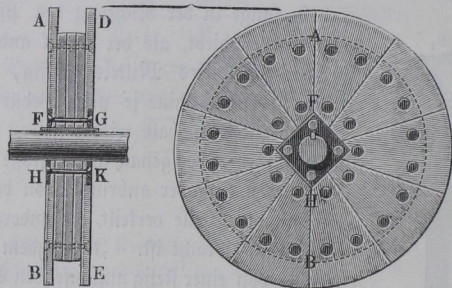
Fig. 209.



stücke *D* und *D*₁, welche das zur Aufnahme der Axe dienende Auge *C* zwischen sich lassen, zwischen den beiden Seitenstücken *A* und *B* eingefalzt oder eingezapft, und zur Befestigung von eisernen, außen durch Holzstücke bedeckte Bolzen *EF*, *EF* durchzogen. Eine

andere Zusammensetzung der hölzernen Riemenräder aus drei mit den Fasern sich kreuzenden Bohlenlagen zeigt Fig. 210. Diese Räder sind noch von zwei Scheiben *AB* und *DE*

Fig. 210.



begrenzt, welche aus Holzsectoren zusammengesetzt und nicht nur durch hölzerne Nägel mit dem Radkörper, sondern auch durch eiserne Bolzen, wie *FG*, *HK* u. s. w., unter einander verbunden werden. Da diese Scheiben den inneren Radkörper an Höhe übertreffen, so bilden sie besondere Spurränge,

welche das Abschlagen des Riemens verhindern. Räder von größeren Durchmesser setzen man aus Armen und Kränzen zusammen; auch läßt man wohl nur den Kranz aus Holzringen bestehen und macht die Nabe und Arme aus Gußeisen.

Lange Trommeln, auf welche nach Befinden mehrere Riemen zu liegen kommen, setzt man wie ein Faß aus Dauben zusammen und versteht solche auch gern mit eisernen Armsystemen. Eine solche Trommel führt Fig. 211 vor Augen. Die Dauben *A, B* werden hier mittels schwacher Schrauben *a, b, c* auf die Umfangsreifen der Armkreuze *EF, E₁F₁ . . .* befestigt.

Fig. 211.

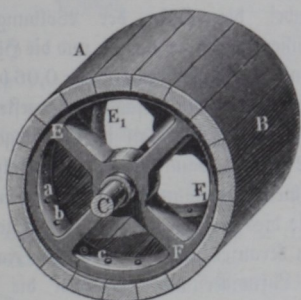
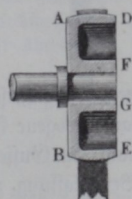
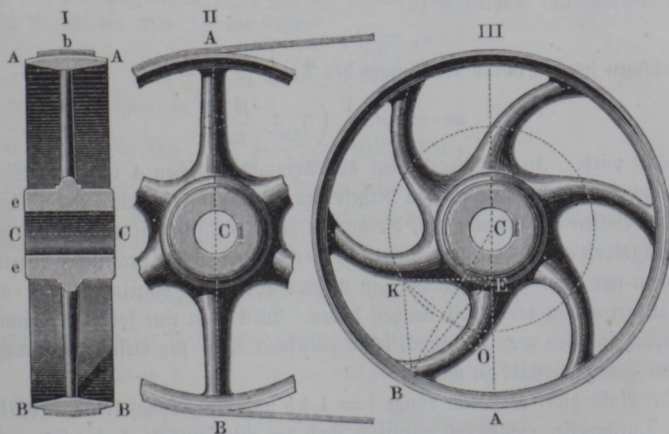


Fig. 212.



Wegen ihrer Unwandelbarkeit sind gußeiserne Riemenräder den hölzernen stets vorzuziehen, obgleich sie wegen ihrer größeren Glätte eine stärkere Riemenspannung erfordern und deshalb mehr Reibung geben als diese.

Fig. 213.



Kleine Räder bis $\frac{1}{4}$ Meter Durchmesser haben die Gestalt eines Tellers AB , Fig. 212 (a. v. S.), mit einer darauf sitzenden Nabe FG und einem vorspringenden Kranze DE . Den Längendurchschnitt eines gewöhnlichen gußeisernen Riemenrades führt Fig. 213 I, sowie die Quersicht von einem Theil desselben, Fig. 213 II und III (a. v. S.) vor Augen. Die Breite $AA = BB$ des Radkranzes AB ist gewöhnlich $= b_1 = 1,25 b$, wenn b die Riemenbreite bezeichnet; die äußere Dicke desselben erhält die Größe

Fig. 214.

$$_1 = 0,03 b + 0,005 r,$$

dagegen dessen Dicke in der Mitte:

$$e_2 = 0,12 b + 0,05 r,$$

wobei die Höhe der Wölbung der Außenfläche $h = 0,03 b$, und die Höhe der conischen Innenfläche $h_1 = 0,06 b$ mißt, wie in Fig. 214 besonders dargestellt ist.

Den Armen der gußeisernen Riemscheiben giebt man in der Regel eine krumme einfach gebogene Form, Fig. 213 III, damit sie sich bei erfolgreicher Abkühlung nach dem Gusse leicht zusammenziehen können, ohne zu bedeutender Spannung Veranlassung zu geben, wie dies bei geraden Armen wegen der langsameren Abkühlung des massigeren Kranzes und der Nabe der Fall ist. Zur möglichsten Verminderung des Luftwiderstandes erhalten die Arme einen elliptischen Querschnitt mit den Axen a und b , so zwar, daß die große Axe a in der Mittelebene der Scheibe liegt. Die Höhe a_1 der Arme an der Nabe kann nach Menleaux passend zu

$$a_1 = 0,4 b + \frac{R}{40}$$

und diejenige am Radkranze zu

$$a_2 = \frac{2}{3} a_1$$

genommen werden, wenn die Anzahl der Arme zu

$$m = \text{rot.} \frac{1}{2} \left(5 + \frac{R}{b} \right)$$

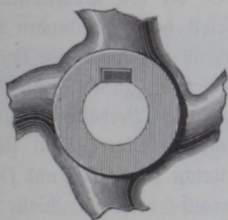
gewählt wird. In der Regel liegt die Armzahl zwischen 4 und 8. Eine Berechnung der Arme nach den Regeln der relativen Festigkeit, wobei man sie als Balken anzusehen hätte, die an der Nabe festgehalten und durch die Umfangskraft auf Abbrechen beansprucht werden, hat wenig praktischen Werth, da man gar keine Gewißheit hat, in welcher Weise die einzelnen Arme an der Uebertragung der Kraft Antheil haben. Will man eine solche Rechnung anstellen, so wird man gut thun, jeden einzelnen Arm für diese Inanspruchnahme genügend stark zu machen.

Der Nabe giebt man eine Länge $l = 1,4 b$ und eine Wandstärke $e = 0,3 b$. Der Durchmesser richtet sich natürlich nach der Wellenstärke d , die sich nach

§. 15 zu

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$$

Fig. 215.



bestimmt. Verstärkte Nabenränder der Wellen pflegt man bei den Riemen-scheiben in der Regel nicht anzuwenden, und genügt es für die mittleren Größen und Kräfte, für die Befestigungskeile die Welle einfach mit flachgefeilten Keil-sitzen, Keilflächen, Fig. 215, anstatt mit Keilnuthen zu versehen.

Beispiel. Eine gußeiserne Riemen-scheibe von 1 Meter Durchmesser soll bei 60 Um-drehungen pro Minute eine Arbeit von 3 Pferdekraft übertragen, welche Ab-messungen sind derselben zu geben?

Man hat die Riemen-geschwindigkeit $v = 3,14$ Meter, also die zu übertragende Kraft

$$K = \frac{3 \cdot 75}{3,14} = 71,6 \text{ Kilogramm.}$$

Unter gewöhnlichen Verhältnissen, $\varphi = 0,28$, $\gamma = \pi$, kann man daher (§. 55) die Riemenbreite

$$b = 2K = 144 \text{ Millimeter}$$

annehmen.

Hieraus folgt eine Breite des Radfranzes

$$b_1 = 1,25 b = 180 \text{ Millimeter, eine Kranzdide}$$

am Rande: $e_1 = 0,03 \cdot 144 + 0,005 \cdot 500 = 6,8 = \text{rot. } 7 \text{ Millimeter, und}$

in der Mitte: $e_2 = 0,12 \cdot 144 + 2,5 = 19,8 = \text{rot. } 20 \text{ Millimeter,}$

sowie eine Wölbung des Kranzes von 4,3 Millimeter.

Die Anzahl der Arme beträgt passend

$$m = \frac{1}{2} \left(5 + \frac{500}{144} \right) = 5$$

und dabei die Höhen der Arme

$$\text{in der Mitte: } a_1 = 0,4 \cdot 144 + \frac{500}{40} = 70 \text{ Millimeter,}$$

$$\text{am Kranze: } a_2 = \frac{2}{3} \cdot 70 = 46 \text{ Millimeter.}$$

Die Dicken der Arme kann man etwa 35 und 24 Millimeter annehmen.

Da die Wellenstärke in diesem Falle zu

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{3}{60}} = 56,7 = \text{rot. } 60 \text{ Millimeter}$$

sich ergibt, so hat die Nabe einen äußeren Durchmesser

$$D = 60 + 2 \cdot 0,3 \cdot 144 = 146,4 = \text{rot. } 150 \text{ Millimeter}$$

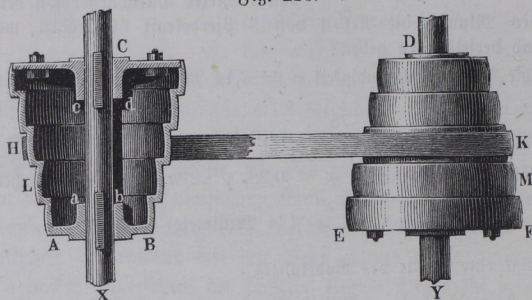
und eine Länge

$$l = 1,4 \cdot 144 = \text{rot. } 200 \text{ Millimeter}$$

zu erhalten.

§. 63. **Stufenscheiben.** In vielen Fällen der Praxis ist man genöthigt, den Betrieb der Welle einer Arbeitsmaschine je nach Bedürfniß bald schneller bald langsamer von einer mit gleichbleibender Geschwindigkeit rotirenden Transmissionswelle abzuleiten. Dies ist z. B. bei den Drehbänken und Bohrmaschinen immer der Fall, weil man daselbst dem schneidenden Werkzeuge eine dem Materiale erfahrungsmäßig vortheilhaft zukommende constante Geschwindigkeit gegen das Arbeitsstück ertheilen muß, zu welchem Behufe natürlich die Anzahl der Umdrehungen im umgekehrten Verhältnisse mit den Durchmessern verschiedener Arbeitsstücke stehen muß. Man bedient sich für diesen Fall der sogenannten Stufenscheiben, welche wie *ABC* und *DEF*, Fig. 216, im Wesentlichen aus einer Reihe auf derselben Welle über

Fig. 216.



oder neben einander sitzender Räder bestehen. Gewöhnlich gießt man diese Räder mit dem Teller *AB* sammt der Nabe *ab* aus dem Ganzen und läßt entweder bei kleineren Scheiben diese Nabe weit in den Innenraum der Stufenscheibe vorspringen, oder man unterstützt bei größeren Abmessungen der Scheibe die letztere, wie in der Figur, noch durch einen besonderen aufgeschraubten Teller *C*, der mit einer zweiten Nabe *cd* versehen ist. Man sieht leicht ein, daß die Getriebewelle *DY* bei derselben Geschwindigkeit der Treibwelle *CX* eine kleinere Umdrehungszahl annimmt, wenn man den Riemen aus der Lage *HK* in die Lage *LM* bringt, und daß diese Zahl noch kleiner ausfällt, wenn man ihn auf das noch kleinere Treibrad *AB* und das noch größere Getriebrad *EF* legt.

Um bei jedem Wechsel der Scheiben die Riemenlänge nicht oder nur wenig verändern zu müssen, hat man die Scheibendurchmesser nach einem gewissen Gesetze zu bestimmen. Sind die Riemen gekreuzt, wie Fig. 217, so hat man nach §. 54 für den mit Riemen bedeckten Bogen γ :

$$\cos \frac{\gamma}{2} = - \frac{a_1 + b_1}{d},$$

und die Länge des Riemens:

$$l = 2d \sin \frac{\gamma}{2} + \gamma (a_1 + b_1);$$

Fig. 217.

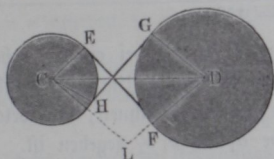
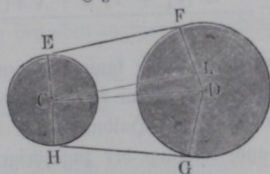


Fig. 218.



unter a_1 und b_1 die Scheibenhalbmesser verstanden. Läßt man daher a_1 um ebenso viel abnehmen als b_1 zunimmt, so daß also

$$a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \dots$$

für alle zusammenarbeitenden Scheiben eine und dieselbe Größe ist, so ändern sich weder die umspannten Bogen noch die erforderliche Riemenlänge, und es ist daher bei dem Verlegen des Riemens über ein anderes Scheibenpaar eine Veränderung der Riemenlänge nicht nöthig.

Bei dem offenen Riemen, Fig. 218, hat man dagegen

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \pm \frac{b_1 - a_1}{d}$$

und die Riemenlänge

$$l = 2d \sin \frac{\gamma}{2} + \gamma a_1 + (2\pi - \gamma) b_1.$$

Setzt man hierin näherungsweise

$$\sin \frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\gamma}{2} \right)^2 = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b_1 - a_1}{d} \right)^2$$

und

$$\begin{aligned} \gamma &= \pi - (\pi - \gamma) = \pi - 2 \sin \frac{\pi - \gamma}{2} = \pi - 2 \cos \frac{\gamma}{2} \\ &= \pi - 2 \frac{b_1 - a_1}{d}, \end{aligned}$$

so erhält man die Riemenlänge

$$\begin{aligned} l &= 2d - \frac{(b_1 - a_1)^2}{d} + \left(\pi - 2 \frac{b_1 - a_1}{d} \right) a_1 + \left(\pi + 2 \frac{b_1 - a_1}{d} \right) b_1 \\ &= 2d + \pi (a_1 + b_1) + \frac{(a_1 - b_1)^2}{d}. \end{aligned}$$

Bezeichnet nun v_1 das Umsetzungsverhältniß

$$v_1 = \frac{a_1}{b_1},$$

so hat man auch:

$$l = 2d + \pi (v_1 + 1) b_1 + \frac{(v_1 - 1)^2}{d} b_1^2,$$

woraus

$$b_1 = \frac{-\pi (v_1 + 1) d + \sqrt{4(v_1 - 1)^2 (l - 2d)d + \pi^2 (v_1 + 1)^2 d^2}}{2(v_1 - 1)^2}$$

sich ergibt. Man kann daher mittelst dieser Formel bei einer gegebenen Riemenlänge l , einem Artenabstande d und einem gewissen Umsetzungsverhältnisse v_1 leicht den Halbmesser b_1 der einen Scheibe berechnen, mit welchem dann auch derjenige der zugehörigen Scheibe $a_1 = v_1 b_1$ gegeben ist. Bei einem großen Artenabstande d , bei welchem die umspannten Bogen wenig von der halben Peripherie abweichen, hat man annähernd

$$l = 2d + \pi (a_1 + b_1) = 2d + \pi (v_1 + 1) b_1,$$

daher:

$$b_1 = \frac{l - 2d}{\pi (v_1 + 1)},$$

welcher Ausdruck für $v = 1$ den genau richtigen Werth

$$b_1 = \frac{l - 2d}{2\pi} = a_1$$

liefert.

Bei der Construction der Stufenscheiben ist in der Regel der Artenabstand gegeben, und es sind die Halbmesser der einzelnen Scheiben unter Annahme gleicher Riemenlänge derartig zu bestimmen, daß die Umsetzungsverhältnisse gewissen ebenfalls gegebenen Bedingungen entsprechen. Bei Drehbänken und Bohrmaschinen z. B. wird den gestellten Anforderungen am besten dadurch genügt, daß die einzelnen, durch die verschiedenen Scheibenpaare erreichbaren Geschwindigkeiten der Arbeitsmaschinenwelle die Glieder einer geometrischen Reihe bilden. Bezeichnet daher v das Umsetzungsverhältniß zwischen dem ersten Scheibenpaare a_1 und b_1 , so hat man die Umsetzungsverhältnisse der nächstfolgenden zu

$$v\varepsilon, v\varepsilon^2, v\varepsilon^3 \dots v\varepsilon^{n-1}$$

anzunehmen, worin ε eine gewisse constante Zahl ist, die sich aus

$$\varepsilon = \sqrt[n-1]{\frac{V}{v}}$$

bestimmt, wenn unter V die größte und unter v die kleinste Geschwindigkeit der betriebenen Ae verstanden wird. Es ist in diesen Fällen immer möglich, die Stufenscheiben den gestellten Anforderungen gemäß zu construiren, doch werden hierbei die beiden Scheiben im Allgemeinen verschieden ausfallen, wie auch die Riemenlänge nur bei einem bestimmten Artenabstande d für alle Paare gleich sein kann. Es ist nun in der Praxis häufig erwünscht,

zwei nach demselben Modelle gegossene, also congruente Stufenscheiben zusammen arbeiten zu lassen, und ist für diesen Fall etwa folgende Berechnung anzustellen. Ist die Anzahl der Scheibenpaare, wie in Fig. 216, n etwa 5, und ist das Verhältniß der größten zur kleinsten Geschwindigkeit $\frac{V}{v} = \alpha$ gegeben, so ist unter Beibehaltung der oben angegebenen Bedingung, daß die Geschwindigkeiten eine geometrische Reihe bilden sollen, der Exponent ε derselben gegeben durch

$$\varepsilon = \sqrt[4]{\alpha}.$$

Bezeichnet nun v das Umsetzungsverhältniß des ersten Scheibenpaares, und sind a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5 die Halbmesser der Scheiben, so hat man die Umsetzungsverhältnisse der Paare

Nr. des Paares	1.	2.	3.	4.	5.
Verhältniß der Halbmesser	$\frac{a_1}{a_5}$	$\frac{a_2}{a_4}$	$\frac{a_3}{a_3}$	$\frac{a_4}{a_2}$	$\frac{a_5}{a_1}$
Umsetzungsverhältniß . . .	v	$v\varepsilon$	$v\varepsilon^2$	$v\varepsilon^3$	$v\varepsilon^4$

Es ist weiter klar, daß das mittlere Paar wegen des übereinstimmenden Modells ein Umsetzungsverhältniß gleich Eins hat, und es folgt daher

$$v = \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{1}{(\sqrt[4]{\alpha})^2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

so daß die Umsetzungsverhältnisse der einzelnen Paare die geometrische Reihe bilden

$$\sqrt{\frac{1}{\alpha}}, \sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}}, 1, \sqrt[4]{\alpha}, \sqrt{\alpha}.$$

Ist nun d der Arenabstand, so kann man die mittlere Scheibe a_3 beliebig wählen, und erhält für dieselbe die genaue Riemenlänge

$$l = 2d + 2\pi a_3.$$

Nun lassen sich aus dieser Länge l , dem gegebenen Arenabstande d und für die Umsetzungsverhältnisse

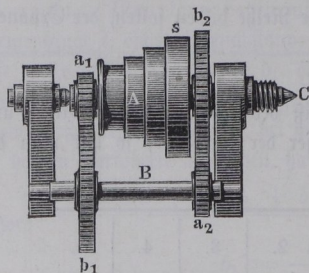
$$v = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \text{ und } v\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{1}{\alpha}}$$

die Halbmesser a_1, a_2, a_4 und a_5 nach der oben entwickelten Formel ermitteln.

Sehr häufig vergrößert man die Anzahl der möglichen Umsetzungsverhältnisse, welche durch zwei Stufenscheiben gegeben sind, durch eine solche Anordnung,

welche gestattet, entweder die Welle der Arbeitsmaschine direct von der einen Stufenscheibe zu betreiben oder nach Bedürfnis noch ein oder mehrere Räder vorgelege dazwischen einzuschalten. In dieser Art wendet man häufig das in Fig. 219 dargestellte doppelte Vorgelege bei Drehbänken an, indem man

Fig. 219.



auf die Hülse A die getriebene Stufenscheibe setzt, welche, wie schon in §. 42 angegeben worden, entweder bei fester Verbindung mit dem Rade b_2 dasselbe und die Spindel direct mitnimmt, oder mittelst der Vorgelege $\frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2}$ indirect bewegt. Auf diese Weise erhält man, wenn die Anzahl der einzelnen Scheiben jeder Stufenscheibe n ist, offenbar $2n$ verschiedene Umsetzungsverhältnisse. Soll auch hier die Bedingung erfüllt sein, daß diese

Verhältnisse eine geometrische Reihe mit dem Exponenten ε bilden sollen, so ergibt sich, unter $\alpha = \frac{V}{v}$ wieder das Verhältniß der größten zur kleinsten Geschwindigkeit der Spindel verstanden, offenbar

$$\varepsilon = \sqrt[2n-1]{\alpha},$$

und die Umsetzungsverhältnisse bilden die Reihe

$$v, v\varepsilon, v\varepsilon^2 \dots v\varepsilon^{n-1}, v\mu, v\mu\varepsilon, v\mu\varepsilon^2 \dots v\mu\varepsilon^{n-1},$$

wenn unter μ das Umsetzungsverhältniß des doppelten Rädervorgeleges $\frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$ verstanden ist. Daher folgt hieraus, weil $v\mu = v\varepsilon^{n-1} \varepsilon$ sein muß, $\mu = \varepsilon^n$.

Beispiel. Bei einer Drehbank mit Vorgelege sollen zwei gleiche viergängige Stufenscheiben so angeordnet werden, daß die einzelnen Geschwindigkeiten eine geometrische Reihe bilden, deren äußerste Glieder in dem Verhältnisse 1 : 24 zu einander stehen. Welche Dimensionen sind den einzelnen Scheiben und den Rädern zu geben, wenn die kleinste Scheibe 80 Millimeter Halbmesser erhalten und der Axenabstand 2 Meter betragen soll?

Man hat hier

$$\varepsilon = \sqrt[7]{\frac{1}{24}} = 0,635$$

und das Umsetzungsverhältniß des zweifachen Rädervorgeleges:

$$\varepsilon^4 = 0,635^4 = 0,162.$$

Bezeichnet man die Halbmesser der Scheiben mit a_1, a_2, a_3 und a_4 , so hat man

$$\frac{a_1}{a_4} \varepsilon^3 = \frac{a_4}{a_1}$$

und daher:

$$a_1 = \frac{a_4}{\sqrt[3]{\varepsilon^3}} = \frac{80}{0,506} = 158 \text{ Millimeter,}$$

folglich die Riemenlänge annähernd

$$l = 2d + \pi (158 + 80) = 4000 + 747 = 4747 \text{ Millimeter.}$$

Das Umsetzungsverhältniß des ersten Scheibenpaares ist:

$$\nu = \frac{a_1}{a_4} = \frac{158}{80} = 1,975,$$

daher das des zweiten:

$$\nu_1 = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_1}{a_4} \varepsilon = 1,975 \cdot 0,635 = 1,255,$$

folglich ergibt sich nun a_3 zu

$$a_3 = \frac{l - 2d}{\pi (\nu + 1)} = \frac{4747 - 4000}{3,14 \cdot 2,255} = 105,5 \text{ Millimeter}$$

und

$$a_2 = a_3 \cdot \nu_1 = 105,5 \cdot 1,255 = 132,4 \text{ Millimeter.}$$

Anmerkung. In der Praxis pflegt man die Halbmesser der Stufenscheiben meist um gleiche Größen wachsen zu lassen, so daß dieselben die Glieder einer arithmetischen Reihe bilden. Es ist leicht zu erkennen, daß in diesem Falle bei nur drei Scheiben die Geschwindigkeiten in gleichem Verhältnisse wachsen, d. h. die Glieder einer geometrischen Reihe bilden. Denn bezeichnet a den Halbmesser der kleinsten, $a + e$ den der mittleren und $a + 2e$ den der größten Scheibe, so sind die Umsetzungsverhältnisse gegeben durch:

$$\nu_1 = \frac{a}{a + 2e}; \quad \nu_2 = \frac{a + e}{a + e} = 1 \quad \text{und} \quad \nu_3 = \frac{a + 2e}{a},$$

daher

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{a}{a + 2e} = \frac{\nu_2}{\nu_3}.$$

Bei mehr als drei Scheiben findet diese Beziehung nur näherungsweise statt, und zwar um so näher, je kleiner der Zuwachs e im Verhältniß zu a ist. Man hat z. B. bei vier Scheiben die

Halbmesser	a	$a + e$	$a + 2e$	$a + 3e$
Umsetzungsverhältnisse	$\nu_1 = \frac{a}{a + 3e}$	$\nu_2 = \frac{a + e}{a + 2e}$	$\nu_3 = \frac{a + 2e}{a + e}$	$\nu_4 = \frac{a + 3e}{a}$

daher das Verhältniß der Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} \frac{\nu_1}{\nu_2} &= \frac{a}{a + 3e} \frac{a + 2e}{a + e} = \frac{a^2 + 2ae}{a^2 + 4ae + 3e^2} \\ \frac{\nu_2}{\nu_3} &= \frac{a + e}{a + 2e} \frac{a + e}{a + 2e} = \frac{a^2 + 2ae + e^2}{a^2 + 4ae + 4e^2} \\ \frac{\nu_3}{\nu_4} &= \frac{a + 2e}{a + e} \frac{a}{a + 3e} = \frac{a^2 + 2ae}{a^2 + 4ae + 3e^2} = \frac{\nu_1}{\nu_2}. \end{aligned}$$

Es ist also

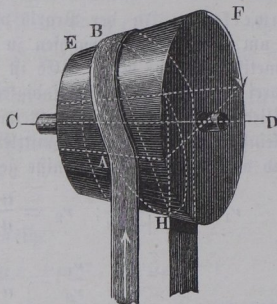
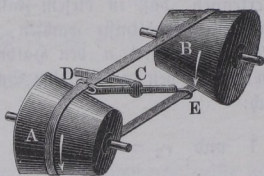
$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\nu_3}{\nu_4}$$

und $\frac{\nu_2}{\nu_3}$ hiervon nur um eine Größe abweichend, die um so kleiner ist, je geringer e gegen a ist. In obigem Beispiele ergaben sich dem entsprechend die Halbmesser zu 80, 105,5, 132,4 und 158 Millimeter, also nur wenig abweichend von einer arithmetischen Reihe mit der Differenz $e = 26$ Millimeter.

§. 64. **Conische Trommeln.** Anstatt der Stufenscheiben wendet man öfter auch zwei conische Rientrommeln in entgegengesetzter Stellung A und B , Fig. 220, an, und bewirkt die Stellung des Riemen auf denselben durch ein gabelförmiges Führungseisen DCE , welches den Riemen an den Auflaufstellen bei D und E umfaßt. Ohne eine solche Führung würde der Riemen von selbst eine Verschiebung annehmen, wozu ihm die conische Form der Trommel das Bestreben ertheilt. Da sich der Riemen hierbei nämlich über

Fig. 221.

Fig. 220.



der oberen Seite EF , Fig. 221, nicht nach dem Bogen eines Kreischnittes, sondern nach demjenigen einer auf EF winkrecht stehenden Ellipse ABH auf die Rolle legt, so hat er wegen der Richtung an der Auflaufstelle bei A das Bestreben, von der kleineren Endfläche der Trommel nach der größeren fortzurücken. Dies ist beiläufig auch der Grund, warum ein Riemen auf einer gewölbten Riemscheibe sich immer von selbst nach deren Mitte zu führen strebt und sich dort erhält.

Mit conischen Rientrommeln erreicht man zwar den Vortheil, daß man das Umsehungsverhältniß innerhalb gewisser Grenzen stetig um jeden beliebigen Betrag ändern kann, doch ist auf eine genaue Erreichung einer bestimmten Umsehung nur bei schmalen Riemen oder Schnüren mit Sicherheit zu rechnen. Denkt man sich nämlich den Riemen $CDEF$, Fig. 222, die beiden Kegelmäntel A und B berührend, so ist leicht ersichtlich, daß ein bestimmtes Gleiten einzelner Riementheile auf den Trommeln stattfinden muß, da die beiden

Halbmesser CH und KF in einem anderen Verhältnisse zu einander stehen, wie diejenigen DG und IE . In Folge dessen wird ein mittleres Um-

Fig. 222.

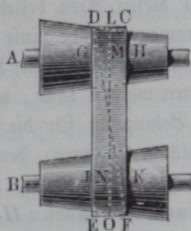
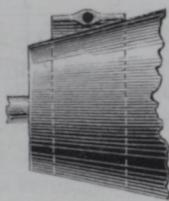


Fig. 223.

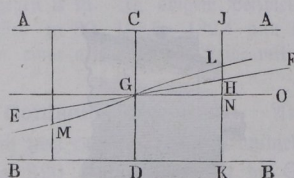


setzungsverhältniß, etwa das der Halbmesser LM und NO , für die Bewegung günstig sein, das aber bei breiteren Riemen kaum mit Schärfe angegeben werden kann wegen der schrägen Anspannung, in welche der Riemen auf den conischen Trommeln versetzt wird. Denn wie aus der Figur ersichtlich ist, wird der Riemenzug hauptsächlich durch die beiden Punkte D und F hindurchgehen. Hieraus folgt der weitere Nachtheil, daß wegen dieses schrägen Zuges der Riemen sehr ungleichmäßig in den einzelnen Fibern angestrengt wird, was in Vereinigung mit dem vorerwähnten Gleiten zu einem schnellen Verbruche führt. Diese Uebelstände nehmen natürlich mit der Breite des Riemens zu, und sind bei Schnüren weniger erheblich. Mit Rücksicht hierauf hat man die Riemen auch wohl aus zwei dünneren Lederstreifen mit zwischengelegter schnurformiger Einlage nach Fig. 223 ausgeführt, wodurch man wegen der schmalern Auflagerfläche allerdings jene besagten Uebelstände wesentlich herabzieht und einen mehr centralen Zug erhält, womit aber wiederum eine größere Steifigkeit und daher daraus folgende schnellere Abnutzung des Riemens in Kauf genommen werden muß.

Damit der Riemen auf conischen Trommeln immer in der gehörigen Spannung verbleibe, muß die erforderliche Riemenlänge an jeder Stelle dieselbe Größe haben. Bei dem gekreuzten Riemen ist dies nach dem vorigen Paragraph der Fall, wenn die Summe der Radien der durch den Riemen verbundenen Kreise überall von constanter Größe ist, und man kann dieses Gesetz, wie aus Obigem ersichtlich ist, annähernd auch für den offenen Riemen gelten lassen, sobald nur der Axenabstand im Verhältnisse zu den Trommelhalbmessern hinreichend groß, daher die Abweichung der unspannten Bogen von Halbkreisen nur klein ist.

Seien AA und BB , Fig. 224, die beiden parallelen Axen der Regel so dicht neben einander gelegt, daß ihr normaler Abstand CD gleich jener

Fig. 224.



constanten Summe der Halbmesser ist, so erkennt man, daß irgend eine zwischen diesen Axen beliebig schräg angenommene gerade Linie EF als die Erzeugungsline zweier Regel angenommen werden kann, welche der obigen Bedingung für die constante Riemenlänge genügen; denn es ist offenbar an jeder Stelle, z. B. bei H die Summe der Radien $HJ + HK$

gleich dem Abstände CD , und es entspricht der Mittelpunkt G der Strecke CD derjenigen Stelle der Regel, wo ihr Umsetzungsverhältniß gleich der Einheit ist. Verschiebt man den Riemen aus dieser mittleren Stellung CD um die Größe $\lambda = CJ$ nach JK , so ist das Umsetzungsverhältniß daselbst

$$v = \frac{JH}{KH} = \frac{a - \lambda \tan \varphi}{a + \lambda \tan \varphi} = \frac{l - \lambda}{l + \lambda},$$

wenn mit $a = CG$ der halbe Abstand der Axen, mit φ deren Neigungswinkel gegen die Regelerszeugende und mit $l = \frac{a}{\tan \varphi}$ die Länge einer Regelseite von G bis zur Spitze bezeichnet wird. Man erhält hieraus:

$$\lambda = \frac{a}{\tan \varphi} \cdot \frac{1 - v}{1 + v} = l \frac{1 - v}{1 + v}.$$

Diese Gleichung lehrt, daß gleich große Verschiebungen λ des Riemens nicht gleich große Veränderungen des Umsetzungsverhältnisses v zur Folge haben können. Man erhält z. B. für $v = 0,1, 0,2, 0,3$

$$\lambda = 0,82 l, 0,67 l, 0,54 l \text{ u. s. w.}$$

Wollte man die Regel so gestalten, daß bei gleichen Schiebungen die Umsetzungsverhältnisse eine geometrische Reihe bilden, so hätte man die Regelprofile nach einer Curve MGL auszuführen, welche auf die den Axen Parallele GO als X -Axe und GC als Y -Axe bezogen, durch die Gleichung gegeben ist:

$$v = \frac{LJ}{LK} = \frac{a - y}{a + y} = c^x,$$

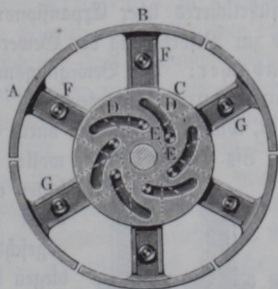
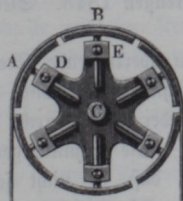
unter c eine gewisse constante Zahl verstanden, welche dadurch bestimmt ist, daß für ein bestimmtes x z. B. GN für v ein Werth vorgeschrieben ist. Aus dieser Gleichung ersieht man, daß y für gleiche und entgegengesetzte Werthe von x dieselbe absolute Größe annimmt. Solche nach Curven profilirte

Trommeln werden indessen sehr selten, z. B. bei Vorspinnmaschinen, ausgeführt. Zuweilen wendet man auch einen Keil in Verbindung mit einem Cylinder an, deren Axen parallel sind, und dann muß man, wie überhaupt in allen den Fällen, wo der obigen Bedingung gleicher Riemenlänge nicht genügt werden kann, eine Spannrolle anordnen.

Häufig bedient man sich zur Veränderung des Umsehungsverhältnisses, namentlich zum Zwecke einer genauen Regulirung der Bewegung, wie sie z. B. bei den zur Fabrication des endlosen Papiers dienenden Maschinen erforderlich ist, auch der sogenannten Expansionscheiben. Dieselben sind zwar von mannichfacher Construction, stimmen aber meist im Wesen darin überein, daß der Kranz aus mehreren Sektoren besteht, welche durch geeignete Vorrichtungen, wie Schrauben oder schneckenförmige Führungen, in radialer Richtung entsprechend verstellt werden können. Durch eine solche Veränderung des Abstandes der Sektorenumfänge vom Mittelpunkte läßt sich innerhalb gewisser allerdings nur enger Grenzen der Umfang, d. h. die zum Umwickeln der Scheibe nöthige Riemenlänge entsprechend reguliren. Eine der einfachsten Rollen dieser Art zeigt Fig. 225. Hier sind die den Kranz bildenden sechs Sektoren *A, B...* mit Stielen versehen, welche durch Hülsen *D, E* des

Fig. 226.

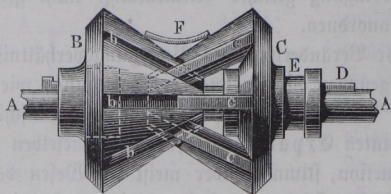
Fig. 225.



sternförmigen Nabenstückes *C* geführt sind und darin mittelst Druckschrauben festgestellt werden können. Während hierbei jeder einzelne Arm einzeln und zwar im gleichen Betrage verstellt werden muß, hat man auch solche Scheiben ausgeführt, bei welchen sämtliche Arme *A, B...*, Fig. 226, gleichzeitig um gleichviel dadurch vor- oder zurückgeschoben werden, daß man eine auf der Axe drehbare Scheibe *C* verdreht, welche für jeden Arm eine spiralförmige Nut *D* enthält, in die ein Stift oder eine entsprechende Hervorragung *E* des zugehörigen Arms hineintritt. Durch die Druckschrauben *F* lassen sich die Arme in dem sternförmigen Mittelstücke *G*, welches ihnen zur Führung

dient, feststellen. Eine ihrem Zwecke nach verwandte, nur ihrer Einrichtung nach verschiedene Anordnung zeigt der doppelte Rippenkegel, Fig. 227,

Fig. 227.



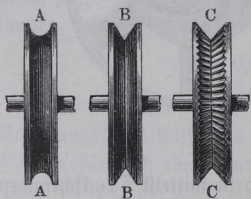
welcher u. A. bei gewissen Flachspinnmaschinen zur Verwendung gebracht ist. Auf der Ase A ist hier ein Kegel B fest aufgekittet und ein anderer entgegengesetzt gestellter Kegel C beweglich auf einer Feder D angebracht, so daß man demselben mittelst einer in die Ausrückernuth E ein-

greifenden Gabel eine Längenverschiebung auf der Ase A in gewissem Betrage ertheilen kann. Von diesen Kegeln ist der eine B mit Einschnitten b versehen, in welche die den anderen Kegel C bildenden Rippen c eintreten können, derart, daß gewissermaßen ein gegenseitiges Durchdringen der beiden Kegel stattfindet. Es ist hieraus deutlich, daß der Hals zwischen beiden Kegeln, in welchen sich der Betriebsriemen F einlegt, einen veränderlichen, von der Stellung der beiden Kegel abhängigen Durchmesser hat.

Ausführlicheres über Expansionsrollen siehe in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbleißes in Preußen 1843. Siehe auch Redtenbacher: Die Bewegungsmechanismen.

§. 65. Schnüre und Keilriemen. Wenn die zu übertragende Kraft nur gering ist, können die Riemen durch Seile oder Schnüre von Hanf, Baum-

Fig. 228.



wolle, gedrehtem Leder oder durch Darmsaiten ersetzt werden. Die Schnüre gewähren dabei den Vortheil, daß sie nicht so leicht abgeschlagen werden, sich leichter zur Seite biegen lassen, und, wie schon oben bemerkt, auf conischen Trommeln sich besser als Riemen verwenden lassen. Die hierzu nöthigen Schnurscheiben erhalten eine vertiefte Rinne oder Spur zur Aufnahme der

Schnur, wie in A, B, C, Fig. 228, angedeutet ist. Bei der scharf eingedrehten Spur in B (von circa 60 Grad Convergenz) klemmt sich die Schnur fest zwischen die Seiten ein, wodurch eine größere Reibung entsteht, bei der also eine geringere Spannung genügend ist. Um das Gleiten der Schnur wirksam zu verhüten, versieht man auch wohl die Spurwandungen mit Kerben, wie bei C C; übrigens haben keilförmige Spuren den Vortheil, daß sie für dickere und dünnere Schnüre gleichmäßig brauchbar sind. Auch

Stufenscheiben werden für Schnurbetrieb häufig angewendet, namentlich bei kleinen Drehbänken, und zeigt *ACB*, Fig. 229, eine solche mit drei Gängen.

Fig. 229.

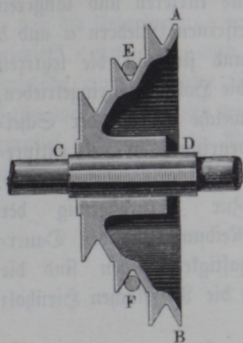
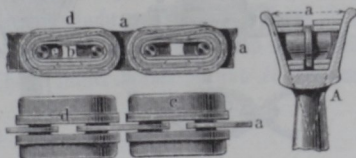


Fig. 230.



Für die Stärke der Schnüre giebt Reuleaux an, daß man solche nicht unter $4\sqrt{P}$ machen solle, wenn *P* die zu übertragende Kraft am Umfange bedeutet.

Für größere Kräfte hat man in neuerer Zeit sogenannte Keilketten in Anwendung gebracht, die richtiger wohl Keilriemen zu nennen wären, da ihre Wirkung ganz wie diejenigen der Riemen auf die Reibung begründet ist, und sie mit den Ketten nur hinsichtlich ihrer Zusammenfügung aus einzelnen Gliedern eine gewisse Uebereinstimmung zeigen. Eine solche unter anderen bei Dampfmaschinen mit Vortheil zur Verwendung gebrachte Keilkette ist die von Clissold angegebene, Fig. 230. Bei derselben ist aus hochkantigen und flachkantigen Gliedern von Eisenblech *a* und *b*, welche durch Bolzen *c* vereinigt sind, eine Kette gebildet, deren flache Glieder mit Lederstreifen *c* bewickelt sind, welche an ihren beiderseits vorstehenden Rändern der keilförmigen Spurrinne der Scheibe *A* entsprechend abgeschrägt sind. Durch diese Form wird die Reibung in ähnlicher Art vergrößert, wie dies bei den Minotto'schen Keilrädern (§. 52) der Fall ist. Die Berechnung eines solchen Triebwerks ist übrigens ebenso wie die des gewöhnlichen Riementriebs durchzuführen, indem man nur als Reibungscoefficienten hier wie bei Keilrädern den Werth

$$\frac{\varphi}{\sin \frac{\alpha}{2} + \varphi \cos \frac{\alpha}{2}}$$

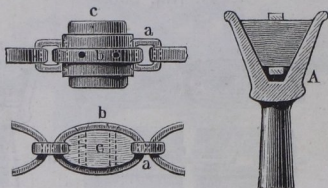
setzt.

Nimmt man wieder $\alpha = 30^\circ$ und $\varphi = 0,28$, so erhält man den Reibungscoefficienten zu

$$\frac{0,28}{0,259 + 0,28 \cdot 0,966} = 0,53.$$

Eine andere von Angström*) angegebene Keilkette ist in Fig. 231 dargestellt. Hierbei besteht die Kette abwechselnd aus kürzeren und längeren

Fig. 231.



eisernen Gliedern *a* und *b* und sind in die letzteren die Holzkeile *c* eingetrieben, welche seitlich der Scheibenrinne in *A* entsprechend schräg gearbeitet sind. Zur Vergrößerung der Reibung wie der Dauerhaftigkeit wegen sind die

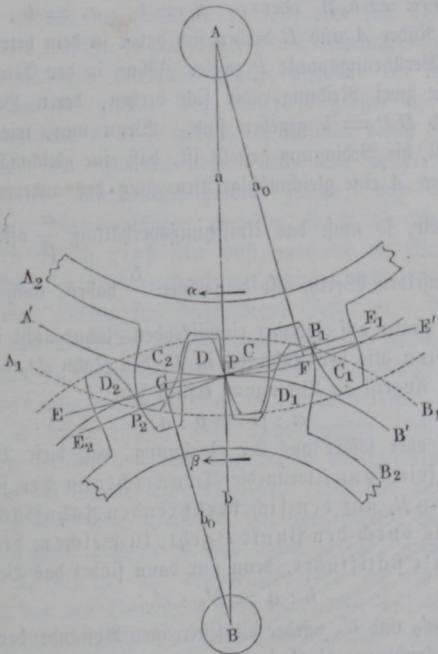
Holzkeile so nach dem Fasernlaufe geschnitten, daß die Reibflächen Hirnholz zeigen.

§. 66. **Stirnräder.** Durch die bisher betrachteten Reibungs- und Riemenräder ist die Bewegungsübertragung zwischen zwei Axen nur so lange möglich, als der zu überwindende Widerstand den Betrag der Reibung nicht übersteigt, welche sich am Umfange der Räder einstellt, sobald das eine Rad dem Antriebe des anderen nicht folgt. Letzteren Zustand zu vermeiden, hat man daher diese Reibung dadurch hinreichend groß zu machen, daß man den Druck der Räder gegen einander oder bei Riemscheiben die Spannung des Riemens genügend groß macht. Da dieser Druck resp. diese Spannung indeß entsprechende Reibungswiderstände der Axen in ihren Lagern im Gefolge hat, so wird man Reibungsräder in solchen Fällen nicht mit Vortheil anwenden können, in denen die zu übertragende Kraft eine beträchtliche ist, wie dies im Allgemeinen meist bei den langsamer gehenden Wellen der Fall ist. Auch sind die Reibungsräder da nicht zu verwenden, wo es darauf ankommt, daß die Bewegungen zweier Axen in jedem Augenblicke genau in dem gewünschten Verhältnisse zu einander stehen, wie es für viele Arbeitsmaschinen, z. B. für Schraubenschneidmaschinen sowie für Uhren und andere Meßinstrumente, unerläßliche Bedingung ist, denn auch bei dem größten Drucke der Reibungsräder gegeneinander ist man erfahrungsmäßig vor einem zeitweiligen Gleiten der Radflächen auf einander nicht vollkommen gesichert. Diese Uebelstände haben zu der Construction der Zahnräder geführt, d. h. solcher Räder, bei denen durch die Form ihrer Oberflächen ein stetes Mitnehmen des einen Rades durch das andere unter allen Umständen wenigstens

*) Ztschr. deutsch. Ingenieure, Jahrg. 1868, S. 706.

innerhalb der Grenzen der Festigkeit des Materials gesichert ist. Man versteht dabei bekanntlich die Radumfänge mit gewissen Hervorragungen oder Zähnen und dazwischen befindlichen Vertiefungen oder Zahnlücken, derart, daß die Zähne des einen Rades in die Lücken des anderen eintreten können, so daß die Uebertragung der Bewegung von dem einen Rade auf das andere geschieht, ohne daß man zwischen den Rädern durch Aneinanderpressen derselben eine besondere Reibung zu erzeugen hat. In dem besonderen Falle, welcher auch hier wieder zunächst untersucht werden soll, daß die Axen parallel sind, führen die Räder den Namen *Stirnräder*. Aus Fig. 232, welche die im Eingriffe befindlichen Theile zweier Räder *A* und *B* für zwei

Fig. 232.



parallele Axen darstellt, erkennt man sofort, wie der Zahn *C* des Rades *A* bei der Umdrehung des letzteren gegen den Zahn *D* des Rades *B* drückend dieses Rad herumdreht. Ist *P* der Berührungspunkt der beiden Zähne *C* und *D*, von welchem Punkte zunächst vorausgesetzt werden soll, daß er auf der Centralen *AB* gelegen sei, so ist leicht zu ersehen, daß bei einer

Drehung des Rades A um den kleinen Winkel α das Rad B um einen Winkel β gedreht wird, welcher durch die Proportion

$$\alpha : \beta = b : a$$

gegeben ist, unter a und b die bezüglichen Abstände des Berührungspunktes P von A und B verstanden. Dies wird immer der Fall sein, in welcher Richtung die Zähne in P auch auf einander wirken, denn wenn die Gerade EE diese Richtung angiebt, und

$$AF = a_0 \text{ und } BG = b_0$$

die Normalen darauf aus den Axen sind, so verschiebt sich offenbar die Linie EE und somit der Punkt P bei einer kleinen Drehung α der Axe A um die Größe $\eta = a_0 \alpha$ und diese Verschiebung wird einer Drehung der Normale BG um β entsprechen, für welche man $\eta = b_0 \beta$ hat. Hieraus folgt:

$$a_0 \alpha = b_0 \beta \text{ oder } \alpha : \beta = b_0 : a_0 = b : a.$$

Die beiden Räder A und B drehen sich daher in dem betrachteten Augenblicke, wo der Berührungspunkt P zweier Zähne in der Centrale AB liegt, gerade so, wie zwei Reibungsräder sich drehen, deren Halbmesser durch $AP = a$ und $BP = b$ gegeben sind. Wenn nun, wie in der Praxis immer der Fall, die Bedingung gestellt ist, daß eine gleichmäßige Bewegung des einen Rades A eine gleichmäßige Bewegung des anderen Rades B zur

Folge haben soll, so muß das Umfetzungsverhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ offenbar in jedem Augenblicke denselben Werth, also denjenigen $\frac{b}{a}$ haben, auch wenn der Be-

rührungspunkt zweier auf einander einwirkenden Zähne nicht in der Centrale AB liegt. Wenn also der Zahn C_1 in P_1 den Zahn D_1 berührt, so muß auch für diesen Angriff die Bedingung erfüllt sein:

$$\alpha : \beta = b : a.$$

Man ersieht aber sofort aus der Zeichnung, daß diese Bedingung nur dann erfüllt sein kann, wenn die Druckrichtung der Zähne in P_1 , d. h. also die in P_1 auf den sich berührenden Zahnflächen Normale $E_1 P_1$ ebenfalls durch den Punkt P geht, in welchem die Berührung in der Centrale stattfindet, denn nur dann findet das Verhältniß statt:

$$b : a = b'_0 : a'_0,$$

wenn man mit a'_0 und b'_0 wieder die senkrechten Abstände der Axen A und B von der Druckrichtung $E_1 P_1$ in P_1 versteht. Ganz dieselbe Betrachtung gilt natürlich auch für eine Berührung zweier Zähne C_2 und D_2 in einem Punkte P_2 auf der anderen Seite der Centrale; auch hierfür muß die Normale $P_2 E_2$ zu den in P_2 sich berührenden Zahnflächen durch den Berührungspunkt P in der Centrale hindurchgehen. Man erkennt hieraus also, daß die Form der Zähne keineswegs willkürlich, sondern so zu wählen ist, daß dieser gefundenen Bedingung genügt wird.

Legt man durch den Punkt P , in welchem die Berührung zweier Zähne in der Centrale geschieht, die zwei sich in P berührenden Kreise A' und B' concentrisch zu den Aren, so ergibt sich aus dem Vorstehenden, daß die Umfangsgeschwindigkeiten beider Räder in diesen Kreisen, aber auch nur in ihnen von gleicher Größe sind, wie dies bei zwei Frictionsrädern von diesen Halbmessern auch der Fall ist. In einem Kreise A_1 des Rades A , welcher einen größeren Halbmesser als a hat, wird offenbar die Umfangsgeschwindigkeit größer sein als in demjenigen zu B concentrischen Kreise, welcher ihn berührt, da dessen Halbmesser kleiner ist als b , und ebenso muß in dem Kreise A_2 , dessen Halbmesser kleiner als a ist, eine geringere Umfangsgeschwindigkeit vorhanden sein, als in dem ihn berührenden Kreise des Rades B . Während daher die beiden durch P gelegten Kreise A' und B' wegen der gleichen Geschwindigkeit einfach auf einander rollen, oder sich ohne Gleitung abwälzen, so findet zwischen je zwei anderen in Berührung kommenden Kreisen wegen der verschiedenen Geschwindigkeiten offenbar ein Gleiten statt, dessen Betrag um so größer sein muß, je größer die Verschiedenheit der Geschwindigkeiten, d. h. je größer der Abstand dieser Kreise von den durch P gelegten ist. Hieraus ergibt sich nun weiter, daß auch die Entfernung zweier aufeinanderfolgenden Zähne, auf den durch den Punkt P gelegten Kreisumfängen gemessen (d. h. die Bogenlänge), bei beiden Rädern gleich groß sein muß, während die Entfernung zweier Zähne selbstverständlich in allen anderen mit einander in Berührung kommenden Kreisen bei beiden Rädern von verschiedener Größe ist. Die Entfernung zweier Zähne von Mitte zu Mitte, oder überhaupt zwischen zwei gleichgelegenen Flächen, auf jenen durch P gelegten Kreisen gleicher Geschwindigkeit als Bogenlänge gemessen, nennt man die Zahntheilung oder schlechtweg Theilung, und daher führen diese mehrgedachten Kreise gleicher Geschwindigkeit, auf welchen man diese Theilung bei der Construction abzutragen pflegt, allgemein den Namen Theilkreise. Wie aus dem Vorstehenden hervorgeht, erscheinen diese Kreise bei den ausgeführten Rädern nicht als materielle Bildungen, sondern es sind ideale Kreise, welche zwischen den Kopfkreisen A_1 resp. B_1 und den Fußkreisen A_2 resp. B_2 der Räder so gelegen sind, daß das Verhältniß ihrer Halbmesser mit dem umgekehrten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten übereinkommt. Man hat offenbar nach dem in §§. 40 und 41 Gesagten die Theilkreise der Räder als die Polbahnen zu betrachten, welche dem relativen Bewegungszustande der beiden Räder entsprechen, und es ist in dem Berührungspunkte P der Pol, oder in der Geraden, welche durch P parallel zu den Aren gedacht werden kann, die Momentanaxe zu erkennen.

Bildungsgesetz für die Zahnflächen der Stirnräder. §. 67.
Unter Berücksichtigung des in der Einleitung §. 26 über *Arxide*

Gesagten ist es leicht, die Bedingungen allgemein zu entwickeln, denen die Begrenzungsflächen der Zähne von Stirnrädern genügen müssen. Bezeichnen wieder α und β die Winkelgeschwindigkeiten der parallelen Axen A und B ,

Fig. 233.

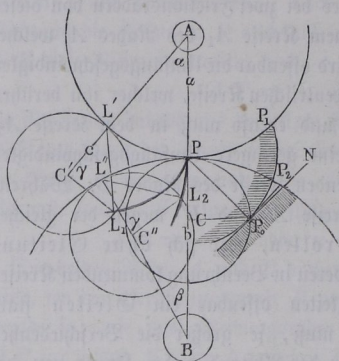


Fig. 233, und nimmt man auf der Centrale AB den Punkt P so an, daß seine Abstände PA oder a und PB oder b sich umgekehrt wie die Winkelgeschwindigkeiten verhalten, daß also $a\alpha = b\beta$ ist, so stellen nach dem Früheren die beiden durch P gehenden, zu den Axen A und B concentrischen Cylinderflächen die Axoide der relativen Bewegung zwischen A und B vor. Man kann sich insbesondere diese Bewegung so vorstellen, als ob die Axe A mit ihrem Cylinder AP vollständig festgehalten werde, und auf diesem Cylinder als Momentanaxenfläche die andere

Axe B mit ihrem Axoide oder Cylinder BP herumgewälzt werde, und zwar mit einer Geschwindigkeit $\alpha + \beta$, wie dies in der Einleitung, §. 27, mehrfach auch angenommen wurde. Wären die beiden Räder als glatte, Frictionsräder ausgeführt, so würde in der That eine solche directe Rollung auch eintreten, da die Umflächen der Frictionsräder nichts anderes sind, als die körperlich dargestellten Momentanaxenflächen. Bei den Zahnrädern sind diese zu den Theilkreisen gehörigen Cylinder AP und BP aber körperlich gar nicht vorhanden, und die beiden Räder berühren sich daher auch nicht in P , sondern irgendwo anders in P_0 , nämlich in der Berührungslinie zweier aufeinander wirkenden Zähne. Diese Zähne sind ebenfalls als Cylinderflächen parallel den Axen A und B zu denken, deren normale Durchschnitte durch die ebenen Curven P_0P_1 und P_0P_2 gegeben sind, welche in dem Punkte P_0 sich berühren, daher dort eine gemeinsame Tangente NP_0 haben. Die Berührung der Zahnflächen geschieht daher in einer geraden Linie L , welche parallel den Axen A und B ist und in P_0 senkrecht zur Ebene der Zeichnung, d. h. der Ebene der Curven P_0P_1 und P_0P_2 steht. Denkt man sich nunmehr wieder das Rad A festgehalten, und das Rad B um A herumgewälzt, so kann die Bewegung jetzt nicht mehr um die Momentanaxe in P stattfinden, sondern um die in P_0 befindliche Berührungslinie L , da diese Linie dem Rade B jetzt als Stützlinie dient. Man ersieht aus dieser Betrachtung, daß die augenblickliche Bewegung der Zahnräder in Wirklichkeit eine kleine Drehung um die Axe in P_0 ist, während die Bedingung der zu

erfüllenden Aufgabe eine kleine Drehung um die Momentanaxe in P vor-
schreibt. Diese beiden Axen in P und P_0 sind unter sich parallel, und da
zwei gleichgroße und gleichgerichtete Drehungen um parallele Axen sich nach
Einleitung, §. 4, durch eine Verschiebung senkrecht zur Ebene der Axen in
dem daselbst angegebenen Betrage unterscheiden, so zieht man daraus den
Schluß, daß die in Wirklichkeit hier stattfindende Drehung um die Axe in
 P_0 die durch die Aufgabe vorgeschriebene momentane Drehung um die Axe
 P nur dann ersetzen kann, wenn die Zahnflächen gleichzeitig eine Verschiebung
des bewegten Systems in der zur Ebene der Axen P und P_0 senkrechten
Richtung gestatten. Zwei cylindrische sich in einer Geraden L berührende
Flächen gestatten aber offenbar nur eine Verschiebung in ihrer Berüh-
rungsebene, und deshalb muß die gemeinschaftliche Berührungsebene der Zahnflächen
in P_0 , welche sich in P_0N projectirt, senkrecht zur Ebene der Axen P und P_0
sein. Es muß mit anderen Worten die Normalebene zu den Zahn-
flächen in deren Berührungslinie durch die Momentanaxe in P
gehen, wo auch die Berührung zweier Zähne stattfinden möge,
denn was hier von der ganz beliebigen Lage des Berührungspunktes P_0 nach-
gewiesen ist, gilt ganz allgemein von jeder anderen Lage desselben resp. der
in ihm sich projectirenden Berührungslinie L .

Nachdem im Obigen die Grundbedingung entwickelt ist, denen die Zahn-
flächen genügen müssen, läßt sich nun ein allgemeines Bildungsgesetz für die
Entstehung richtiger Zahnflächen geben, dessen Anwendung ohne Weiteres
auf die verschiedenen in der Praxis gebräuchlichen richtigen Zahnformen führt.

Zur Entwicklung dieses Gesetzes denke man sich zunächst zu den beiden
cylindrischen Axioiden AP und BP ein drittes, gleichfalls cylindrisches und
mit jenen paralleles Axioid CP , dessen Basis CP vorläufig ebenfalls kreis-
förmig angenommen werden möge, obwohl, wie sich später zeigen wird, für
eine andere nicht kreisförmige Basis dieses Cylinders das Gesetz seine Gültigkeit
behält.

Dieses Hilfsaxioid CP vom Halbmesser c sei in solcher Lage gedacht, daß
eine Seite L desselben in die Momentanaxe P hineinfällt, so berührt also
das Hilfsaxioid C die beiden Hauptaxoide A und B in dieser Linie L oder
 P , und zwar das eine A von außen, das andere B von innen, wenn, wie
in der Figur angenommen, die beiden Räder A und B im äußeren Eingriffe
stehen, d. h. auf verschiedenen Seiten der gemeinschaftlichen Berüh-
rungsebene liegen. Sollten diese Räder A und B in innerem Eingriffe stehen,
so berührt C die beiden Axiode A und B gleichzeitig innerlich oder
äußerlich, d. h. dieselben liegen auf derselben Seite der gemeinsamen Be-
rührungsebene. Denkt man sich nun das Hilfsaxioid C auf dem Cylinder
 A äußerlich ohne Gleitung um einen Bogen PL' herumgewälzt, so gelangt
die Berührungslinie L aus ihrer Lage in P nach einer anderen in L_1 , welche

dadurch bestimmt ist, daß die Bogenlängen PL' und $L_1 L'$ gleich groß sind. Die Linie L erzeugt bei dieser Bewegung eine der Axe A parallele Cylinderfläche, deren rechtwinkelige Basis durch die Epicycloide PL_1 dargestellt ist. In derselben Weise erhält man durch Abwälzen des Cylinders C auf der inneren Fläche von B durch die Bewegung der Geraden L eine mit B parallele Cylinderfläche, deren Basis die Hypocycloide PL_2 ist.

Es ist nun leicht zu ersehen, daß diese beiden cylindrischen Flächen PL_1 und PL_2 , als Begrenzungen zweier Zähne der Räder A und B benutzt, der oben entwickelten allgemeinen Bedingung eines richtigen Zahneingriffes genügen. Um dies zu erkennen, fasse man eine Lage C' des Cylinders C ins Auge, bei welcher derselbe um den Winkel $\alpha = PAL'$ um das Axoid A gewälzt wurde, so ist nach dem Früheren diese Wälzung des Cylinders C gleichbedeutend mit zwei Drehungen, einer um A im Betrage α und einer anderen um C im Betrage $\gamma = \frac{a\alpha}{c}$. Dieser Winkel γ ist in der Figur

durch $L' C' L_1$ dargestellt, und man erkennt auch aus der Figur, daß die durch $L' L_1$ parallel zu den Axen gelegte Ebene auf der Fläche PL_1 in L_1 normal steht, denn das Element dieser Fläche in L_1 kann als ein schmales Element eines Kreiscylinders angesehen werden, dessen Axe in L' gelegen ist. Denkt man nun dem betrachteten Systeme, d. h. sowohl dem Cylinder A wie auch demjenigen C eine Drehung um die Axe A im Betrage $-\alpha$ ertheilt, so gelangt der Cylinder C' aus dieser Lage in seine ursprüngliche Lage C zurück, die Berührungslinie L' tritt hierdurch in die Momentanaxe P , und die ganze Bewegung des Cylinders C reducirt sich auf eine Drehung desselben um seine eigene Axe im Betrage $\gamma = \frac{a\alpha}{c}$. Die Gerade L_1 fällt dabei

nach P_0 , wenn $PCP_0 = \gamma$ ist, und die Fläche PL_1 wird, wenn man dieselbe bei der Rückdrehung des Systems als mit A fest verbunden annimmt, jetzt die Lage $P_0 P_1$ annehmen, so daß die durch PP_0 zu den Axen parallel gedachte Ebene wieder in P_0 auf der Fläche $P_0 P_1$ normal steht.

In derselben Weise erkennt man, daß eine Wälzung des Cylinders C im Innern der Cylinderfläche B von C nach C'' um einen Winkel $-\beta = PBL''$ offenbar einer zweifachen Drehung des Cylinders entspricht, und zwar einer solchen $-\beta$ um B und einer anderen um die eigene Axe im Betrage $\gamma' = +\frac{b\beta}{c}$. Dieser Winkel γ' ist in der Figur

durch $L'' C'' L_2$ gegeben und offenbar steht die durch $L'' L_2$ parallel zu den Axen gelegte Ebene in L_2 normal auf der Fläche PL_2 . Dreht man auch jetzt den Cylinder B sammt der Fläche PL_2 und dem Cylinder C um die Axe B im Betrage $+\beta$ zurück, so gelangt C aus der Lage C'' ebenfalls in

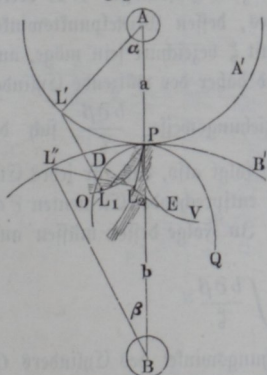
die Ausgangsaxe C zurück, und die ganze Bewegung von C läuft auf eine Drehung $\gamma' = \frac{b\beta}{c}$ hinaus. Da nun die für die Axen A und B verlangte Bewegung an die Bedingung $a\alpha = b\beta$ geknüpft ist, so folgt hieraus ohne Weiteres, daß $\gamma = \gamma'$ ist, d. h. daß in beiden hier betrachteten Fällen das Hilfsaxoid C sich um einen und denselben Winkel

$$\gamma = \frac{a\alpha}{c} = \frac{b\beta}{c}$$

und in demselben Sinne gedreht haben muß. Daraus folgt, daß die beiden Lagen L_1 und L_2 der erzeugenden Geraden L nachher in derselben Linie P_0 zusammenfallen, und daß die durch diese Linie und die Momentanaxe P gelegte Ebene normal auf den beiden Begrenzungsflächen $P_0 P_1$ und $P_0 P_2$ steht. Die letzteren müssen sich daher in der Geraden P_0 berühren und irgend ein von der einen Bahnfläche auf die andere ausgeübter Druck geht durch die Momentanaxe P , und ist senkrecht zu dieser gerichtet. Hierdurch ist offenbar der allgemeinen Bedingung genügt, welche nach dem Vorhergehenden an richtige Bahnflächen gestellt werden muß.

Die hier gefundene Eigenschaft der durch die Abwälzung des Cylinders C auf den Momentanaxenflächen der Räder erzeugten Flächen ist übrigens durchaus nicht daran geknüpft, daß der wälzende Cylinder C eine kreisförmige Basis habe, vielmehr bleibt die vorhergehende Untersuchung noch dieselbe,

Fig. 234.



welche beliebige Curve man dem wälzenden Cylinder C auch zur Basis geben möge, vorausgesetzt nur, daß die Seiten dieses Cylinders den Axen parallel sind. Denn denkt man sich die beliebige Curve OPQ , Fig. 234, als Basis des auf beiden Axoiden A und B abzuwälzenden Cylinders, so erzeugt die Berührungslinie P wieder zwei Cylinderflächen, deren rechtwinkelige Durchschnitte durch die Curven PL_1 und PL_2 dargestellt sind. Es tritt nämlich die Berührungslinie L von P nach

L_1 , wenn eine Wälzung des Cylinders C um die Axe A im Betrage $PA L' = \alpha$ stattgefunden hat, wobei ein Punkt O auf der Curve OPQ nach L' gelangt, für welchen die Länge des Bogens PO gleich derjenigen von PL' ist.

Ebenso kommt bei der inneren Wälzung auf dem Axoid B derselbe Punkt O nach einem Punkte L'' , so daß

$$\text{arc } PO = \text{arc } PL''$$

ist, und die Berührungslinie L gelangt dadurch aus der Lage in P nach derjenigen L_2 . Offenbar steht auch hier die den Axen parallele Ebene durch $L' L_1$ normal auf der Fläche PL_1 in L_1 und die den Axen parallele Ebene durch $L'' L_2$ normal auf der Fläche PL_2 in L_2 . Es ist aber auch leicht ersichtlich, daß bei einer Zurückdrehung des Systems A und C um A im Betrage $L'AP = -\alpha$, und des Systems B und C um B im Betrage

$$L''BP = \beta = \frac{a\alpha}{b}$$

der wälzende Cylinder in beiden Fällen in dieselbe Lage kommt, d. h. daß die durch L_1 und L_2 gehenden Seiten der beiden erzeugten Flächen PL_1 und PL_2 in einer und derselben Geraden P_0 zur Berührung kommen müssen, sowie daß die gemeinsame Normalebene der Flächen in dieser Berührungslinie durch die Momentanaxe P geht. Zu dem Ende hat man nur zu zeigen, daß in jedem der beiden betrachteten Fälle das Resultat der Wälzung auf A resp. B und der darauf folgenden Rückdrehung um A resp. B eine Drehung des wälzenden Cylinders OPQ in demselben Winkelbetrage ist. Dies ergibt sich leicht aus folgender Betrachtung. Denkt man sich für alle Punkte der Curve OPQ die Normalen, so hüllen dieselben bekanntlich eine Curve PEV ein, welche die Evolute von OPQ ist, und auf welcher die Krümmungsmittelpunkte der letzteren gelegen sind. Man kann daher irgend ein Element, z. B. D der Fläche OPQ , als ein unendlich schmales Cylinderelement zur Axe E und zum Halbmesser DE betrachten. Bei der Wälzung eines solchen Elementes, dessen Mittelpunktswinkel $\partial\gamma$ heißen und dessen Halbmesser allgemein mit ξ bezeichnet sein möge, auf dem Elemente $\partial\alpha$ von A oder $\partial\beta$ von B wird daher der wälzende Cylinder um seine eigene Axe E im Betrage $\frac{a\partial\alpha}{\xi}$ beziehungsweise $\frac{b\partial\beta}{\xi}$ sich drehen.

Da diese beiden Werthe gleich groß sind, so folgt also, daß für jedes Element des Cylinders OPQ bei der Wälzung auf entsprechenden Elementen $\partial\alpha$ und $\partial\beta$ die Eigendrehungen gleich groß sind. In Folge dessen müssen auch die Summen

$$\int \frac{a\partial\alpha}{\xi} \quad \text{und} \quad \int \frac{b\partial\beta}{\xi}$$

gleich groß sein, die den gesammten Drehungswinkel des Cylinders OPQ angeben, welcher aus einer Abwälzung in dem Betrage PDO und darauf folgender Rückdrehung um A resp. B resultirt.

Hiernach läßt sich das für die Verzahnung der Stirnräder geltende Grundgesetz wie folgt ausdrücken:

Man erhält immer zweizugehörige richtige, d. h. dem verlangten Bewegungszustande entsprechende Zahnflächen in denjenigen

Cylinderflächen, welche eine Seite eines den Axen parallelen Cylinders C von ganz beliebiger Basis erzeugt, sobald dieser Cylinder auf den Momentanaxenflächen A und B der Räder ohne Gleitung abgewälzt wird. Eine noch weitergehende Verallgemeinerung dieses Zahnflächenbildungsgegesetzes wird sich im Folgenden ergeben.

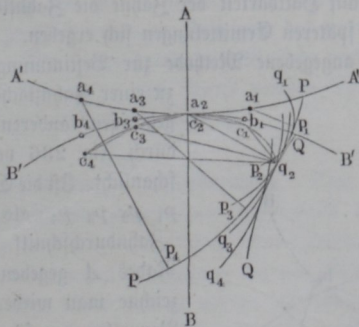
Es bedarf kaum der Bemerkung, daß, während bei äußerem Eingriffe der Räder der gedachte Cylinder C auf dem einen Noide A äußerlich, auf dem anderen B innerlich oder umgekehrt, abgewälzt werden muß, bei innerlichem Radeingriffe die Wälzung auf den Noiden entweder beide Male äußerlich, oder beide Male innerlich, vorzunehmen ist, so daß die durch die Abwälzung erzeugten Curven jedenfalls auf einer und derselben Seite der gemeinschaftlichen Berührungslinie der Theilkreise liegen.

Allgemeine Zahnform. Das im vorhergehenden Paragraphen entw. §. 68. wickelte allgemeine Bildungsgegesetz für die Zahnflächen der Stirnräder führt nun ohne Weiteres unter Annahme besonderer Voraussetzungen zu den verschiedenen Zahnformen, welche man in der Praxis zur Verwendung bringt.

Man kann zunächst bemerken, daß man die Zahnform des einen Rades A immer ganz beliebig annehmen darf, da es theoretisch stets möglich ist, die dieser willkürlichen Form zugehörige Zahnform des anderen Rades zu

finden. Ist nämlich PP , Fig. 235, eine mit der Axe A verbundene dieser parallele cylindrische Zahnfläche, so läßt sich immer ein Cylinder $c_1, c_2, c_3, c_4 \dots$ angeben, durch dessen Wälzung auf $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$ die Zahnfläche PP entstanden gedacht werden kann. Zieht man nämlich zu den beliebigen Punkten $p_1, p_2, p_3, p_4 \dots$ des Zahndurchschnitts PP die Normalen bis zu ihren Durchschnitten

Fig. 235.



$a_1, a_2, a_3 \dots$ mit dem Cylinder A , und construirt das Dreieck: $c_2 p_2 c_1$ aus

$$c_2 p_2 = a_2 p_2; c_1 p_2 = a_1 p_1; c_2 c_1 = a_2 a_1,$$

macht ferner

$$c_2 c_3 = a_2 a_3 \quad \text{und} \quad c_3 p_2 = a_3 p_3,$$

$$c_3 c_4 = a_3 a_4 \quad \text{und} \quad c_4 p_2 = a_4 p_4 \text{ u. f. f.,}$$

sowie

$$c_2 c_1 = a_2 a_1 \quad \text{und} \quad c_1 p_2 = a_1 p_1 \text{ u. f. f.,}$$

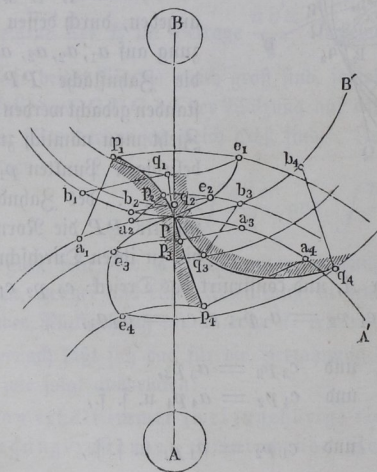
so erhält man ein Polygon $p_2 c_1 c_2 c_3 c_4 \dots$, oder bei genügender Kleinheit der Abstände eine Curve als den Durchschnitt eines den Azen parallelen Cylinders, durch dessen Abwälzung auf dem Cylinder $a_1 a_2 a_3 \dots$, wie aus der Construction ersichtlich ist, die gegebene Zahnfläche PP erzeugt wird. Wälzt man daher diesen Cylinder $p_2 c_1 c_2 c_3 \dots$ nunmehr auf dem Cylinder $b_1 b_2 b_3 \dots$ innerlich ab, so muß die Seite p_2 des wälzenden Cylinders nach dem vorigen Paragraph die zu PP gehörige Zahnfläche QQ des anderen Rades B ergeben.

Für die Verzeichnung von QQ hat man übrigens nicht nöthig, den Hülfs-cylinder $c_1 c_2 c_3 \dots$ besonders zu construiren, sondern man erhält QQ einfacher dadurch, daß man um die Punkte $b_1, a_2, b_3, b_4 \dots$, welche mit den Punkten $a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$ zusammentreffen, mit den bezüglichlichen normalen Abständen $a_1 p_1, a_2 p_2, a_3 p_3, a_4 p_4 \dots$ die Kreisbogen $q_1 q_2 q_3 q_4 \dots$ beschreibt, indem dieselben offenbar die gesuchte Schnittcurve QQ einhüllen.

Die auf solche Art gefundene Curve QQ entspricht jedenfalls den kinematischen Bedingungen der Bewegung beider Azen, womit aber noch nicht gesagt ist, daß dieselbe auch praktisch brauchbar, ja überhaupt materiell ausführbar sei, da ja möglicher Weise diese Curve sich selbst durchschneiden kann, in welchem Falle sie natürlich zur Darstellung der materiellen Zahnflächen nicht anwendbar wäre. Welchen Bedingungen in dieser Hinsicht, sowie namentlich auch in Bezug auf Haltbarkeit der Zähne die Zahnflächen zu genügen haben, wird aus den späteren Ermittlungen sich ergeben.

Eine andere von Neuleaux angegebene Methode zur Bestimmung der

Fig. 236.



zu einer Zahnfläche zugehörigen anderen ist durch Fig. 236 veranschaulicht. Ist die Curve $p_1 p_2 p_3 p_4$ als der Zahndurchschnitt des Rades A gegeben, so zeichne man wieder die Normalen ap für verschiedene Punkte derselben, und bestimme die den Durchschnittspunkten a_1, a_2, a_3, a_4 derselben mit dem Theilkreise A' entsprechenden Punkte b_1, b_2, b_3, b_4 des Theilkreises B' .

Wenn nun irgend ein Punkt $a_1, a_2, a_3 \dots$ in das Momentancentrum tritt, so muß die Berührung der Zähne in dem betreffenden Fußpunkte $p_1, p_2, p_3 \dots$ der Normale stattfinden. Legt man daher um A als Mittelpunkt Kreise durch $p_1, p_2, p_3 \dots$ und schneidet diese Kreise von P aus mit den Längen der Normalen ap ab, so legen die Schnittpunkte $e_1 e_2 e_3 e_4$ eine Curve fest, welche den geometrischen Ort der Berührungspunkte bildet, und den Namen Eingriffslinie führt. Es ist nun auch klar, daß man die entsprechenden Punkte $q_1, q_2, q_3 \dots$ des gesuchten zweiten Zahnprofils findet, wenn man durch diese Punkte e Kreise um B als Mittelpunkt beschreibt und diese Kreise von $b_1, b_2, b_3 \dots$ aus mit den Längen der vorgedachten Normalen einschneidet, derart also, daß

$$b_1 q_1 = a_1 p_1, b_2 q_2 = a_2 p_2 \dots$$

ist. Durch diese Construction erhält man also neben dem gesuchten Zahnprofil $q_1 q_2 \dots$ gleichzeitig die Eingriffslinie $e_1 e_2 \dots$, welche natürlich die beiden Zahnprofile in dem Berührungspunkte, als welcher in der Figur der Pol P angenommen worden, rechtwinkelig schneidet. Irgend ein Punkt e dieser Curve liefert in seiner Verbindungslinie mit dem Momentancentrum P die Richtung der Druckkraft, welche die beiden Zähne aufeinander in demjenigen Augenblicke ausüben, in welchem sie in e zur Berührung kommen.

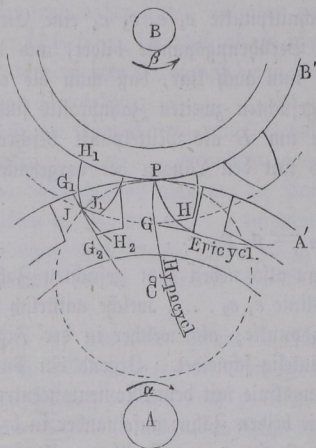
Das oben angegebene Verfahren findet in der Praxis nur selten Anwendung, und ist nur insofern von Interesse, als daraus ersichtlich ist, daß man zu jeder beliebigen Zahnform des einen Rades die zugehörige für das andere Rad finden kann; diese Methode wird sich hauptsächlich nur für solche Fälle eignen, wo aus irgend welchen Gründen von vornherein die Fläche des einen Zahns festgestellt ist.

Cycloidische Zahnformen. Dem in §. 67 entwickelten Bildungs- §. 69. gesetze richtiger Zahnformen entsprechend begrenzt man in der Praxis die Zähne von Stirnrädern durch solche Flächen, wie sie von einer Seite eines Cylinders bei dessen Abwälzung auf den Momentanaxenflächen der zusammenarbeitenden Räder erzeugt werden. Als wälzenden Cylinder wählt man hierbei stets einen solchen von kreisförmigem Querschnitte und es ist daher die Natur der erzeugten Zahnflächen aus den bekannten Eigenschaften der Rolllinien leicht ermittelt, welche ein Punkt eines Kreises bei seiner Rollung auf anderen Kreisen erzeugt.

Sind A und B , Fig. 237 (a. f. S.), zwei parallele Axen, und ist P der Berührungspunkt der Theilkreise A' und B' , d. h. der senkrechten Durchschnitte der Momentanaxenflächen, und man wälzt einen durch P gehenden Kreis, dessen Mittelpunkt C auf der Centrale AB liegt, auf B' äußerlich und auf A' innerlich ab, so erzeugt ein Punkt J dieses Kreises bekanntlich

durch die Wälzung auf B' die Epicycloide $H_1 J H_2$ und durch Wälzung in A' die Hypocycloide $G_1 J G_2$, welche beide Curven sich in J berühren,

Fig. 237.



und daselbst eine durch P gehende gemeinschaftliche Normale haben. Wenn man daher die Zähne der beiden Räder durch Cylinderflächen begrenzt, deren Seiten den Arcen parallel und deren Grundlinien diese beiden Cycloiden $G_1 G_2$ und $H_1 H_2$ sind, so erhält man richtige Zahnformen.

Denkt man sich etwa, das Rad A sei das treibende, und drehe sich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit α in der Richtung des Pfeils rechtsrum, so wird die mit diesem Rade verbundene Zahnfläche $G_1 G_2$ in J gegen die Zahnfläche $H_1 H_2$ des Rades B wirken, und demselben eine Drehung mit der gleichmäßigen Ge-

schwindigkeit $\beta = -\alpha \frac{AP}{BP}$ im Sinne seines Pfeils (linksrum) ertheilen.

Hierbei wird der Berührungspunkt J der beiden cycloidischen Zahndurchschnitte seinen Ort verändern, und allmählig nach dem Berührungspunkte P der beiden Theilkreise gelangen, denn wenn die beiden Theilkreise sich um die gleichgroßen Bogenlängen $G_1 P = H_1 P$ gedreht haben, so fällt der Anfangspunkt G_1 der Hypocycloide $G_1 G_2$ mit dem Anfangspunkte H_1 der Epicycloide $H_1 H_2$ in P zusammen, in welchem Augenblicke die Centrale AB die gemeinsame Tangente beider Curven in P ist. Aus der Entstehungsart der beiden cycloidischen Curven $G_1 G_2$ und $H_1 H_2$ ergibt sich übrigens leicht, daß der Berührungspunkt derselben bei seinem Vorwärtsschreiten von J nach P stets auf dem Umfange des Kreises C verbleiben muß, denn durch jeden Punkt J_1 dieses Kreises kann man sich zwei mit jenen ersteren identische Cycloiden gezeichnet denken, die in J_1 sich berühren, und deren Anfangspunkte auf den Theilkreisen um gleiche Bogenlängen von P aus abstehen. Der Kreis C zwischen J und P ist daher die Eingriffslinie oder der geometrische Ort für den Berührungspunkt der Curven, während sich die Theilkreise um die gleichen vor der Centrale gelegenen Bögen $G_1 P$ und $H_1 P$ herumdrehen. Wenn der Berührungspunkt der beiden Zahndurchschnitte in die Centrale nach P gerückt ist, die Zahncurven daher die Stellungen PG und PH eingenommen haben, so würden bei einer ferneren gleichmäßigen Drehung diese Curven

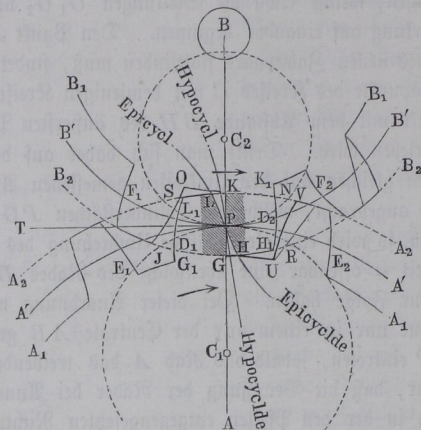
nicht weiter aufeinander einwirken können, und man hätte daher die Anordnung so zu treffen, daß in dem Augenblicke, in welchem zwei Zähne nach PG und PH gelangt sind, wo sie sich von einander trennen, bereits zwei folgende Zahnflächen, welche etwa die Stellungen $G_1 G_2$ und $H_1 H_2$ einnehmen, ihre Wirkung auf einander beginnen. Den Punkt J , in welchem dieser Angriff eines neuen Zahnpaars stattfinden muß, findet man leicht in dem Durchschnittspunkte des Kreises C mit demjenigen Kreise, welcher um B als Mittelpunkt mit dem Abstände BH des äußersten Punktes H der Zahnfläche beschrieben wird. Denkt man sich daher auf den Theilkreisen A' und B' in den gleichen auf den Umkreisen gemessenen Abständen PG_1 und PH_1 Zähne angebracht, welche die Cylinderflächen PG und PH zur Begrenzung haben, so wird eine gleichmäßige Umdrehung des Rades A mit der Geschwindigkeit α offenbar eine ebensolche des Rades B mit der Geschwindigkeit β zur Folge haben. Bei dieser Anordnung wird eine Einwirkung der Zähne nur in einem vor der Centrale AB gelegenen Bogen $G_1 P$ resp. $H_1 P$ eintreten, sobald das Rad A das treibende ist. Es ist aber ebenfalls klar, daß die Bewegung der Räder bei Annahme derselben Zahnflächen auch in der den Pfeilen entgegengesetzten Richtung stattfinden kann, vorausgesetzt, daß der Antrieb von dem Rade B ausgeht, und der Unterschied wird darin liegen, daß der Zahn PH dann zuerst in P auf den Zahn PG wirkt, und daß der Berührungspunkt der Zahndurchschnitte allmählig von P nach J wandert, wobei er immer auf dem Kreise durch C verbleibt. Die Berührung der Zähne findet daher dann nur hinter der Centrale AB statt, d. h. nachdem die Zahnflächen den Berührungspunkt P der Theilkreise durchschritten haben. Der dieser Einwirkung zweier Zähne zugehörige auf den Theilkreisen gemessene Bogen heiße der Eingriffsbogen und der ihm zugehörige Mittelpunktswinkel eines Rades der Eingriffswinkel des letzteren.

Allgemeine Cycloidenverzahnung. Zwischen den beiden Rädern §. 70. A und B existirt jetzt insofern ein Unterschied, als das eine B mit regelmäßigen nach PH geformten Hervorragungen über die Momentanaxenfläche versehen ist, während das andere Rad A entsprechende durch PG begrenzte Einschnitte zeigt, in welche jene Hervorragungen eintreten können. Es liegt nun auf der Hand, daß man ebenso gut auch dem Rade A Hervorragungen außerhalb des Theilkreises und dem Rade B dementprechende Einschnitte nach dem Innern des Theilkreises wird geben können, wie dies aus der nachfolgenden Construction sich ergibt.

Wälzt man auf den beiden Theilkreisen $A'A'$ und $B'B'$ der Axen A und B , Fig. 238 (a. f. S.), einen beliebigen Kreis C_1 äußerlich auf $B'B'$ und innerlich auf $A'A'$, so erhält man nach dem Vorstehenden in der Bewegung eines Punktes etwa P des wälzenden Kreises die Epicycloide PII

als Begrenzung für die Hervorragungen des Rades B und die Hypocycloide PG als Begrenzung der Einschnitte des Rades A . Wälzt man dann

Fig. 238.



in gleicher Weise einen beliebigen anderen Kreis C_2 äußerlich auf $A'A'$ und innerlich auf $B'B'$, so muß man in derselben Art in der Epicycloide PL die Begrenzung von Hervorragungen für das Rad A erhalten, zu welchen die erforderlichen Einschnitte in B durch die Hypocycloide PK in ihrer Form bestimmt sind. Wiederholt man nun die Zeichnung dieser Curven in regelmäßig auf einander folgenden Punkten $F_1 F_2 \dots$ sowie $E_1 E_2 \dots$ der Theilkreise, so zwar, daß die gestreckten Bögen $PE_1, PE_2 \dots$ unter sich sowie mit den gestreckten Bögen $PF_1, PF_2 \dots$ gleich lang sind, und begrenzt diese Curven durch die zu A und B concentrischen Kreise A_1, A_2, B_1 und B_2 , so erhält man die Durchschnitte zugehöriger Zahnflächen für die Räder. Dabei wäre die Form gleichgültig, wonach man die Rückflächen $L_1 D_1 G_1$ und $H_1 D_2 K_1$ begrenzt, vorausgesetzt nur, daß sie nicht die folgenden Zahnflächen in ihrer Wirkung behindern, und könnte beispielsweise eine eben begrenzte sein wie bei den Zähnen E_2 und F_2 angedeutet ist, wenn bei der vorausgesetzten Drehungsrichtung von A und B der Antrieb immer von A , oder wenn bei der den Pfeilen entgegengesetzten Drehungsrichtung der Antrieb von B ausginge. Damit aber für jede der beiden Drehungsrichtungen beliebig A sowohl wie B das treibende Rad sein könne, ist eine symmetrische Form der Zähne allgemein in Gebrauch, derart nämlich, daß man, wenn DP_1 und PD_2 die Dicken der Zähne, in den Theilkreisen gemessen, vorstellen, in D_1 und D_2 die Begrenzungen der Zahnquerschnitte durch Curven bewirkt, welche mit den durch P gehenden in Hinsicht auf den durch die

Zahnmitte gelegten Radius symmetrisch sind, d. h. also hier durch dieselben Cycloiden, aber von dem entgegengesetzten Sinne der Wälzung.

Aus dem Vorstehenden folgt zunächst, daß jeder der so gebildeten Zähne wie $LG G_1 L_1$ und $HK K_1 H_1$ ungezwungen als aus zwei Theilen bestehend erscheint, welche durch die Momentanagrenzflächen oder Theilkreiscylinder von einander getrennt sind. Die über die Theilkreise (bei äußerer Verzahnung) hinausragenden Vorsprünge wie $PLL_1 D_1$ und $PHH_1 D_2$ heißen Zahnkronen oder Köpfe, die nach innen gelegenen Theile, wie $PG G_1 D_1$ und $PK K_1 D_2$ Zahnwurzeln oder Füße, die seitlichen Begrenzungsflächen der letzteren, also PG , $D_1 G_1$, PK und $D_2 K_1$, nennt man auch Zahnflanken; der Zwischenraum zwischen zwei Zähnen, wie $LG UV$, heißt Zahnlücke. Die inneren Begrenzungskreise der Zahnwurzeln, also die Kreise $A_1 A_1$ und $B_1 B_1$, pflegt man Fußkreise, die äußeren Begrenzungen $A_2 A_2$ und $B_2 B_2$ der Zahnkronen auch wohl Kopfkreise zu nennen. Die radiale Ausdehnung eines Zahns, also der Abstand seines Fußkreises von seinem Kopfkreise, heißt Zahnhöhe oder auch Zahnlänge, während man unter seiner Breite die den Azen parallel gemessene Dimension versteht. Spricht man schlechtweg von der Dicke des Zahns, so pflegt man dieselbe in der Regel in den Theilkreisen gemessen zu verstehen, also die Bogenlänge PD_1 resp. PD_2 , wofür man meist mit genügender Annäherung anstatt der Bögen auch die Sehnen setzen kann. Unter der Zahntheilung oder schlechtweg Theilung endlich versteht man den auf dem Theilkreise gemessenen Bogen zwischen zwei gleichgestellten Zahnflächen, also die Bögen PE_1 , PF_1 , PE_2 , PF_2 . . . Wie aus dem Obigen hervorgeht, sind diese Bögen bei zwei miteinander arbeitenden Rädern sämmtlich einander gleich, während es sonst nicht zwei andere sich berührende Kreise in den Rädern giebt, in denen die Zahnabstände bei dem einen Rade so groß sein können wie bei dem anderen. Es hängt dies offenbar mit dem früher über die Azoide Gesagten zusammen, wonach lediglich in diesen, also in den Theilkreiscylindern die Geschwindigkeit beider Räder gleich groß ist. Wenn auch die Theilkreise bei ausgeführten Rädern nicht als materielle Ausführungen ins Auge fallen, so sind sie doch für den ganzen Bewegungszustand von durchgreifender Bedeutung, und keineswegs als etwas Willkürliches zu betrachten.

Der erzeugende Kreis C_1 ist nach dem Obigen die Eingriffslinie oder der geometrische Ort für den Berührungspunkt zweier Zahnquerschnitte und man erhält daher in dem Durchschnittspunkte J dieses Kreises mit dem Kopfkreise B_2 des Rades B den Anfangspunkt, in welchem zuerst eine Zahnkrone von B von einer Zahnflanke des Rades A ergriffen wird. Nachdem dann die Räder sich soweit gedreht haben, daß die beiden Zahncurven sich in der Centrale, also in P berühren, hört bei weiterer Bewegung die Einwirkung

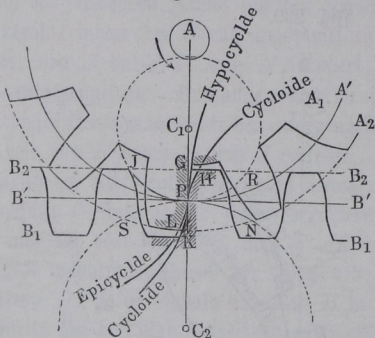
dieser Zähne noch nicht auf, wie es in dem Falle der Figur 237 der Fall war, wo die Zähne von A nur Füße, die von B nur Köpfe hatten, sondern es wird jetzt die Zahnkrone PL von A noch weiter auf die Zahnflanke PK von B einwirken, und letzteres Rad dadurch so lange weitergedreht werden, bis der Zahn von A den Zahn von B in N verläßt. Dieser Punkt N wird in dem Durchschnitte des zweiten erzeugenden Kreises C_2 mit dem Kopfkreise A_2 des Rades A gefunden, denn es leuchtet ein, daß für diese letztgedachte Wirkung von PL auf PK der erzeugende Kreis C_2 die Eingriffslinie ist. Durch die hier gewählte Construction, wonach man den Zähnen jedes Rades sowohl Köpfe als Füße giebt, erreicht man daher eine Wirkung des treibenden Zahns auf den getriebenen, sowohl vor als hinter der Centrale, indem der Berührungspunkt in dem vorliegenden Falle, wo A treibt, von J durch P nach N wandert, während unter der Voraussetzung entgegengesetzter Drehungen und wenn von B der Antrieb auf A erfolgt, dieser Berührungspunkt den entgegengesetzten Weg auf den Erzeugungskreisen also von N durch P nach J verfolgt. Es ist auch klar, daß, wenn der Antrieb bei dieser entgegengesetzten Bewegung von A ausgeht, wegen der symmetrischen Gestaltung der Zähne der Berührungspunkt der Zahncurven von R aus auf dem Kreise C_1 nach P und von da weiter auf dem Kreise C_2 nach S wandert, während der Weg des Berührungspunktes der entgegengesetzte SPR ist, sobald das Rad B in der Richtung des eingezeichneten Pfeils auf das Rad A treibend wirkt. Wenn daher in einer beliebigen Stellung der Zähne deren Querschnitte sich in irgend einem Punkte dieser Doppelbögen JPN beziehungsweise RPS berühren, so findet man die augenblickliche Richtung des Druckes zwischen den Zähnen nothwendig in der von diesem Punkte aus nach dem Berührungspunkte P der Theilkreise gezogenen Geraden.

Man erkennt hieraus, daß, während diese Druckrichtung nur in einem einzigen Augenblicke, nämlich bei der Berührung in der Centrale zu dieser normal steht, dieselbe im Allgemeinen bis zu den Richtungen JP und PN resp. RP und PS von der normalen Richtung TP abweicht. Diese Abweichungen sind offenbar um so größer, je weiter die Punkte J , N , S und R von P abgelegen sind, oder je weiter die Zahnkronen über die Theilkreise hinwegragen. Man erkennt daher, daß es jedenfalls vortheilhafter ist, die hier angegebene Construction zu wählen, wonach jedes Rad sowohl Zahnköpfe als Zahnfüße erhält, als wenn man nach Fig. 237 dem einen Rade nur Kronen, dem anderen nur Wurzeln geben wollte, da in diesem letzteren Falle die Abweichung der Druckrichtung von der Normale TP größer ausfällt. Die Abweichung bringt nämlich schädliche Reibungen der Axen hervor und wächst mit ihr, wie aus dem Späteren hervorgehen wird, auch die Friction zwischen den Zähnen.

die Pfeile ange deuteten Drehungsrichtung der Antrieb von A ausgeht. Ist bei derselben Drehungsrichtung das größere Rad B das treibende, so findet die Berührung zweier Zahnquerschnitte in der Eingriffslinie SPR statt.

Zwischen den beiden Fällen des äußeren und inneren Zahneingriffs bildet derjenige gewissermaßen einen Uebergang, bei welchem das eine Rad einen unendlich großen Halbmesser annimmt und dadurch in eine gerade Zahnstange übergeht. Auch hierfür ergeben sich die für die Zahnquerschnitte zu wählenden Curven ganz von selbst aus dem allgemeinen Gesetze, und es gehen hier die Begrenzungslinien PH und PK , Fig. 240, für die Köpfe und Füße der

Fig. 240.



kreis und des Kopfkreis, daher als Eingriffslinie die Doppelbogen JPN resp. SPR anzusehen sind, je nachdem bei dem durch den Pfeil ange deuteten Bewegungs sinne der Antrieb entweder von dem Rade A oder von der Zahnstange B ausgeht.

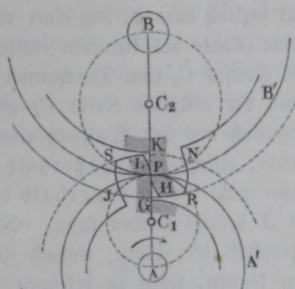
Zahnstange in die gemeinen Cycloiden der Kreise C_1 und C_2 über, während die Zahn curven der Zähne des Rades A eine Abweichung nicht zeigen. Als Theilkreis ist bei der Zahnstange offenbar die Gerade $B'B'$ anzusehen, und ebenso vertreten die Geraden B_1B_1 und B_2B_2 die Stelle des Fuß-

- §. 71. **Geradflankenverzahnung.** Die vorstehenden Entwicklungen sind hinsichtlich der Größe der erzeugenden Kreise zunächst an keine Bedingung geknüpft, es bleiben daher die betrachteten cycloidischen Curven richtige Zahnquerschnitte, wie groß man die erzeugenden Kreise auch annehmen möge. Unter gewissen Annahmen in Bezug auf diese erzeugenden Kreise ergeben sich nun gewisse specielle Zahnformen, welche wegen ihrer Bedeutung für die Praxis hier näher angeführt werden mögen. Da eine Hypocycloide bekanntlich in eine gerade Linie und zwar in einen Durchmesser des Grundkreises übergeht, sobald der Durchmesser des wälzenden Kreises halb so groß ist als derjenige des Grundkreises, so ist hierdurch ein Mittel geboten, richtige Zahnformen mit einer theilweise ebenen Begrenzung zu bilden.

Nimmt man nämlich den Halbmesser AP , Fig. 241, des Theilkreises von A zum Durchmesser des erzeugenden Kreises, so erhält die Flanke des

Zahns von A eine ebene Begrenzung, deren Durchschnitt in die radiale Richtung PG fällt, und in gleicher Weise hat die Flanke des Zahns von B einen radialen Durchschnitt PK ,

Fig. 241.



sobald man einen erzeugenden Kreis C_2 voraussetzt, welcher den Halbmesser BP des anderen Theilkreises zum Durchmesser hat. Die Zahnkronen erhalten natürlich die betreffenden Epicycloiden von C_1 auf B' und C_2 auf A' zu Durchschnitten. Diese Geradzahnverzahnung kam namentlich in früherer Zeit bei hölzernen Rädern in Mühlen u. vielfach zur Anwendung und man

findet daher in entsprechenden Lehrbüchern wohl die Regel so angegeben, daß man überhaupt bei Rädern die Füße der Zähne radial und die Köpfe durch diejenigen Epicycloiden begrenzen solle, welche auf jedem Theilkreise durch einen Rollkreis erzeugt werden, der den Halbmesser des anderen Theilkreises zum Durchmesser hat.

Auch bei innerer Verzahnung, Fig. 242, kann man dem kleineren Rade A stets einen geraden radialen Flankendurchschnitt PG geben, in welchem

Fig. 242.

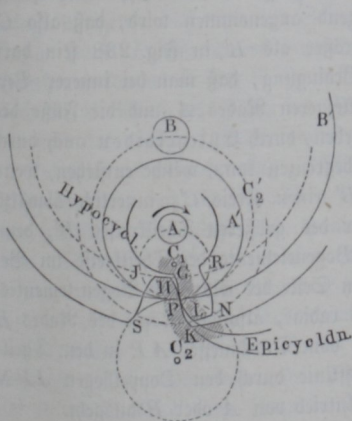
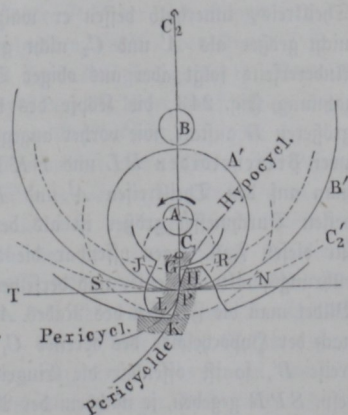


Fig. 243.



Fälle der Zahnkopf des größeren Rades nach der Hypocycloide des in dem Theilkreise B' rollenden Kreises C_1 zu bilden ist, dessen Durchmesser gleich dem Halbmesser AP ist. Die Köpfe von A und die Füße von B kann man durch die Epicycloiden eines beliebigen Rollkreises C_2 auf

den Theilkreisen begrenzen. Man kann indessen andererseits die Köpfe des größeren Rades B durch radial gerichtete Ebenen nur dann begrenzen, wenn der Durchmesser des kleineren Rades A den Halbmesser des größeren übertrifft. Dies folgt sogleich daraus, daß einer radial gerichteten Krone des größeren Rades eine Flanke des kleineren entspricht, welche man durch innere Abwälzung des Kreises C_2 vom Durchmesser BP in dem Theilkreise A' erhält. Wenn nun der wälzende Kreis C_2 größer als der Grundkreis A' ist, so geht bekanntlich aus der Wälzung eine sogenannte Pericycloide hervor, eine Curve, welche ganz außerhalb des Theilkreises A' gelegen ist, und welche daher nicht für die innerhalb dieses Theilkreises anzuordnenden Zahnfüße von A benutzt werden kann. Es ist überhaupt aus der oben angegebenen Eigenschaft der Zähne, wonach Zahnköpfe nur mit Zahnfüßen zusammenwirken können, leicht zu erkennen, daß das allgemeine Bildungsgesetz der Zahncurven durch Wälzung nur so lange Gültigkeit haben kann, als die beiden Theilkreise im Berührungspunkte auf derselben Seite des wälzenden Kreises liegen, dagegen nicht, wenn der rollende Kreisumfang zwischen den Theilkreisen liegt, wie dies in Fig. 242 mit C'_2 der Fall ist, dessen Umfang zwischen A' und B' gelegen ist.

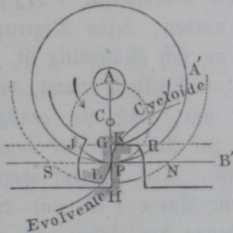
Hieraus folgt ferner, daß auch bei äußerer Verzahnung, Fig. 238, die beiden Erzeugungskreise C_1 und C_2 , wenn deren Durchmesser auch sonst willkürlich gewählt werden können, doch insofern zwischen bestimmte Grenzen eingeschlossen sind, als keiner dieser Kreise größer werden darf, als derjenige Theilkreis, innerhalb dessen er wälzend angenommen wird, daß also C_1 nicht größer als A' und C_2 nicht größer als B' in Fig. 238 sein darf. Andererseits folgt aber aus obiger Bedingung, daß man bei innerer Verzahnung, Fig. 243, die Köpfe des kleineren Rades A und die Füße des größeren B anstatt, wie vorher angegeben, durch Epicycloiden auch durch zwei Pericycloiden PL und PK begrenzen kann, welche entstehen, wenn man auf den Theilkreisen A' und B' einen Kreis C'_2 innerlich abwälzt, dessen Durchmesser größer ist als der des größeren Theilkreises B' , denn für diesen Fall liegen offenbar die Bogenelemente der Theilkreise im Berührungspunkte auf einer und derselben Seite des wälzenden Bogenelementes. Bildet man die Flanken des Rades A radial, also die Köpfe des Rades B nach der Hypocycloide des Kreises C_1 vom Durchmesser AP in dem Theilkreise B' , so ist offenbar die Eingriffslinie durch den Doppelbogen JPN resp. SPR gegeben, je nachdem der Antrieb von A oder B ausgeht.

Denkt man sich den Kreis C'_2 größer und größer und zuletzt unendlich groß werdend, so geht die Kreislinie C'_2 schließlich in eine gerade Linie, nämlich die gemeinsame Tangente TP , über, und für die Zahnquerschnitte PL und PK erhält man jetzt die beiden Evolventen der Theilkreise. Der Berührungspunkt dieser Curven rückt dann auf dieser Geraden von P

aus nach der einen oder anderen Seite fort, während welcher Zeit also die Druckrichtung der beiden Zähne stets normal zur Centrale AB , also sehr günstig wirkt, indem ein in die Centrale fallender Seitendruck auf die Arzen hierbei nicht eintritt. Es ist ohne Weiteres klar, daß in diesem Falle die Kreisevolventen gewissermaßen den Uebergang bilden zwischen den Epicycloiden, Fig. 242, und den Pericycloiden, Fig. 243 (a. S. 345).

Wendet man auch bei der Zahnstange, Fig. 244, die Geradflankenverzahnung an, so gehören zu den radialen Füßen PG des Getriebes A

Fig. 244.



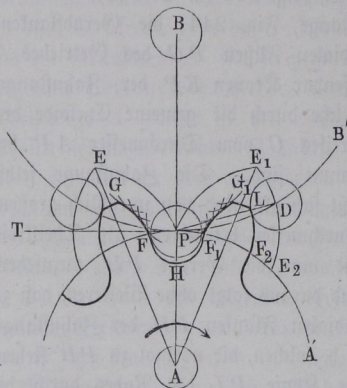
offenbar Kronen KP der Zahnstange, welche durch die gemeine Cycloide des Kreises C vom Durchmesser AP bestimmt sind. Die Zahnstange selbst läßt sich als Rad von unendlich großem Durchmesser betrachten, als Theilkreis hat man die Gerade PB' anzusehen, und daraus folgt ohne Weiteres, daß zu radialen Flanken PH der Zahnstange, d. h. solchen, die normal zu PB' stehen, die Köpfe PL des Rades durch die

Kreisevolvente von A' bestimmt sind. Die Eingriffslinie ist durch JPN resp. SPR gegeben, je nachdem das Rad oder die Zahnstange den treibenden Theil bildet. Die tangential Lage des Stückes PN dieser Eingriffslinie besagt übrigens, daß von der Zahnflanke PH der Zahnstange nur der einzige Punkt P mit den aufeinanderfolgenden Punkten der Krone PL in Berührung kommt, so daß übrigens die Form PH gleichgültig ist. Natürlich wird der Verschleiß der Zähne der Zahnstange bei dieser Construction wegen des stets auf denselben Punkt concentrirten Druckes sehr groß sein.

Triebstockverzahnung. Giebt man bei zwei Rädern mit äußerer §. 72. Verzahnung A und B , Fig. 245 (a. f. S.), dem Erzeugungskreise C_2 den größten zulässigen Durchmesser, d. h. nimmt man ihn von gleicher Größe mit dem Theilkreise B' , so reducirt sich die von einem seiner Punkte P erzeugte Curve auf diesen Punkt P selbst, während die Krone der Radzähne von A offenbar diejenige Epicycloide PE oder PE_1 zum Durchschnitte erhält, welche ein Punkt des Kreises C_2 oder B' bei dessen Rollen auf A' erzeugt. Diese Epicycloide würde daher anzuwenden sein, wenn das Rad B an der Stelle P einen Zahn von unendlich geringer Dicke hätte. In der Praxis construirt man nun zuweilen Räder, welche anstatt mit Zähnen mit sogenannten Triebstöcken versehen sind, d. h. mit cylindrischen Stäben von kreisförmigem Durchschnitte wie PF und nennt solche Räder auch Drehlinge (Drillings). Die zu diesen Triebstöcken erforderliche Form für die Zähne des zugehörigen Rades A erhält man dann sehr einfach aus der

betrachteten Epicycloide PE , wenn man die zu dieser Linie äquidistante Curve FG aussucht, welche von PE überall einen normalen Abstand PF gleich dem Halbmesser des Triebstockes hat. Man findet daher den Querschnitt des Zahns in der Umhüllungscurve FG resp. $F_1 G_1$ einer Anzahl

Fig. 245.



von Kreisbögen, die man mit dem Halbmesser des Triebstockes von verschiedenen Punkten der Epicycloide PE aus beschreibt. Innerhalb des Theilkreises muß das Rad A natürlich mit Einschnitten FHF_1 versehen werden, deren Begrenzungsfläche an sich gleichgültig ist, da sie nicht zur Wirkung kommt, vorausgesetzt nur, daß sie genügenden Raum zur Aufnahme der Triebstöcke darbieten. Daß die auf obige Art erhaltene Curve FG eine richtige Begrenzung der Zähne von A ergibt, ist leicht ersichtlich. Wäre nämlich der Triebstock unendlich dünn, also nur eine gerade Linie, so wäre

die Epicycloide PE die zugehörige Zahncurve, und es würde daher in irgend welcher Lage des Triebstockes, z. B. in D , die Gerade PD auf dieser durch D gehenden Epicycloide $E_1 DE_2$ normal stehen, folglich steht diese Gerade PD auch auf der mit der Epicycloiden parallelen Curve LF_2 normal, d. h. es ist der Grundbedingung einer gleichmäßigen Bewegungsübertragung genügt. Der Beginn der Einwirkung des Zahnes EP auf den unendlich dünnen Stift P findet offenbar statt, wenn dieser Stift in die Centrale tritt, und es wird daher der Beginn der Einwirkung der mit der Epicycloide parallelen Curve FG auf den Stift vom Halbmesser PF in demselben Augenblicke stattfinden und zwar in einem Punkte F , welcher sich findet, wenn man auf der Normalen zur Epicycloide in P , d. h. auf der Tangente PT den Halbmesser des Triebstockes PF abträgt. Zu einer ununterbrochenen Bewegungsübertragung ist nun erforderlich, daß der vorhergehende Zahn $F_1 G_1 LF_2$ den vorhergehenden Triebstock D so lange antreibt, bis FG mit P in F zur Berührung kommt. Daher bestimmt sich die erforderliche Höhe der Zähne des Rades A dadurch, daß man, wenn PD die Entfernung zweier Triebstöcke ist, den Durchschnitt L dieser Geraden PD mit der Zahncurve LF_2 als äußersten Punkt der Zähne annimmt, diese Zähne daher mindestens bis zu dem durch L gelegten um den Mittelpunkt A beschriebenen Kreise ausbildet.

Für innere Verzahnung ergeben sich die Formen der Zähne bei Anwendung von Triebstöcken in ganz gleicher Weise wie für äußeren Zahneingriff. Wenn dabei das kleine Rad *A*, Fig. 246, die Triebstöcke erhält, so sind die Zähne

Fig. 246.

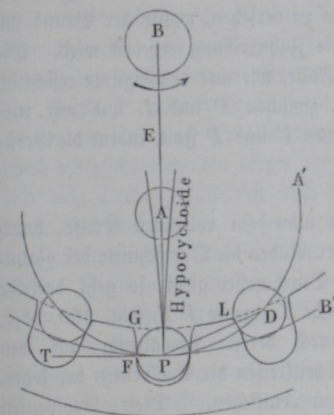
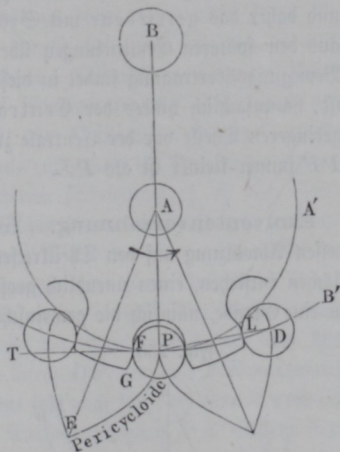


Fig. 247.



des Rades nach der Curve *FG* zu bilden, welche eine Aequidistante zur Hypocycloide des Theilkreises *A'* in *B'* ist, während bei der Anordnung der Triebstöcke auf dem größeren Rade *B*, Fig. 247, die Aequidistante *FG* zur Pericycloide des Theilkreises *B'* um *A'* die Zahnform bestimmt.

Steht eine Zahnstange *B* mit einem Stoßgetriebe *A*, Fig. 248, in Verbindung, so ist die Zahnform durch die zur Cycloide *PE* des Theilkreises

Fig. 248.

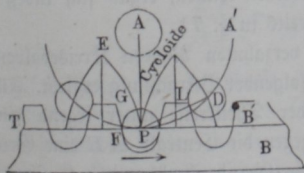
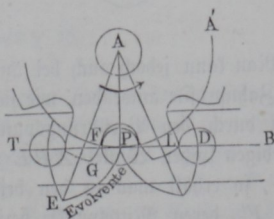


Fig. 249.

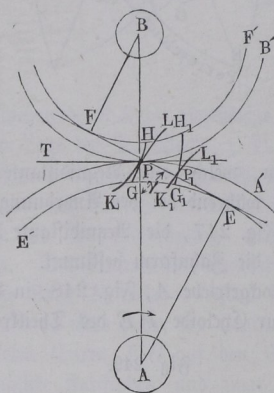


A' parallele Curve *FG* gegeben, während in dem Falle Fig. 249, wo die Triebstöcke in der Zahnstange befindlich sind, die Begrenzung der Zähne

durch eine Curve FG erhalten wird, welche mit der Evolvente PE des Theilkreises A' parallel ist. In sämtlichen durch die Figuren 245 bis 249 dargestellten Fällen giebt die Gerade PD in ihrem Durchschnitte L mit der Zahncurve diejenige Höhe, welche den Zähnen mindestens zu geben ist. In der Praxis pflegt man in der Regel das treibende Rad mit Zähnen und daher das getriebene mit Stöcken zu versehen, wofür der Grund sich aus den späteren Ermittlungen über die Zahnreibung ergeben wird. Die Bewegungsübertragung findet in diesem Falle, wie aus den Figuren ersichtlich ist, hauptsächlich hinter der Centrale, zwischen P und L und nur zum geringeren Theile vor der Centrale zwischen F und P statt, indem die Größe PF immer kleiner ist als PL .

§. 73. **Evolventenverzahnung.** Wenn man dem rollenden Kreise, durch dessen Abwälzung auf den Theilkreisen der Räder die Querschnitte der Zahnflächen entstehen, einen unendlich großen Durchmesser giebt, so geht derselbe in eine Gerade, nämlich die gemeinschaftliche Tangente PT , Fig. 250, über,

Fig. 250.



durch deren Abwälzung auf den Theilkreisen die Evolventen der letzteren entstehen. Diese Evolventen können als Zahnprofile, bei äußerem Eingriffe wenigstens, nicht benutzt werden, da sie ganz außerhalb der Theilkreise gelegen sind, daher nur zur Bildung von Zahnköpfen Gelegenheit geben würden, welche mit einander nicht arbeiten können. Daß bei innerem Radeingriffe die Evolventen der Theilkreise zur Bildung der Köpfe des kleineren und der Füße des größeren Rades angewandt werden können, ergab sich indeß bereits in §. 71.

Man kann jedoch auch bei äußerlich verzahnten Rädern Kreisevolventen als Zahnprofile anwenden, wie sich aus folgender Betrachtung ergibt. Führt man durch den Berührungspunkt P der Theilkreise unter irgend einem beliebigen spitzen Winkel $APE = \gamma$ gegen die Centrale AB eine Gerade EF , so erhält man in den beiden diese Gerade berührenden Kreisen E' und F' , deren Mittelpunkte beziehungsweise A und B sind, zwei Kreise, deren Evolventen ebenfalls richtige Zahndurchschnitte sind. Wickelt man nämlich die Gerade EF auf diesen Kreisen ab, so erzeugt der Punkt P derselben die Evolvente GPK von E' und diejenige HPK von F' , welche

beiden Curven sich in dem Momentancentrum P berühren. Es läßt sich nun leicht zeigen, daß bei einer beliebigen Drehung der Axen A und B , im Verhältnisse ihrer Winkelgeschwindigkeiten α und β , diese mit den Rädern fest verbunden gedachten Curven sich nur in einem Punkte der im Raume festen Geraden EF berühren können, und daß diese durch das Momentancentrum P gehende Gerade die Normale zu diesen Curven in deren Berührungspunkte sein muß. Zu diesem Zwecke hat man sich nur die Entstehung der Evolventen zu vergegenwärtigen. Offenbar entsteht das kleine, den Punkt P enthaltende Element des Evolventenbogens PG durch eine momentane Drehung der Geraden EP um E in einem Betrage, welcher durch α bezeichnet werden möge, nach links (umgekehrt der Uhrzeigerbewegung). Für diese Drehung läßt sich nach Früherem (Einleitung, §. 4) eine ebenso große Linksdrehung um A setzen, wenn man damit eine auf AE senkrechte Verschiebung in der Richtung von P nach E und im Betrage $\alpha \cdot AE$ verbindet. Stellt man sich nun vor, dem ganzen betrachteten Systeme, d. h. dem Rade A und der Geraden PE , werde noch eine zusätzliche Rechtsdrehung um A im Betrage α ertheilt, so verbleibt der Geraden PE nur eine Verschiebung von P etwa nach P_1 , welche durch $PP_1 = \alpha \cdot AE$ ausgedrückt ist. Eine ganz ähnliche Betrachtung läßt sich auch für das Rad B anstellen, denn das in P gelegene Element des Evolventenbogens PK entsteht durch eine Rechtsdrehung von FP um F in einem kleinen Betrage, der durch β bezeichnet werde. Für diese Drehung läßt sich wieder eine ebenso große Rechtsdrehung um B setzen, verbunden mit einer Verschiebung in der Richtung von P nach E im Betrage $\beta \cdot BF$. Denkt man jetzt wieder dem Systeme eine zusätzliche Linksdrehung β um die Axe B ertheilt, so verbleibt der Geraden FP , also dem Punkte P , nur noch diese Verschiebung $\beta \cdot BF$. Wenn nun α und β so gewählt werden, wie die geforderte Bewegung erheischt, d. h. wenn $\alpha : \beta = BP : AP$ oder wenn $\alpha \cdot AP = \beta \cdot BP$ ist, so folgt daraus auch ohne Weiteres die Gleichheit der beiden Verschiebungen $\alpha \cdot AE$ und $\beta \cdot BF$, weil

$$\frac{AE}{AP} = \frac{BF}{BP} = \sin \gamma \text{ ist.}$$

Es folgt hieraus, daß der Punkt P der Geraden EF in beiden Fällen um die gleiche Größe $PP_1 = \alpha \cdot AE = \beta \cdot BF$ sich auf FE verschiebt, sobald die beiden Räder um α und $-\beta$ gedreht werden, d. h. um Winkel, welche dem Bewegungsverhältnisse entsprechen, und da die beiden in P_1 enthaltenen Elemente der Evolventenbögen $G_1P_1L_1$ und $H_1P_1K_1$ in P_1 in der Geraden FE eine gemeinsame Normale haben, welche durch das Momentancentrum P geht, so folgt die Richtigkeit der Evolventen als Zahnprofile aus dem §. 67 entwickelten Grundgesetze der Verzahnung.

Aus dem Vorstehenden erkennt man auch, daß die schräg gegen die Centrale AB gelegte Gerade FE den geometrischen Ort für die Berührung der beiden Zahncurven abgibt, daher die von dem einen Zahne auf den anderen übertragene Druckkraft fortwährend die constante Richtung FE beibehält. Da bei dieser Krafrichtung die in die Centrale AB fallende Componente bei rechtwinkliger Zerlegung um so größer ausfällt, je spitzer der Winkel $AP E = \gamma$ ist, und diese Componente nur schädliche Pressungen in den Lagern der Axen A und B erzeugt, so wird man den Winkel γ nicht zu klein wählen dürfen und pflegt man mindestens einen Betrag zwischen 75 und 80° dafür anzunehmen.

Die Construction der Zähne ergibt sich nun leicht. Legt man bei Rädern mit äußerer Verzahnung, Fig. 251, durch den Berührungspunkt P der

Fig. 251.

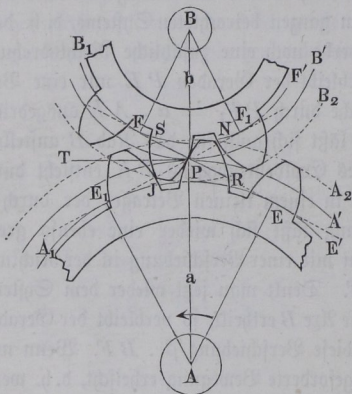
Theilkreise die Gerade EF unter dem angegebenen Winkel

$$\gamma = A P E = 75 \text{ bis } 80^\circ,$$

und wickelt dieselbe auf die beiden Berührungskreise E' und F' nach beiden Seiten hin auf, so ergeben die beiden entgegengesetzten Evoluten jedes Kreises die Profile für die Zahnflächen des zugehörigen Rades. Es wird daher jede Seite des Zahnprofils hierbei durch eine einzige stetig fortlaufende Curve begrenzt, während bei den in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten Verzahnungsmethoden besondere Curven für die Profile

der Kronen und Flanken sich ergaben. In den Durchschnittpunkten der Kopfkreise A_2 und B_2 mit den Eingriffslinien FE und $F_1 E_1$ erhält man diejenigen Stellen S, R, N und J , in welchen die Berührung der Zähne beginnt resp. aufhört, so daß bei der durch den Pfeil ange deuteten Drehungsrichtung der Berührungspunkt zweier Zähne von N nach J hin fortschreitet, wenn B das treibende Rad ist, dagegen derselbe den Weg von R nach S durchwandert, sobald der Antrieb von A erfolgt.

Offenbar gelten diese Bemerkungen auch für Räder mit innerem Eingriffe, Fig. 252, sowie für das Zahnstangengetriebe, Fig. 253. Die Zahnstange läßt sich wieder als ein Rad ansehen, dessen Mittelpunkt in der Unendlichkeit liegt, und daher geht für sie der die Gerade EF berührende Kreis in eine gerade Linie über, welche mit EF der ganzen Länge nach zusammenfällt. Durch



eine Abwälzung dieser Linie EF auf sich selbst beschreibt daher der Punkt P eine zu EF in P normale Gerade PH , wonach die Flächen der Zähne

Fig. 252.

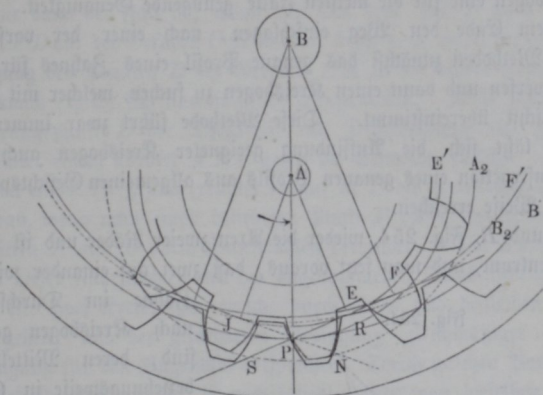
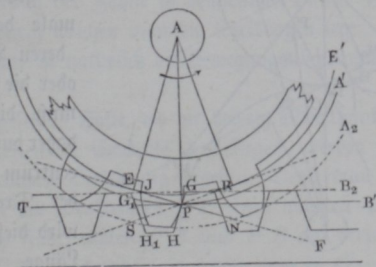


Fig. 253.



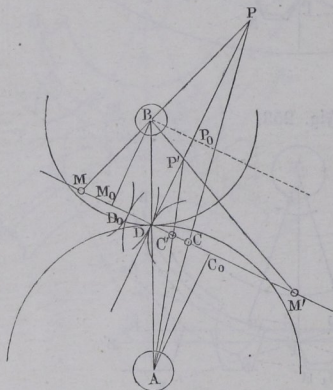
für die Zahnstange als Ebenen GH und G_1H_1 sich ergeben, welche gegen die Zahnstange B' unter dem Winkel γ beiderseits geneigt sind. Da der Berührungspunkt zweier Zähne hierbei von J nach N beziehungsweise von R nach S fortschreitet, so erkennt man leicht, daß bei dieser Verzahnung der Druck eines Radzahnes sich allmählig auf eine größere Fläche vertheilt und nicht auf einen einzigen Punkt concentrirt, wie dies bei der Zahnstange, Fig. 244, der Fall ist, bei welcher nach §. 71 die Zahnköpfe des Rades ebenfalls durch Evolventen, aber diejenigen des Theilkreises profilirt sind.

Kreisbogenverzahnung. Da von den in den vorhergehenden Paragraphen §. 74. ermittelten Curven immer nur ein verhältnißmäßig geringer Theil

für die Profilirung der Zähne benutzt wird, so kann man in der Praxis diese Curven auch durch Kreisbogen ersetzen, welche jenen möglichst angenähert sind, und man erreicht bei passender Wahl der Mittelpunkte und Halbmesser dieser Kreisbogen eine für die meisten Fälle genügende Genauigkeit. Man kann zu dem Ende den Weg einschlagen, nach einer der vorstehend behandelten Methoden zunächst das genaue Profil eines Zahnes für jedes Rad zu entwerfen und dann einen Kreisbogen zu suchen, welcher mit diesem Profil möglichst übereinstimmt. Diese Methode führt zwar immer zum Ziele, doch läßt sich die Auffindung geeigneter Kreisbogen auch ohne zuvorige Construction eines genauen Profils aus allgemeinen Gesichtspunkten in folgender Weise erreichen.

Sind A und B , Fig. 254, wieder die Axen zweier Räder und ist D das Momentancentrum, und man setzt voraus, daß zwei auf einander wirkende

Fig. 254.



Zähne im Durchschnitte nach Kreisbogen geformt sind, deren Mittelpunkte beziehungsweise in C und M liegen, so ist die Verbindungslinie CM offenbar die gemeinschaftliche Normale der Zahnprofile in deren Berührungspunkte oder die Druckrichtung, und muß diese Gerade CM daher durch das Momentancentrum D gehen. Bei der Drehung der Räder wird diese gerade Linie ihre Länge, welche gleich der Summe der Halbmesser der beiden Kreisbogen ist, so

lange unverändert beibehalten, als diese Kreisbogen miteinander in Berührung bleiben. Die Bewegung der Geraden CM während dieser Zeit läßt sich nun nach dem in der Einleitung §. 7 Gesagten in jedem Augenblicke als eine kleine Drehung um den augenblicklichen Pol auffassen, welcher letztere bekanntlich im Durchschnittpunkte der Normalen liegt, die auf den Wegen zweier Punkte C und M errichtet werden. Da diese Normalen mit den Radien AC und BM übereinstimmen, so erhält man also in deren Durchschnittpunkte P den Pol oder augenblicklichen Drehpunkt für die Bewegung der Geraden CM .

Die Bewegungsübertragung mittelst der kreisförmig profilirten Zahnflächen

wird nun während einer kleinen Bewegung eine gleichförmige sein, wenn diese gemeinschaftliche Normale CM der Zahncurven während dieser Bewegung immer durch den Berührungspunkt D der Theilkreise hindurchgeht, was nur dann der Fall ist, wenn der von dem Pol P nach D gezogene Strahl PD auf der Geraden CM normal steht, d. h. wenn die augenblickliche Bewegung des Punktes D der Geraden CM in die letztere hineinfällt.

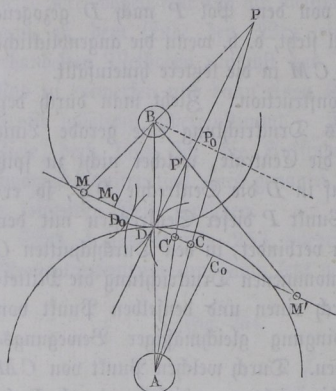
Hienach ergibt sich nun folgende Construction. Zieht man durch den Berührungspunkt D der Theilkreise als Druckrichtung eine gerade Linie MC unter einem Winkel ADC gegen die Centrale, welcher nicht zu spitz ist (etwa unter 75°), und errichtet darauf in D die Senkrechte DP , so erhält man, wenn man einen beliebigen Punkt P dieser Senkrechten mit den Radmitten A und B durch Fahrstrahlen verbindet, in den Durchschnitten C und M dieser Fahrstrahlen mit der angenommenen Druckrichtung die Mittelpunkte für zwei Kreisbogen, welche durch einen und denselben Punkt von CM gehen, und der geforderten Bedingung gleichmäßiger Bewegungsübertragung für den Augenblick entsprechen. Durch welchen Punkt von CM man diese Kreisbogen führt, ist noch beliebig; zieht man dieselben durch D , so wird die vollkommen gleichmäßige Bewegungsübertragung stattfinden, wenn die Zähne sich in der Centrale, also in D , berühren, wogegen andererseits dies für die Berührung der Zähne in demjenigen Punkte D_1 vor oder hinter der Centrale gilt, durch welchen man die Kreisbogen legt. Für alle übrigen Stellungen der Zähne ist natürlich die Bewegungsübertragung nur annähernd eine gleichmäßige.

In dem vorausgesetzten Falle, wo die beiden Mittelpunkte C und M auf entgegengesetzten Seiten der Centrale AB liegen, werden die beiden Kreisbogen eine convex-convexe Berührung eingehen. Denkt man sich jedoch anstatt des Punktes P auf der Senkrechten DP einen anderen Punkt P' als Pol gewählt, so daß die Fahrstrahlen $P'A$ und $P'B$ auf derselben Seite von D in die Drucklinie CM einschneiden, so erhält man in C' und M' die Mittelpunkte für die kreisförmigen Zahnprofile, welche nunmehr eine convex-concave Berührung eingehen. Endlich würde eine solche Wahl des Pols auf DP in P_0 , bei welcher der Fahrstrahl BP_0 parallel zu CM ausfällt, den Mittelpunkt C ins Unendliche hinausrücken, d. h. das Zahnprofil von B wäre durch eine zu CM senkrechte Gerade zu begrenzen und das Centrum für das Profil des Zahns von A findet sich dann in dem Durchschnitte von AP_0 mit CM .

Nimmt man die Entfernung des Pols P von D unendlich groß, so fallen die Polstrahlen nach den Radmitten A und B offenbar parallel mit DP oder senkrecht zu CM aus, und man erhält dann in C_0 und M_0 die Mittelpunkte für die beiden kreisförmigen Zahnprofile. Diese Punkte stimmen mit den Krümmungsmittelpunkten der beiden Evoluten in ihrem Berührungs-

punkte überein, welche man nach Anweisung des vorigen Paragraphen zu der Druckrichtung CM zeichnen kann, denjenigen Augenblick natürlich vor-

Fig. 255.



ausgesetzt, in welchem diese Evolventen sich in demselben Punkte D oder D_1 berühren, durch welchen man die beiden Kreisbogen beschrieben hat. Aus den letzten Bemerkungen ergibt sich eine einfache Construction zur Auf-

findung der gesuchten Mittelpunkte C_0 und M_0 zweier Kreisbogen, welche als angenäherte Zahnprofile benutzt werden können, dadurch, daß man die Radmitten A und B auf die angenommene Druckrichtung CM projectirt; die Projectionen C_0 und M_0 sind die gesuchten Mittelpunkte, und wenn man die Kreisbogen durch den Berührungspunkt D der Theilkreise legt, so geben die Zähne in demjenigen Augenblicke eine genau gleichmäßige Bewegungsübertragung, in welchem ihre Berührung in der Centrale AB stattfindet.

Um die Lage der Mittelpunkte C und M resp. C' und M' zu bestimmen, seien (Fig. 255) mit a und b die Halbmesser der Theilkreise der Räder A und B bezeichnet, und bedeute p den Abstand des Pols P von D , ferner sollen die gesuchten Abstände für convex-convexe Berührung CD mit a und MD mit b bezeichnet werden. Dann hat man:

$$a = DC_0 - CC_0 = a \cos \gamma - CC_0,$$

oder, da aus

$$a : p = CC_0 : a \sin \gamma$$

sich

$$CC_0 = \frac{a \cdot a \sin \gamma}{p}$$

ergiebt:

$$a = a \cos \gamma - \frac{a \cdot a \sin \gamma}{p},$$

woraus

$$a = \frac{p \cdot a \cos \gamma}{p + a \sin \gamma}$$

folgt.

Ebenso ist

$$b = DM_0 + M_0M = b \cos \gamma + M_0M,$$

oder, da aus

$$b : p = M_0M : b \sin \gamma$$

sich

$$M_0 M = \frac{b \cdot b \sin \gamma}{p}$$

ergiebt:

$$b = b \cos \gamma + \frac{b \cdot b \sin \gamma}{p},$$

woraus

$$b = \frac{p \cdot b \cos \gamma}{p - b \sin \gamma}$$

folgt.

Ganz ebenso findet man für eine convex-concave Berührung, wenn der Polabstand DP' mit p' und die Abstände DC' mit a' sowie DM' mit b' bezeichnet werden:

$$DC' = a' = \frac{p' \cdot a \cos \gamma}{p' + a \sin \gamma}$$

und

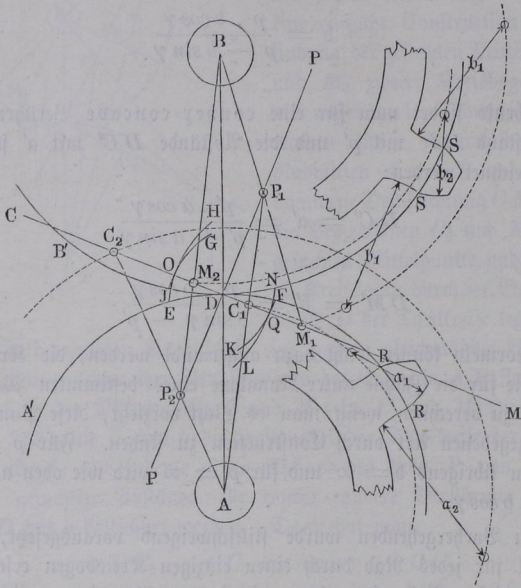
$$DM' = b' = \frac{p' \cdot b \cos \gamma}{b \sin \gamma - p'}.$$

Diese Formeln können leicht dazu angewandt werden, die Krümmungsmittelpunkte für die Zähne unter Annahme eines bestimmten Werthes von p resp. p' zu berechnen, wenn man es nicht vorzieht, diese Punkte in der vorher angegebenen Art durch Construction zu finden. Für $p = b \sin \gamma$ erhält man übrigens $b = \infty$ und für $p = \infty$ wird wie oben $a = a \cos \gamma$ und $b = b \cos \gamma$.

In dem Vorhergehenden wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß das Zahnprofil für jedes Rad durch einen einzigen Kreisbogen ersetzt werden solle. In diesem Falle, in welchem die Zahnprofile, als aus einer einzigen Curve bestehend, eine gewisse Aehnlichkeit mit den Evolventenzähnen darbieten, findet natürlich auch nur in einem einzigen Augenblicke eine genau gleichförmige Bewegungsübertragung zwischen den beiden Rädern statt, nämlich dann, wenn die beiden Kreisbogen sich in der Drucklinie MC berühren. Man kann aber jede Zahnfläche auch durch zwei Kreisbogen profiliren, welche, der eine für die Füße, der andere für die Köpfe dienend, den beiden verschiedenen Curven der Cycloidenzähne in gewissem Sinne entsprechen. Hierbei wird man erreichen, daß zwei miteinander arbeitende Zahnflächen während ihrer gegenseitigen Einwirkung in zwei verschiedenen Augenblicken eine genau gleichmäßige Bewegungsübertragung ergeben, nämlich dann, wenn das eine, und dann, wenn das andere Paar der zusammenarbeitenden Kreisbogen in der angenommenen Druckrichtung CM zur Berührung gelangen. Hierdurch ist natürlich eine engere Uebereinstimmung der kreisförmigen Profile mit den genau richtigen zu erreichen, insbesondere

wenn man die beiden Orte der besagten genau richtigen Bewegungsübertragung zwischen zwei Zähnen um dieselbe gleiche Größe, etwa um eine halbe Zahntheilung vor und hinter die Centrale verlegt. Um dies zu erreichen, ergibt sich nach dem Vorhergehenden von selbst folgende Construction. Zieht man gegen die Centrale AB , Fig. 256, der beiden Räder A und B im

Fig. 256.



Berührungspunkte D unter einem Winkel ADM von etwa 75° die Druckrichtung CM und dazu die Normale PP , so geben die beiden Strahlen von A und B nach einem beliebigen Punkte P_1 dieser Normale in C_1 und M_1 die Mittelpunkte für die Zahnköpfe von A und die Zahnfüße von B . Wählt man auf dem Theilkreise A' von A einen Punkt E , welcher etwa um die halbe Zahntheilung von D entfernt ist, und beschreibt durch diesen Punkt um C_1 als Mittelpunkt einen Kreisbogen EG , so bestimmt derselbe das Kopfprofil für die Zähne von A , während ein um den Punkt M_1 beschriebener Kreisbogen JH , welcher den letztgedachten EG in seinem Durchschnitte O mit der Krafttrichtung CM berührt, die Begrenzung der Füße des Rades B ergibt. In derselben Weise liefern die beiden durch einen anderen Punkt P_2 der Geraden PP gezogenen Strahlen AP_2 und BP_2 in ihren Schnittpunkten C_2 und M_2 mit CM zwei Mittelpunkte für die Kreisbogen, welche die Füße von A und die Köpfe von B begrenzen. Man wird daher

entsprechend durch einen Punkt F des Theilkreises A' , welcher etwa um die halbe Theilung von D absteht, den Flankenbogen FL um C_2 als Mittelpunkt beschreiben, und durch dessen Schnittpunkt Q mit der Krafrichtung CM den um M_2 beschriebenen Kreisbogen NK legen, welcher als Profil für die Zahnköpfe des Rades B dient. Die weitere Verzeichnung der Zähne mit den gefundenen Halbmessern ergibt sich nun leicht, wenn man bedenkt, daß die Kreise um A durch C_1 und C_2 die geometrischen Dexter der Mittelpunkte für die Begrenzung der Zähne von A , und die zu B concentrischen Kreise durch M_1 und M_2 diese Dexter für die Kreisbogen der Zähne von B sind. Die Radien dieser Kreise $a_1 = C_1 O$, $a_2 = C_2 Q$; $b_1 = M_1 O$ und $b_2 = M_2 Q$ sind an den betreffenden Stellen eingetragen. Diese Kreisbogen gehen übrigens in den Punkten R und S , wo sie sich in den Theilkreisen treffen, nicht tangential in einander über, daher eine leichte Abstumpfung der entstehenden Ecken sich empfehlen wird.

Anmerkung. Man kann auch als Halbmesser des Kreisbogens den Krümmungsradius eines genauen Zahnprofils in demjenigen Punkte desselben annehmen, in welchem die Bewegungsübertragung eine genau gleichmäßige werden soll. Wendet man dieses Verfahren z. B. auf die cycloidischen Profile an, welche man durch angenäherte Kreisbogen ersetzen will, so findet man die Halbmesser der letzteren durch Rechnung in folgender Weise:

Ist α der Halbmesser eines Theilkreises und β derjenige des darauf oder darin abzuwälgenden Kreises, so bestimmt sich der Krümmungsradius der durch Wälzung entstehenden Epicycloide und Hypocycloide nach den bekannten Eigenschaften dieser Curven*) in einem Punkte, welcher von dem Fußpunkte des wälgenden Kreises um einen Mittelpunktswinkel des letzteren gleich φ absteht, zu:

$$r = 4\beta \frac{a \pm \beta}{a \pm 2\beta} \sin \frac{1}{2}\varphi,$$

worin die positiven Zeichen für die Epicycloide und die negativen für die Hypocycloide gelten. Soll nun der betreffende Punkt des Zahnprofils, für welchen der Kreisbogen genau mit der correcten Profilform übereinstimmt, wieder um die halbe Theilung $\frac{t}{2}$ vom Momentancentrum abstehen, so hat man für denselben $\beta\varphi = \frac{t}{2}$ und daher $\frac{\varphi}{2} = \frac{t}{4\beta}$.

Wenn man bei der Kleinheit dieses Winkels nun $\sin \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}\varphi$ setzt, so folgt

$$r = \frac{a \pm \beta}{a \pm 2\beta} t.$$

Aus dieser Formel erhält man daher die Abrundungshalbmesser a_1 , a_2 , b_1 und b_2 für zwei Räder von den Halbmessern a und b , wenn die erzeugenden Kreise die Halbmesser β_1 und β_2 haben, durch:

*) S. u. A. Rehme: Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cycloiden.

$$a_1 = \frac{a + \beta_1}{a + 2\beta_1} t; \quad a_2 = \frac{a - \beta_2}{-2\beta_2} t;$$

$$b_1 = \frac{b + \beta_2}{b + 2\beta_2} t; \quad b_2 = \frac{b - \beta_1}{b - 2\beta_1} t.$$

Für die Geradflankenverzahnung hat man speciell $\beta_1 = \frac{1}{2} b$ und $\beta_2 = \frac{1}{2} a$ zu setzen, und man erhält daher die Halbmesser für die Zahnköpfe:

$$a = \frac{a + \frac{b}{2}}{a + \frac{b}{2}} t = \frac{n + \frac{1}{2}}{n + 1} t = \frac{2n + 1}{n + 1} \frac{t}{2}$$

und

$$b = \frac{b + \frac{a}{2}}{b + \frac{a}{2}} t = \frac{1 + \frac{n}{2}}{1 + \frac{n}{2}} t = \frac{2 + n}{n + 1} \frac{t}{2},$$

wenn das Umsehungsverhältniß $\frac{a}{b} = n$ gesetzt wird.

§. 75. **Satzräder.** In dem Vorstehenden ist immer stillschweigend die Voraussetzung gemacht worden, daß ein Rad *A* immer nur mit einem gewissen Rade *B* in Eingriff kommen solle, und daß die Bewegungen beider stets in einem bestimmten Verhältnisse $\alpha : \beta$ zu einander stehen sollen, welches dem umgekehrten Verhältnisse der Halbmesser $b : a$ gleich ist. In der Praxis ist es nun häufig erforderlich, daß von einer größeren Anzahl von Rädern *A, B, C, D* . . . irgend zwei mit einander arbeiten müssen, derart natürlich, daß jedesmal das Verhältniß ihrer Umdrehungsgeschwindigkeiten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. . . dem umgekehrten Verhältnisse ihrer Halbmesser a, b, c, d . . . gleich ist. Hierzu ist zuerst die Gleichheit der einzelnen Zahnabstände oder der Theilungen auf den einzelnen Theilkreisen, d. h. den Kreisen gleicher Geschwindigkeit gemessen, erforderlich, außerdem müssen aber auch die Zahnprofile irgend zweier Räder zu einander richtige, d. h. den vorstehend erörterten Bedingungen einer gleichförmigen Bewegungsübertragung entsprechende sein. Solche Räder nennt man **Satzräder**. Die praktische Wichtigkeit derselben im Allgemeinen geht besonders daraus hervor, daß die Herstellung der Zahnräder, wenigstens der größeren, durch den Abguß genau gearbeiteter Modelle erfolgt, und daher die Anzahl der erforderlichen theuren Radmodelle, die ohnehin wegen der verschiedenen Durchmesser sowohl wie wegen der verschiedenen Theilungen eine große ist, sehr bedeutend ausfallen würde, wenn jedes Rad immer nur zu einem einzigen passend sein könnte. Die Grundsätze, wonach die Bildung von Satzrädern zu geschehen hat, sind leicht erkennbar. Es ist klar, daß von zwei Rädern *A* und *B*, welche, nach einer der obigen Methoden gebildet, in richtigem Eingriffe mit einander stehen, das eine derselben, z. B. *A*, nicht mit einem dritten von *B* verschiedenen Rade *C* in richtigem Eingriffe stehen kann, sobald der Halbmesser jenes Rades *B* bei der

Bestimmung der Zahnprofile von A von Einfluß gewesen ist. Nur in dem Falle, wo die Zahncurven jedes Rades lediglich von den eigenen Dimensionen desselben abhängig sind, ist es denkbar, Sägeäder zu bilden.

Daraus geht zunächst hervor, daß bei der Geradflankenverzahnung Sägeäder nicht möglich sind, denn die geraden Flanken der Zähne erfordern für die Zahnköpfe von A als Profil die Epicycloide des Kreises, dessen Durchmesser gleich dem Halbmesser des anderen Rades ist, es kann also dieser Zahnkopf nur für einen einzigen bestimmten Durchmesser des anderen Rades festgestellt werden. Ähnliches gilt natürlich auch für die in §. 72 abgehandelte Triebstockverzahnung, soweit überhaupt bei den Stockgetrieben von Sägeädern die Rede sein kann.

Es läßt sich andererseits leicht übersehen, daß die allgemeine Cycloidenverzahnung, §. 70, mit beliebigen Rollkreisen C_1 und C_2 zur Bildung von Sägeädern Gelegenheit giebt, und daß man solche erhalten wird, wenn man die beiden innerlich und äußerlich abzuwälgenden Kreise C_1 und C_2 unter sich und für alle Räder gleich groß annimmt, denn nur dann wird die Zahnkrone jedes einzelnen Rades mit dem Zahnfuße irgend eines anderen Rades richtig zusammenarbeiten können, weil diese beiden Profile durch äußeres und inneres Wälzen desselben Kreises auf den beiden Theilkreisen entstanden sind. Der Beweis hierfür ist leicht zu führen. Sind A, B, D drei beliebige Räder, und die Köpfe von A nach Epicycloiden eines beliebigen Rollkreises C auf dem Theilkreise von A erzeugt, so erfordert das Rad B die Hypocycloide desselben Rollkreises C in seinem Theilkreise als Profil für die Zahnfüße. Aus dieser Profilsform der Füße von B folgt aber wieder die Nothwendigkeit, die Köpfe von D als Epicycloide des Kreises C auf dem Theilkreise von D zu profiliren und diese Kopfform von D erheischt beim Zusammenarbeiten mit A für die Füße des letzteren Rades die Hypocycloide, welche eben derselbe Kreis C im Theilkreise von A erzeugt, ein Gleiches gilt für alle einzelnen Räder des Sages.

Man erkennt leicht, daß die Gültigkeit dieser Bemerkung auch auf innere Zahnräder und die Zahnstange sich erstreckt. Behufs Ausbildung eines solchen Sages verschieden großer Räder hätte man daher nur über die Größe des zu wälzenden Kreises eine geeignete Annahme zu machen. Zu einer solchen Annahme führt die Bemerkung, daß schon bei radial gestellten Flanken die Zähne am Grunde sehr schwächlich ausfallen, und dieser Uebelstand noch mehr hervortritt, wenn der wälzende Kreis einen größeren Durchmesser annimmt, als der Halbmesser der Basis ist. Es dürfte daher passend sein, den Durchmesser des abzuwälgenden Erzeugungskreises höchstens gleich dem Halbmesser des kleinsten Rades im Sage, oder besser noch etwas kleiner anzunehmen. Nach Reuleaux soll man den Halbmesser des Er-

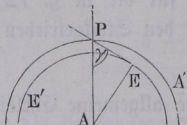
zeugungskreises zu $0,875 t$ annehmen, welchem Halbmesser eine Zähnezahl

$$z_0 = \frac{2\pi \cdot 0,875 t}{t} = 5,5$$

entsprechen würde.

Auch die Profilirung der Radzähne nach Kreisevolventen, §. 73, gestattet die Herstellung von Sägeädern*), denn hierbei ist die Zahnform eines Rades A vollkommen bestimmt, wenn man den Halbmesser AE , Fig. 257, des Evo-

Fig. 257.



lutenkreises kennt, und dieser wird durch $a \sin \gamma$ gefunden, wenn a den Theilkreishalbmesser und γ den Winkel APE bedeutet, unter welchem die Wirkungslinie PE den Radius AP schneidet, welcher nach deren Durchschnittspunkte mit dem Theilkreise gezogen wird. Zum richtigen Zusammenarbeiten dieses Rades A mit irgend einem anderen ist nur erforderlich, daß die durch den

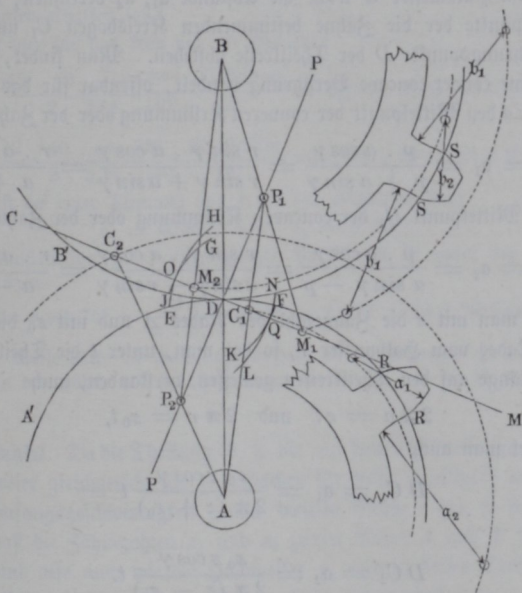
Verührungspunkt gehende Wirkungslinie für beide in dieselbe Gerade fällt, d. h. daß der besagte Winkel für alle Räder des Sages denselben Werth γ hat. Es ergibt sich hieraus leicht, daß die Halbmesser der Evolutenkreise, welche sämmtlich in dem Verhältnisse $1 : \sin \gamma$ kleiner sind, als die Theilkreishalbmesser, sich unter einander ebenso verhalten, wie diese letzteren, sowie daß auch die auf die Evolutenkreise entfallende Theilung bei Sägeädern mit Evolventenzähnen durchweg gleich groß für alle Räder des Sages sein muß. Obige Bemerkungen gelten auch hier für innerlich verzahnte Räder sowie für die Zahnstange.

Es lassen sich endlich auch Sägeäder nach der im §. 74 angegebenen Methode der Kreisbogenverzahnung ausführen. Es ist dazu nur nöthig, die Größen $DP_1 = p_1$ und $DP_2 = p_2$, Fig. 258, unter sich und für alle Räder des Sages von gleicher Größe p zu machen, und den Winkel ADM ebenfalls bei allen Rädern gleich groß (etwa 75°) anzunehmen. Denn man erkennt aus der Figur sofort, daß unter dieser Voraussetzung der Durchmesser BD des Rades B auf die Lage der Mittelpunkte C_1 und C_2 für die Kreisbogen des Rades A ganz ohne Einfluß ist, und mit diesem Durchmesser nur die Mittelpunkte M_1 und M_2 der Kreisbogen der eigenen Zähne sich in ihrem Abstände von D ändern. Es handelt sich also in diesem Falle nur um die Annahme geeigneter Werthe für den Winkel ADM und die Größe des Polabstandes $DP_1 = DP_2 = p$. Den Winkel ADM wird man mit Rücksicht darauf, daß die Gerade CM die Richtungslinie des

*) S. den Aufsatz von Büttner, Zeitschr. deutsch. Ing. Jahrg. 1871.

Druckes darstellt, nicht zu spitz nehmen dürfen, und ist eine Größe von 75° eine passende, weil bei einem geringeren Werthe die in die Centrale AB

Fig. 258.



fallende Componente des Räderdruckes und damit die schädlichen Axenreibungen unnötig groß ausfallen würden. Der Werth für den Abstand $p = DP_1 = DP_2$ des Pols P vom Berührungspunkte D der Theilkreise bestimmt sich aus folgender Betrachtung. Wenn mit diesem Abstände p die Zahnconstruc-

tion für ein Rad gemacht wird, dessen Halbmesser $r = \frac{p}{\sin \gamma}$ ist, so fällt

offenbar der vom Mittelpunkte dieses Rades nach dem Pole P gezogene Strahl parallel mit der Krafttrichtung CM aus, und der gesuchte Mittelpunkt M_1 für den die Flanken der Zähne begrenzenden Kreisbogen JH liegt im Unendlichen, d. h. diese Flanken nehmen eine radiale Begrenzung an. Wäre nun der Halbmesser r des Rades noch kleiner, so rückt der Mittelpunkt M_1 auf die andere Seite von D , und die Flanken des Rades B würden durch die gefundenen Kreisbogen beträchtlich unterschritten, die Zähne selbst dadurch sehr verschwächt werden. Es liegt daher nahe, die Größe p so zu wählen, daß bei dem kleinsten Rade, welches im Säge vorkommt, die Flanken höchstens radial ausfallen. Bezeichnet daher r diesen kleinsten Halbmesser, so

hat man p aus der obigen Beziehung $r = \frac{p}{\sin \gamma}$ zu $p = r \sin \gamma$ zu wählen.

Nunmehr lassen sich nach den in §. 74 gegebenen Formeln für irgend ein Rad A vom Halbmesser a leicht die Abstände a_1, a_2 berechnen, um welche die Mittelpunkte der die Zähne bestimmenden Kreisbogen C_1 und C_2 von dem Berührungspunkte D der Theilkreise abstehen. Man findet, da es sich hier um eine convex-concave Berührung handelt, offenbar für das Rad vom Halbmesser a den Mittelpunkt der convexen Krümmung oder der Zahnkrone aus

$$D C_1 = a_1 = \frac{p \cdot a \cos \gamma}{p + a \sin \gamma} = \frac{r \sin \gamma \cdot a \cos \gamma}{r \sin \gamma + a \sin \gamma} = \frac{r \cdot a \cos \gamma}{a + r},$$

sowie den Mittelpunkt C_2 der concaven Krümmung oder der Zahnflanke aus

$$D C_2 = a_2 = \frac{p \cdot a \cos \gamma}{a \sin \gamma - p} = \frac{r \sin \gamma \cdot a \cos \gamma}{a \sin \gamma - r \sin \gamma} = \frac{r \cdot a \cos \gamma}{a - r}.$$

Bezeichnet man mit z die Zähnezahls des Rades A und mit z_0 diejenige des kleinsten Rades vom Halbmesser r , so hat man, unter t die Theilung, d. h. die Bogenlänge auf den Theilkreisen gemessen, verstanden, auch

$$2 \pi a = z t \quad \text{und} \quad 2 \pi r = z_0 t,$$

daher findet man auch

$$D C_1 = a_1 = \frac{z_0 z \cos \gamma}{2 \pi (z + z_0)} t$$

und

$$D C_2 = a_2 = \frac{z_0 z \cos \gamma}{2 \pi (z - z_0)} t.$$

Nach diesen Formeln kann man für verschiedene Zähnezahlen der Räder und verschiedene Theilungen eine Tabelle der Werthe von a_1 und a_2 leicht berechnen, wie es von Willis*), von welchem diese Kreisbogenverzahnung zuerst angegeben wurde, auch unter Zugrundelegung eines Winkels $\gamma = 75^\circ$ und der kleinsten Zähnezahls $z_0 = 12$ geschehen ist. Zur Erleichterung der Construction hat Willis ferner ein kleines mit dem Namen Odontograph bezeichnetes Instrument angegeben, welches im Wesentlichen aus einem aus Zeichenpapier geschnittenen Winkelhaken, dessen Schenkel unter 75° geneigt sind, besteht. Auf dem einen Schenkel ist vom Scheitel aus nach jeder Seite eine nach dem Maßstabe der Zeichnung ausgeführte gleichmäßige Theilung aufgetragen. Die Theilung auf der einen Seite dient für die Werthe von a_1 , die andere für die Werthe von a_2 , welche aus der dazu gehörigen Tabelle zu entnehmen sind. Man kann diesen Apparat indessen bei der Construction füglich entbehren.

*) Principles of mechanism.

Beispiel. Es sollen die Modelle zu einem Satz Rädern von 30 Millimeter Theilung mit freibogenförmigen Zahnprofilen angefertigt werden, wie groß sind die Abstände a_1 und a_2 der Mittelpunkte für die Zahnhöpfe und Füße für das Rad von 40 Zähnen anzunehmen, wenn der Winkel der Krafttrichtung gegen die Centrale γ zu 75° angenommen wird und das kleinste Rad von 12 Zähnen radiale Flanken erhalten soll?

Man hat hier für das Rad von 40 Zähnen:

$$a_1 = \frac{12 \cdot 40 \cdot \cos 75^\circ \cdot 30 \text{ Millim.}}{2 \cdot 3,14 \cdot (40 + 12)} = 0,382 \cdot 30 = 11,5 \text{ Millim.}$$

und

$$a_2 = \frac{12 \cdot 40 \cdot \cos 75^\circ \cdot 30 \text{ Millim.}}{2 \cdot 3,14 \cdot (40 - 12)} = 0,707 \cdot 30 = 21,2 \text{ Millim.}$$

Allgemein ist bei einer Theilung von t für das 40zählige Rad

$$a_1 = 0,382 t \quad \text{und} \quad a_2 = 0,707 t.$$

Der der Construction zu Grunde gelegte Polabstand ist unter den gemachten Voraussetzungen

$$p = r \sin 75^\circ = \frac{12 \cdot t}{2 \cdot 3,14} \cdot 0,966 = 1,84 t = 55,2 \text{ Millimeter.}$$

In gleicher Weise hätte die Rechnung für jede andere Zähnezahl zu geschehen, die Construction der Zähne mit den gefundenen Größen a_1 und a_2 ist in §. 74 angegeben.

Zähnezahl. Da die Theilung, d. h. die auf dem Theilkreise gemessene Entfernung zweier gleichgerichteten Zahnflächen für beide Theilkreise wegen deren gleicher Umfangsgeschwindigkeit genau dieselbe Größe t hat, so folgt daraus zunächst, daß die Zähnezahlen z_1 und z_2 zweier Räder A und B sich wie die Umfänge und also auch wie die Halbmesser r_1 und r_2 dieser Theilkreise verhalten müssen. Ueberhaupt hat man $zt = 2\pi r$, und daher

$$t = 6,28 \frac{r_1}{z_1} = 6,28 \frac{r_2}{z_2}.$$

Man kann daher als das Umsetzungsverhältniß $n = \frac{r_1}{r_2}$ zweier Räder jederzeit auch das Verhältniß der Zähnezahlen $n = \frac{z_1}{z_2}$ annehmen.

Hieraus folgt für dieses Umsetzungsverhältniß zweier Zahnräder, daß dasselbe immer nur einen rationalen, durch ganze Zahlen ausdrückbaren Werth haben kann, welcher Beschränkung die Reibungsräder und Riemscheiben nicht unterworfen sind.

Aus der Beziehung $zt = 2\pi r$ ist es in jedem Falle leicht, eine der drei Größen, Theilung, Zähnezahl und Theilkreishalbmesser aus den beiden anderen zu finden, und bedient man sich bei häufigem Vorkommen dieser Bestimmung mit Vortheil einer Tabelle, welche die Werthe $\frac{z}{2\pi} = 0,1592 z$ für die gewöhnlich vorkommenden Zahlen von z (bis etwa 300) enthält.

Giebt man die Theilung, wie es in manchen Fabriken geschieht, anstatt in einfachen Maßeinheiten in dem π fachen derselben an, und bezeichnet alsdann (t) die Maßzahl für die Theilung, also entsprechend 3,14 (t) Millimeter, Zoll, Linien etc., so erhält man den Halbmesser r direct zu z (t) einfachen Maßeinheiten (Millimeter, Zoll, Linien etc.).

Beim Zeichnen der Räder kann man sich vortheilhaft eines sogenannten Peripheriemaßstabes bedienen, welcher zwei Scalen nebeneinander und zwar neben einer gewöhnlichen eine andere mit π facher Einheit enthält. Offenbar erleichtert dieser Maßstab die betreffende Reduction der Größen, indem die Längen, welche auf beiden Scalen gleich bezeichnet sind, sich wie $1 : \pi$ verhalten.

Da man beim Auftragen der Theilung t auf den Theilkreis natürlich nur die Sehne s des Theilungsbogens in den Birkel fassen kann, so wird man, wenn man es nicht vorzieht, den ganzen Theilkreis in z gleiche Theile zu theilen, zwischen die Birkelspitzen eine Länge

$$s = 2r \sin \frac{\tau^0}{2}$$

zu fassen haben, wenn τ^0 den Theilungswinkel (Theilwinkel), d. h. den zu einer Theilung t gehörigen Mittelpunktswinkel

$$\tau^0 = \frac{360^0}{z} = \frac{180^0}{\pi r} t = 57,296^0 \frac{t}{r}$$

bedeutet.

Setzt man hierin annähernd

$$\sin \frac{\tau^0}{2} = \frac{\tau}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{2} \right)^3 = \frac{\tau}{2} \left(1 - \frac{\tau^2}{24} \right) = \frac{t}{2r} \left(1 - \frac{t^2}{24 r^2} \right),$$

so erhält man die Sehne

$$s = t \left(1 - \frac{t^2}{24 r^2} \right) = 2\pi \frac{r}{z} \left(1 - \frac{4\pi^2}{24 z^2} \right) = \frac{6,283}{z} r \left(1 - \frac{1,645}{z^2} \right).$$

Sicherer wird man aber immer durch Eintheilung des Theilkreises in z gleiche Theile zum Ziele kommen, da jener berechnete Werth von s nur angenähert ist und die kleinen Fehler bei oftmaligem Abtragen auf dem Theilkreise sich summiren, so daß bei dem letzten Zahne eine beträchtliche Abweichung sich bemerklich macht.

Da die Größe der Zahntheilung, wie aus dem Späteren sich ergibt, mit Rücksicht auf die Festigkeit der Zähne in jedem Falle bestimmt ist, so ergeben sich hieraus und aus den gewählten Halbmessern der Räder deren Zahnzahlen.

Wenn nun auch im Allgemeinen die Wahl der Theilkreis halbmesser noch beliebig getroffen werden kann und Räder sich in den verschiedensten Größen

ausführen lassen, so ist doch das gegenseitige Verhältniß der Halbmesser resp. der Zähnezahlen zweier mit einander arbeitenden Räder an gewisse Bedingungen geknüpft, wie sie theilweise aus praktischen Constructionsrücksichten sich ergeben, hauptsächlich aber in Bezug auf die Möglichkeit der Bewegungsübertragung überhaupt gestellt werden müssen. Letzteres gilt insbesondere in Betreff der kleinsten zulässigen Zähnezahlen, bei welchen der Betrieb noch möglich bleibt. Was zunächst das Verhältniß zweier zusammenarbeitenden Räder anbetrifft, so muß bemerkt werden, daß von zwei verschieden großen Rädern die einzelnen Zähne des kleineren in demselben Verhältnisse öfter zum Angriff kommen als diejenigen des größeren Rades, in welchem die Halbmesser oder Zähnezahlen zu einander stehen. Es ist daher wegen der schnelleren Abnutzung der Zähne des kleineren Rades eine gerechtfertigte und in der Praxis ziemlich allgemein befolgte Regel, bei Triebwerken für größere Geschwindigkeiten dieses Verhältniß nicht zu groß zu nehmen, und wählt man dasselbe in solchen Fällen meist nicht größer als 4 bis 5. Dagegen pflegt man bei Winden und überhaupt bei langsam gehenden, besonders bei durch Menschenkraft bewegten Rädern wohl ein Verhältniß der beiden Halbmesser von 8 und noch mehr zuzulassen, bei der Anwendung einer Zahnstange ist ja eigentlich das Verhältniß unendlich groß, wobei man indessen berücksichtigen muß, daß hier wegen der hin- und hergehenden Bewegung der Zahnstange für die Häufigkeit des Angriffs der Zähne das Verhältniß des Radumfangs zur ganzen Verschiebung der Zahnstange das maßgebende ist.

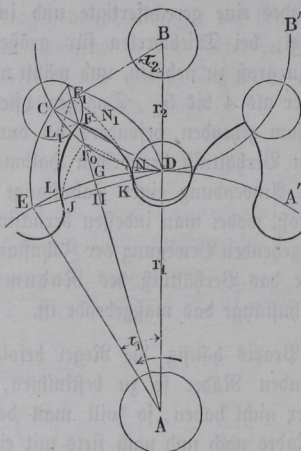
Wenn man in der Praxis häufig die Regel befolgt, die Zähnezahlen zweier zusammenarbeitenden Räder so zu bestimmen, daß dieselben einen gemeinschaftlichen Theiler nicht haben, so will man dadurch erreichen, daß jeder Zahn des einen Rades nach und nach stets mit einem anderen Zahn des anderen zum Angriff kommt, um einer ungleichmäßigen Abnutzung vorzubeugen. Daher giebt man den kleineren Getrieben sehr häufig absolute Primzahlen (11, 13, 17, 19 etc.) zu Zähnezahlen, während bei den größeren Zahnradern die Rücksicht auf die Herstellung meist eine Zähnezahl wünschenswerth erscheinen läßt, welche durch die Zahl der Radarme theilbar ist. Uebrigens ist die strenge Durchführung jener obigen Regel nicht von großer Bedeutung und oft, z. B. bei Saigrädern, überhaupt nicht für alle Fälle möglich.

Daß die Möglichkeit einer ununterbrochenen Bewegungsübertragung durch Zähne an das Vorhandensein einer gewissen Minimalzahl von Zähnen für jedes Rad geknüpft ist, erkennt man leicht aus der Betrachtung, daß in jedem Falle die Einwirkung eines Zahnes während eines Drehungsbetrages stattfinden muß, welcher mindestens dem Theilwinkel dieses Rades gleich ist, und daß also bei einer zu geringen Zähnezahl $\approx$ der Theilwinkel

$\tau^0 = \frac{360}{z}$ so groß ausfallen kann, daß bei den den Zähnen möglicherweise zu gebenden Abmessungen die Einwirkung des Zahns während eines so großen Drehungswinkels sich nicht mehr erreichen läßt. Diese Minimalzahl z^0 für die Zähne eines Rades hängt außer von der Form der Zähne insbesondere von der Zähnezahls des eingreifenden Partners, also von dessen verhältnißmäßiger Größe ab und seien im Folgenden die Regeln für die Bestimmung dieser Zahl im Wesentlichen angegeben.

Es sei zunächst vorausgesetzt, daß das Rad A mit z_1 Zähnen, Fig. 259,

Fig. 259.



in ein anderes B mit z_2 cylindrischen Triebstöcken D von der Dicke δ_2 eingreife, wobei nach §. 72 der Zahnquerschnitt durch die Curve FLJ zu begrenzen ist, welche zu der vom Theilkreise B' beim Rollen auf A' erzeugten Epicycloide CE im Abstände $\frac{\delta_2}{2}$ parallel ist.

Ein Triebstock kommt nach dem Früheren zur Wirkung, wenn sein Mittelpunkt in die Centrale nach D tritt, und es darf, wenn die Bewegung ununterbrochen übertragen werden soll, der vorhergehende Triebstock C erst in demjenigen Augenblicke von dem ihn antreibenden Zahne FL des Rades A verlassen werden, in welchem der Mittelpunkt des folgenden Zahns nach D in die Centrale gelangt. Diesen Moment stellt die Figur dar, und es erhellt nach dem Früheren, daß der Berührungspunkt F des Zahns mit dem Triebstocke in der Druckrichtung DC liegen muß.

Bezeichnet nun wieder t die Theilung und

$$\tau_1 = \frac{t}{r_1} = \frac{2\pi}{z_1}$$

sowie

$$\tau_2 = \frac{t}{r_2} = \frac{2\pi}{z_2}$$

die Theilwinkel, so hat man die Sehnen

$$s_1 = DE = 2r_1 \sin \frac{\tau_1}{2},$$

annähernd

$$= r_1 \tau_1 - r_1 \frac{\tau_1^3}{24} = t \left(1 - \frac{\tau_1^2}{24} \right),$$

wenn man

$$\sin \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{2} - \frac{\tau^3}{2 \cdot 3 \cdot 8}$$

setzt, da die höheren Potenzen bei der Kleinheit von τ vernachlässigt werden dürfen.

In gleicher Weise folgt

$$s_2 = DC = t \left(1 - \frac{\tau_2^2}{24} \right).$$

Setzt man nun voraus, daß die Stärke δ_1 der Zähne, d. h. LN oder, was nahezu dasselbe ist, JK ebenso wie die Dicke δ_2 der Triebstöcke, gleich der halben Theilung sein sollte, also

$$\delta_1 = \delta_2 = \frac{t}{2},$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 2JH = 2(DJ - DF \cos CDE) \\ &= 2 \left[s_1 - \frac{\delta_1}{2} - \left(s_2 - \frac{\delta_2}{2} \right) \cos \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right], \end{aligned}$$

da der Winkel

$$CDE = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$$

ist. Für s_1 und s_2 die Werthe eingeführt und

$$\cos \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = 1 - \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{8}$$

gesetzt, erhält man nach geringer Reduction:

$$\begin{aligned}\delta_1 &= \frac{t}{2} = 2t \left(\frac{3}{4} - \frac{\tau_1^2}{24} \right) - 2t \left(\frac{3}{4} - \frac{\tau_2^2}{24} \right) \left(1 - \frac{(\tau_1 + \tau_2)^2}{8} \right) \\ &= \frac{t}{4} \left[-\frac{\tau_1^2}{3} + \frac{\tau_2^2}{3} + \frac{3}{4} (\tau_1 + \tau_2)^2 \right].\end{aligned}$$

Hierin

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{z_1} \quad \text{und} \quad \tau_2 = \frac{2\pi}{z_2}$$

gesetzt, folgt

$$\delta_1 = \frac{t}{2} = \frac{\pi^2 t}{12} \left(\frac{5}{z_1^2} + \frac{18}{z_1 z_2} + \frac{13}{z_2^2} \right).$$

Damit also δ_1 den Werth $\frac{t}{2}$ erlange, muß die Bedingung erfüllt sein:

$$\frac{5}{z_1^2} + \frac{18}{z_1 z_2} + \frac{13}{z_2^2} = \frac{12}{2\pi^2} = 0,608.$$

Für $z_1 = z_2$ erhält man

$$\frac{36}{z_1^2} = 0,608,$$

oder

$$z_1 = z_2 = \sqrt{\frac{36}{0,608}} = 7,7, \text{ d. i. mindestens } 8.$$

Man ersieht hieraus, daß bei gleicher Größe der Theilkreise die geringste Anzahl der Zähne und der Triebstöcke zu 8 angenommen werden muß, um der Bedingung zu genügen, daß die Dicke derselben $\delta_1 = \delta_2 = \frac{t}{2}$ werden soll. Bei einer geringeren Anzahl von Zähnen oder Triebstöcken würde nämlich der Zahn LFN zu kurz werden, indem die beiden den Zahn begrenzenden Curven LF und NF sich schon vor dem Punkte F , etwa in F_0 , schneiden würden, und daher eine Wirkung des Zahns auf den betreffenden Triebstock nicht mehr während einer vollen Theilung möglich wäre.

Ein größerer Werth von z_1 oder z_2 als 8 wird dagegen den Einfluß haben, daß diese beiden Zahnprofile sich erst außerhalb des Punktes F , etwa in F_1 , treffen, und daher würde die Einwirkung des Zahns GF_1 auf den Triebstock während eines Bogens stattfinden, welcher größer als die Theilung t ist, folglich wird die Bewegungsübertragung bei größerer Anzahl der Zähne oder Triebstöcke gesichert sein. Man könnte in diesem Falle die Zähne bis zu dem Punkte F verkürzen, so daß dieselben nicht mehr spitz ausfallen, sondern durch die Fläche $L_1 N_1$ abgestumpft werden. Es ist daher klar, daß jene obige Bedingungsgleichung die Minimalzahl der Stöcke resp. Zähne ergibt, daher größere Werthe für z_1 und z_2 unbedenklich angenommen werden können.

Während bei gleichen Rädern die Minimalzahl der Zähne und Stöcke durch 8 gefunden wird, ändert sich dieser Werth mit dem Umsehungsverhältnisse, und zwar, wie aus der Bedingungsgleichung ersichtlich ist, derart, daß durch eine Vergrößerung von z_1 der Minimalwerth von z_2 kleiner als 8 ausfällt, und umgekehrt eine Vergrößerung von z_2 eine kleinere Zahl als 8 für z_1 zuläßt. Um die äußersten Grenzen für z_2 und z_1 zu erkennen, hat man nur z_1 resp. z_2 unendlich groß anzunehmen, in welchem Falle aus dem betreffenden Rade eine Zahnstange mit Zähnen oder Triebstöcken wird. Für $z_1 = \infty$, also für eine Zahnstange, erhält man:

$$z_2 = \sqrt{\frac{13}{0,608}} = 4,6,$$

so daß also 5 die geringste Anzahl der Stöcke ist, welche ein mit einer Zahnstange eingreifender Drehling wenigstens haben muß. Setzt man andererseits $z_2 = \infty$, d. h. giebt man der Stange die Triebstöcke, so erhält man die geringste Zähnezahls für ein dazu passendes Zahnrad

$$z_1 = \sqrt{\frac{5}{0,608}} = 2,9, \text{ also rund } 3.$$

Während also für eine Zahnstange der eingreifende Drehling mindestens 5 Stöcke haben muß, kann schon ein 3 zähniges Getriebe in eine Zahnstange mit Stöcken regelrecht eingreifen. Ueber die erforderliche geringste Stöckzahl für 3—8 zähnige Räder, und die Zähnezahls für 5—8 stöckige Drehlinge giebt nachstehende aus der obigen Bedingungsgleichung berechnete Tabelle Aufschluß.

Zähnezahls z_1	3	4	5	6	7	8	10	14	48 (∞)
Stöckzahl z_2	117 ∞	18	12	10	9	8	7	6	5

Man erkennt hieraus, daß ein dreizähniges Rad nicht nur für die Zahnstange, sondern auch für einen Drehling mit 117 Zähnen genügt, und daß ein fünfstöckiges Getriebe auch schon mit einem Rade von 48 Zähnen im Eingriffe stehen kann.

Wenn die beiden Räder in einem innerlichen Eingriffe stehen, und das Rad A das äußere sein möge, so bleibt die vorstehende Entwicklung dieselbe, mit dem einzigen Unterschiede, daß der Winkel der beiden Sehnens CDE jetzt gleich $\frac{\tau_2 - \tau_1}{2}$ sich bestimmt, und man erhält die Bedingungsgleichung

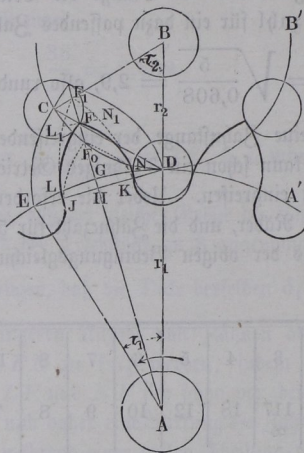
$$\frac{5}{z_1^2} - \frac{18}{z_1 z_2} + \frac{13}{z_2^2} = 0,608,$$

worin wieder z_1 die Anzahl der Zähne und z_2 die Anzahl der Stöcke bedeutet. Nimmt man das Zahnrad als äußeres und den Drehling als inneres Rad an, so erhält man für 4 Triebstöcke, also $z_2 = 4$, aus der Bedingungs-
gleichung $z_1 = 21$. Diese Zahl giebt hier die größtmögliche Zähne-
zahl des Rades, denn wollte man z_1 größer machen, so würde man für

$$\frac{5}{z_1^2} - \frac{18}{z_1 z_2} + \frac{13}{z_2^2}$$

einen Werth erhalten, welcher größer als 0,608 würde, d. h. die Dimension
 JK , Fig. 260, wäre größer als $\frac{t}{2}$. Man erkennt auch leicht, daß bei

Fig. 260.



innerem Zahneingriffe mit wachsendem Durchmesser des äußeren Rades der
zugehörige Eingriffbogen abnimmt.

Ebenso erhält man für $z_2 = 3$, $z_1 = 7$, und für $z_2 = 2$, $z_1 = 3$,
d. h. ein dreistöckiges Getriebe könnte nur von einem äußeren Rade von
weniger als 7 Zähnen und ein zweistöckiges Getriebe nur von einem solchen
Rade, das nicht mehr als 3 Zähne hätte, umgedreht werden, wenn eine
solche Anordnung überhaupt möglich wäre. Nimmt man endlich z_2 so groß,
daß $\frac{13}{z_2^2} \leq 0,608$ wird, also mindestens $z_2 = 5$, so erhält man $z_1 = 14$,

b. h., schon ein äußeres Rad mit 2 Zähnen würde der Theorie nach genügen, einen fünfstöckigen inneren Drehling umzutreiben, wenn eine solche Anordnung überhaupt denkbar wäre.

Jedenfalls erkennt man, daß man in diesem Falle, wo $\frac{13}{z_2^2} < 0,608$, also z_2 wenigstens 5 ist, für z_1 jede beliebige Zahl annehmen kann, denn man überzeugt sich leicht, daß für diesen Fall der Ausdruck

$$\frac{5}{z_1^2} - \frac{18}{5z_1} + \frac{13}{5^2}$$

stets kleiner bleibt als 0,608, so daß man hieraus schließt, daß ein Stockgetriebe mit wenigstens 5 Stöcken mit jedem äußeren Zahnrad von beliebig großer Zähnezahl in innerlichem Eingriffe sein kann, sowie daß ein in eine Bahnstange eingreifendes Stockgetriebe wenigstens 5 Stöcke haben muß.

Wenn man dem größeren Rade die Stöcke (z_2) und dem inneren Getriebe die Zähne (z_1) giebt, so ist die Untersuchung dieselbe. Man findet dabei ganz wie oben, daß bei einer Zähnezahl z_1 von solcher Größe, daß $\frac{5}{z_1^2} \leq 0,608$ ist, also für z_1 gleich mindestens 3, wofür $z_2 = 2$ folgt, der Ausdruck

$$\frac{5}{z_1^2} - \frac{18}{z_1 z_2} + \frac{13}{z_2^2}$$

für jede beliebige Zahl z_2 größer als 2, einen Werth kleiner als 0,608 annimmt, wie es für die Möglichkeit der Zahnbildung erforderlich ist. Es kann also ein dreizähniges Rad von innen in ein Stockrad von beliebig großer Stockzahl also auch in eine Stange mit Stöcken eingreifen. Setzt man dagegen $z_1 = 2$, so erhält man als die größte mögliche Anzahl der dem größeren Rade zu gebenden Triebstöcke $z_2 = 13$.

In ähnlicher Weise wie für Stockräder bestimmen sich auch bei anderen Zahnformen die geringsten Zähnezahlen. Sei Fig. 261 (a. f. S.) das Rad B mit radialen Zahnfüßen DK versehen, und seien daher die Köpfe EF des Rades A durch die Epicycloide des Kreises C vom Durchmesser $DB = r_2$ auf dem Theilkreise A' begrenzt, und sei angenommen, daß A nur Zahnköpfe und B nur Zahnfüße habe, so darf der Zahn EF mit seinem äußersten Punkte F den Zahnfuß JL nicht früher verlassen, als bis der folgende Zahnkopf DG den folgenden Fuß DK in der Centrale D ergriffen hat. Bedeuten daher wieder $s_1, s_2, \tau_1, \tau_2, \delta_1$ und δ_2 dasselbe wie vorher, so hat man, da $FDE = \tau_2 + \frac{\tau_1}{2}$ ist, für den Grenzfall eines in eine Spitze F auslaufenden Zahnkopfes die Zahndicke desselben:

$$z_1 = \sqrt{\frac{1}{0,076}} = 3,6 \text{ abgerundet} = 4,$$

während für eine mit Zahnköpfen versehene Zahnstange das die radialen Flüsse tragende Rad mindestens

$$z_2 = \sqrt{\frac{8}{0,076}} = 10,25 = \text{rund } 11 \text{ Zähne}$$

erhalten muß. Wie für die Stoßgetriebe gesehen, kann man auch hier leicht eine Tabelle berechnen, aus welcher zu entnehmen ist, wie viel Zähne das eine Rad mindestens erhalten muß, wenn das andere eine bestimmte Zähnezahl bekommen soll, wobei natürlich die Bedingung festgehalten werden muß, daß das Rad mit den geraden Flanken nicht unter 11, das mit den epicycloidischen Köpfen nicht unter 4 Zähne erhalten darf.

Für inneren Eingriff ändert sich die Rechnung nur insofern, als der Winkel

$$FDE = \tau_2 - \frac{\tau_1}{2}$$

ist, und daher als Bedingung für den Eingriff

$$\frac{1}{z_1^2} - \frac{6}{z_1 z_2} + \frac{8}{z_2^2} \leq 0,076 \text{ folgt.}$$

Diese Bedingung giebt wieder die größten Zähnezahlen für das größere Rad, so lange die Zähnezahl des kleineren den Werth

$$z = \sqrt{\frac{8}{0,076}} = 10,25 = \text{rund } 11,$$

oder den Werth

$$z = \sqrt{\frac{1}{0,076}} = 3,6 = \text{rund } 4$$

nicht erreicht, je nachdem dieses innere Rad die geraden Flanken oder die gekrümmten Köpfe erhält.

Zahnhöhe. Die Untersuchungen des vorangegangenen Paragraphen beschränkten sich auf den Fall, wo das eine Rad nur mit Zahnköpfen, das andere nur mit Zahnflüßen versehen ist, so daß die Einwirkung zweier Zähne auf einander nur auf der einen Seite der Centrale stattfindet und zwar auf der im Sinne der Bewegung hinter der Centrale gelegenen Seite, wenn man, wie es in der Praxis aus Rücksicht auf die Zahnreibung fast immer geschieht, das Rad mit den Zahnköpfen zum treibenden macht. Daß auch die Triebstöcke in dieser Beziehung wesentlich als Zahnflüße anzusehen sind, ergibt sich ohne Weiteres aus der Bemerkung, daß sie von den Zähnen des anderen Rades erst dann ergriffen werden, wenn ihre Mittelpunkte das Momentancentrum passiert haben. §. 77.

Nun pflegt man aber im Allgemeinen, wie in dem Obigen ausführlicher erörtert worden, jedem der beiden Räder sowohl Zahnfüße als Zahnköpfe zu geben, in Folge dessen die Einwirkung der Zähne auf einander schon in einem gewissen Abstände vor der Centrale beginnt, und in einem gewissen Abstände hinter derselben aufhört. Bezeichnet man diese Abstände, als Bogen auf den Theilkreisen gemessen, vor der Centrale mit e_1 und hinter der Centrale mit e_2 , und nennt diese Bogen die Eingriffsbogen, so ist zunächst klar, daß die Summe derselben mindestens gleich der Theilung sein muß, wenn die ununterbrochene Bewegungsmitteltheilung möglich sein soll, daß also $e_1 + e_2 \geq t$ sein muß.

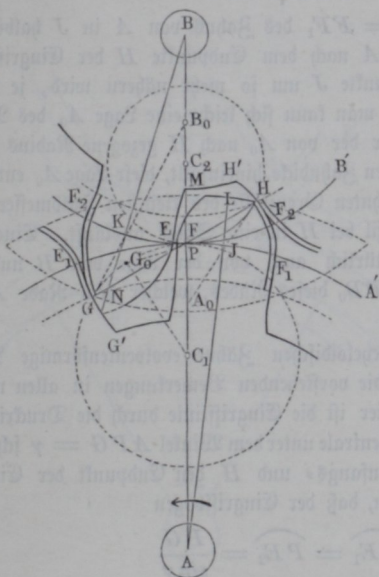
Es ist auch ersichtlich, daß die Größe dieser Eingriffsbogen wesentlich von den Höhen abhängig ist, um welche die Zahnköpfe über ihre Theilkreise hervorragten, und daß jede dieser Höhen an sich geringer ausfallen darf, als in den Fällen des vorigen Paragraphen, in welchen ein Eingriff nur auf einer Seite der Centrale stattfindet, welcher natürlich auf einer Bogenlänge e geschehen muß, die mindestens gleich der Theilung ist. Da mit der Länge der Zahnköpfe der Widerstand der Zahnreibung wesentlich zunimmt (s. §. 79), so ist dies ein Hauptgrund, warum man in der Praxis die hier gedachte Anordnung beiderseitiger Zahnköpfe vorzieht. Es würde nun die Ermittlung der geringsten Zähnezahlen (bei innerer Verzahnung der größten) in ähnlicher Art, wie im vorigen Paragraphen für einseitige Wirkung geschehen, hier in der Weise vorzunehmen sein, daß man als den Grenzfall für die mindestens erforderliche Zähnezahl denjenigen ansieht, wo die symmetrisch gebildeten Zahnköpfe beider Räder unter Zugrundelegung der erforderlichen Dicken $\left(\delta_1 = \delta_2 = \text{etwa } \frac{t}{2}\right)$ in scharfe Spitzen auslaufend solche Höhen erhalten, daß $e_1 + e_2 = t$ wird.

Die allgemeine Durchführung der dementsprechenden analytischen Untersuchung führt indeß auf so weitläufige und zusammengesetzte Rechnungen, daß der praktische Werth derselben sehr gering ist, während es jederzeit sehr einfach ist, die betreffenden Ermittlungen auf constructivem Wege zu führen, ein Verfahren, das hier um so empfehlenswerther und natürlicher erscheint, als ohnehin bei der Construction der Räder und Zahnprofile ein graphisches Verfahren angewandt werden muß.

Seien A und B , Fig. 262, zwei Räder mit cycloidischen Zähnen, deren Profile durch Wälzung der beiden Erzeugungskreise C_1 und C_2 in und auf den Theilkreisen in der bekannten Weise (§. 70) erzeugt sein mögen. Diese Kreise C_1 und C_2 bilden dann gleichzeitig die Eingriffslinien oder die geometrischen Dexter für den Berührungspunkt der Zahnprofile. Seien nun die Eingriffsbogen e_1 und e_2 vor und hinter der Centrale gegeben, so erhält man, wenn man von P aus die Länge

$$e_1 = \widehat{PE_1} = \widehat{PE_2} = \widehat{PG}$$

auf den Kreisen A , B und C_1 abträgt, in G den Anfangspunkt der Einwirkung, in welchem zwei Zähne sich ergreifen, deren Profile durch die Punkte E_1 und E_2 gehen, welche letzteren gleichzeitig in dem Momentancentrum P ein treffen. In derselben Art erhält man, wenn man



zwei Zähne sich ergreifen, deren Profile durch die Punkte E_1 und E_2 gehen, welche letzteren gleichzeitig in dem Momentancentrum P ein treffen. In derselben Art erhält man, wenn man

$$e_2 = \widehat{PF_1} = \widehat{PF_2} \\ = \widehat{PH}$$

macht, in H denjenigen Punkt, in welchem die Wirkung zweier Zähne aufhört, deren Profilscurven durch die beiden Punkte F_1 und F_2 gehen, welche das Momentancentrum P in einem und demselben

Augenblicke passirt haben. Legt man daher durch G einen Kreis zum Mittelpunkte B , so schneidet derselbe die Zahnköpfe dieses Rades in richtiger Höhe ab, und gilt dasselbe von dem durch H zum Mittelpunkte A gelegten Kreise hinsichtlich der Köpfe des letzteren Rades.

Ob nun die Zähnezahlen, d. h. also die Halbmesser der Räder im Verhältniß zur Theilung, die genügende Größe haben, erkennt man, wenn man von E_2 und F_1 auf den betreffenden Theilkreisen die erforderlichen Dicken der Zähne abträgt, und zwar $\delta_1 = F_1F$ und $\delta_2 = E_2E$, und durch F und E die Profilscurven zu den Rückflächen der Zähne symmetrisch zu den Vorderflächen F_1H und E_2G zeichnet. Diese Curven für Vorder- und Rückfläche jedes Zahns dürfen sich offenbar nicht innerhalb der durch H resp. G gelegten Kopfkreise schneiden, weil sonst die Zähne nicht die erforderliche Länge erhielten, welche die zu Grunde gelegten Eingriffsbogen e_1 und e_2 erfordern. Schneiden sich je zwei Curven desselben Zahns außerhalb des Kopfkreises desselben, so erhalten die Zähne wie in der Figur abgestumpfte Köpfe, würden die Durchschnittspunkte auf die Kopfkreise fallen,

so liefen die Zahnprofile in scharfe Spitzen aus, und dieser Fall entspricht daher der oben erwähnten Grenze, unter welche die Radhalbmesser überhaupt nicht herabgehen dürfen, unter der Voraussetzung natürlich, daß man $e_1 + e_2 = t$ gemacht habe.

Denkt man die Dicke $\delta_1 = FF_1$ des Zahns von A in J halbt, so zeigt die Figur, daß der von A nach dem Endpunkte H der Eingriffstrecke gezogene Radius sich dem Punkte J um so mehr nähern wird, je kleiner der Halbmesser AP ist, und man kann sich leicht eine Lage A_0 des Mittelpunktes A denken, bei welcher der von A_0 nach H gezogene Radius gerade in die Mitte J der aufgetragenen Zahndicke hineinfällt, diese Lage A_0 entspricht dann offenbar dem mehrerwähnten Grenzfall des kleinsten Halbmessers von A , für welchen das Zahnprofil bei H in eine Spitze ausläuft. Eine ganz gleiche Betrachtung gilt natürlich auch von der Lage von B und dem zulässig kleinsten Halbmesser PB_0 dieses Rades, welcher dem Rade A vom Halbmesser AP zugehört.

Wenn man anstatt der cycloidischen Zähne evolventenförmige Profile wählt, Fig. 263, so bleiben die vorstehenden Bemerkungen in allen wesentlichen Punkten dieselben. Hier ist die Eingriffslinie durch die Druckrichtung GPH gegeben, welche die Centrale unter dem Winkel $APG = \gamma$ schneidet. Bezeichnet wieder G den Anfangs- und H den Endpunkt der Eingriffstrecke, so ist leicht zu erkennen, daß der Eingriffsbogen

$$e_1 = \widehat{PE_1} = \widehat{PE_2} = \frac{PG}{\sin \gamma}$$

und ebenso

$$e_2 = \widehat{PF_1} = \widehat{PF_2} = \frac{PH}{\sin \gamma}$$

ist, da die Länge PH gleich einem abgewickelten Bogen des Evolutenkreises OO' vom Halbmesser $AO = AP \sin \gamma$ und zum Mittelpunktswinkel

$$PAF_1 = \frac{e_2}{AP}$$

ist; daher

$$PH = AP \cdot \sin \gamma \frac{e_2}{AP} = e_2 \sin \gamma$$

folgt.

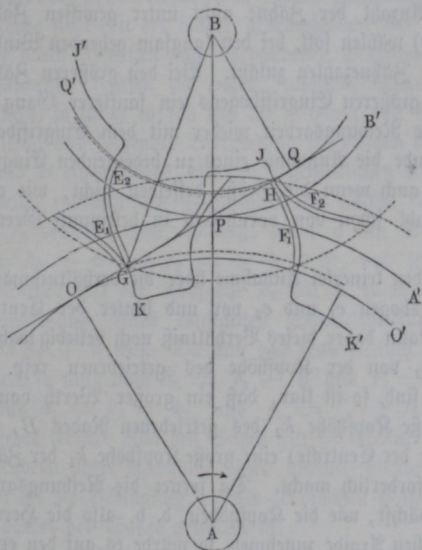
Die Anordnung ist hier so gewählt, daß das Zahnprofil des Rades B in eine Spitze G ausläuft, daß also der Halbmesser BD nicht kleiner angenommen werden darf, wenn die Bedingung gestellt wird, daß der Eingriffsbogen vor der Centrale den Werth

$$e_1 = E_1P = E_2P$$

haben soll. Auch sind hier die Zahndicken etwas geringer angenommen

als die halbe Theilung, um zwischen den Zähnen einen gewissen Zwischenraum zu erlangen, worüber im folgenden Paragraphen ein Näheres.

Fig. 263.



Nach dem Vorstehenden wird der Fall der inneren Verzahnung einer besonderen Erklärung nicht bedürfen.

Wenn in den vorangehenden Erläuterungen stets angenommen wurde, daß die Summe der Eingriffsbogen mindestens den Betrag der Theilung t haben müsse, so ist damit keineswegs gesagt, daß diese Summe nicht einen größeren Betrag haben dürfe. Man wird sich in der Wirklichkeit schon aus dem Grunde mit einem gesammten Eingriffsbogen gleich der Theilung nicht begnügen dürfen, weil sonst die geringste Un-

regelmäßigkeit in der Ausführung der Zähne oder in der Lagerung der Axen im Gefolge haben könnte, daß die Bewegungsübertragung unregelmäßig werden würde oder ganz aufhörte. Es ist aber noch ein anderer wichtiger Grund für Annahme eines größeren Eingriffsbogens dadurch gegeben, daß in Folge desselben gleichzeitig mehr als ein Paar von Zähnen zum Eingriff kommt, und daher der auf jeden Zahn entfallende Druck kleiner und die Abnutzung der Zähne deshalb geringer wird. Bei Rädern, deren Mitten je nach Bedürfniß einander mehr oder weniger genähert werden müssen, z. B. bei den Uebertragsrädern zweier Walzen, ist natürlich der Eingriffsbogen, d. h. sind die Höhen der Zahnköpfe so groß zu machen, daß auch bei der weitesten Walzenstellung der Eingriffsbogen e den Betrag der Theilung noch etwas übersteigt. Verschiedenen Zwecken entsprechend findet man daher in der Praxis den Eingriffsbogen von $1,1t$ bis zu etwa $3,5t$ und darüber schwankend, und es ist nach dem Vorstehenden wohl ohne Weiteres klar, daß man dem Bogen e nur dann die größeren Werthe geben können, wenn die Zähnezahlen hinreichend groß sind, während man bei den kleinen Ge-

trieben in Winden, Zählwerken etc., bei denen die Zähnezahls zuweilen auf 4, ja selbst 3 herabsinkt, sich stets mit einem Eingriffsbogen wird begnügen müssen, welcher die Theilung nur wenig übertrifft. Im Vorstehenden findet die praktische Regel ihre Erklärung, wonach man bei Triebwerksrädern, welche schnell gehen, die Anzahl der Zähne nicht unter gewissen Zahlen (etwa nicht weniger als 20) wählen soll, bei den langsam gehenden Windengetrieben jedoch viel kleinere Zähnezahlen zuläßt. Bei den größeren Zähnezahlen läßt sich wegen des größeren Eingriffsbogens ein sanfterer Gang erzielen. Dagegen nimmt die Reibungsarbeit wieder mit dem Eingriffsbogen zu, so daß aus diesem Grunde die Annahme eines zu bedeutenden Eingriffsbogens sich nicht empfiehlt, auch wenn die Größe desselben nicht, wie oben erörtert, durch die Zähnezahls schon von vornherein in bestimmte Grenzen eingeschlossen wäre.

Es ist in dem Vorstehenden keinerlei Annahme über die verhältnißmäßige Größe der beiden Theilungsbogen e_1 und e_2 vor und hinter der Centrale gemacht worden, und man kann daher dieses Verhältniß noch beliebig wählen. Da diese Bogen e_1 und e_2 von der Kopfhöhe des getriebenen resp. des treibenden Rades abhängig sind, so ist klar, daß ein großer Werth von e_1 (vor der Centrale) eine große Kopfhöhe k_2 des getriebenen Rades B , und ein großer Bogen e_2 (hinter der Centrale) eine große Kopfhöhe k_1 der Zähne des treibenden Rades A erforderlich macht. Da ferner die Reibungsarbeit in demselben Verhältnisse wächst, wie die Kopfhöhen, d. h. also die Hervorhebungen über die theoretischen Aroide zunehmen, so würde es auf den ersten Blick gerechtfertigt erscheinen, entweder die beiden Eingriffsbogen e_1 und e_2 oder auch die beiden Kopfhöhen k_2 und k_1 von gleicher Größe anzunehmen. Daß diese beiden Annahmen nicht auf dasselbe hinauslaufen, lehrt ein Blick auf die Fig. 263, woraus sich sogleich ergibt, daß gleiche Kopfhöhen k_1 und k_2 nur bei zwei ihrer Größe wie Zahnform nach ganz übereinstimmenden Rädern auch gleiche Eingriffsbogen zur Folge haben können. In der That wird in der Praxis auch vielfach, im Maschinenbau fast durchgängig, die eine oder andere dieser Annahmen gemacht. So giebt Redtenbacher an, man solle die Zähne sowohl vor als hinter der Centrale um je einen Theilungsbogen auf einander einwirken lassen, daß also $e_1 = e_2 = t$ ist. Andererseits führt Willis eine bei englischen Maschinenbauern beliebte Regel an, wonach man die Kopfhöhen beider Räder gleich groß, nämlich jede zu $0,3 t$ mache, eine Regel, welche auch von Reuleaux acceptirt worden ist. Die radiale Tiefe der Füße f_1 und f_2 der Zähne ergibt sich aus den gewählten Kopfhöhen k_1 und k_2 von selbst, da die Lücke zwischen zwei Zahnfüßen des Rades A von der Tiefe f_1 dem Kopfe k_2 des anderen Rades bequem Raum geben muß, und dasselbe hinsichtlich des Fußes f_2 von B und des Kopfes k_1 von A gilt. Mit Rücksicht auf etwaige Verunreinigung durch

Staub etc. und auf unvollkommene Ausführung pflegt man $f_1 = f_2 = 0,4t$ zu machen, so daß zwischen den Stirnflächen der Köpfe und dem Grunde des Zahnfranzes ein Scheitelspielraum von $0,1t$ verbleibt. Die Annahme gleicher Kopfhöhen für die in einander greifenden Räder nach der letztgedachten Methode steht mit der bisher gebräuchlichen Art der Fabrication der Zahnräder durch Abgießen nach vorhandenen Modellen oder durch Ausfräsen mit vorhandenen Fräsen im engen Zusammenhange, ist überhaupt die allein mögliche, so lange es sich um die Bildung von Satzrädern (§. 75) handelt, wie leicht aus folgender Betrachtung sich ersehen läßt. Hat man zwei Räder A und B eines Sages, mit den beziehentlichen Kopfhöhen k_1 und k_2 , welche natürlich zwischen den Zahnfüßen mit Lücken von entsprechender Tiefe f_1 und f_2 versehen sind, so daß, unter σ den Scheitelspielraum verstanden, $f_1 = k_2 + \sigma$ und $f_2 = k_1 + \sigma$ ist, und soll nun ein drittes Rad C des Sages mit der Kopfhöhe k_3 mit A zusammenarbeiten, so muß unter Voraussetzung eines constanten Scheitelspielraums $k_3 = f_1 - \sigma$ und $f_3 = k_1 + \sigma$ sein. Da nun das Rad C auch mit B soll zusammengehen können, so muß auch $k_3 = f_2 - \sigma$ und $f_3 = k_2 + \sigma$ gemacht werden, woraus $k_1 = k_2 = k_3$ und $f_1 = f_2 = f_3$ folgt. Da ein Gleiches für jedes fernere Rad des Sages gilt, so erkennt man, daß die Bildung von Satzrädern unter Annahme eines überall gleichen Scheitelspielraums überhaupt an die Bedingung gleicher Kopfhöhen k und gleicher Fußhöhen f für alle Räder des Sages geknüpft ist.

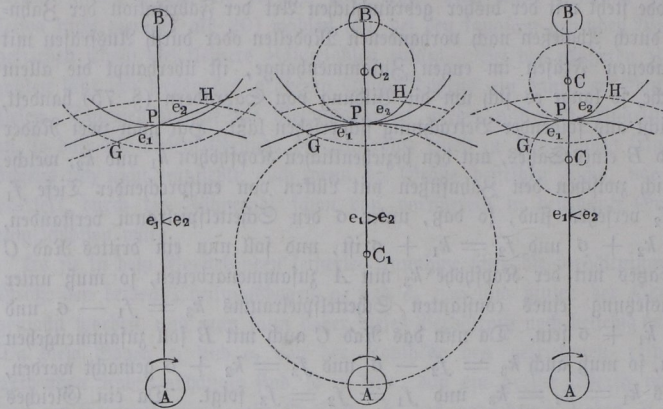
Die Eingriffbogen e_1 vor und e_2 hinter der Centrale sind aber bei gleichen Kopfhöhen und ungleichen Rädern, wie schon bemerkt, nicht gleich groß, und es kommt ganz auf die Zahnform, d. h. die Eingriffslinie, an, welcher von den beiden Bogen für das kleinere und welcher für das größere Rad der kleinere ist. Es läßt sich leicht aus einfachen geometrischen Beziehungen einsehen, daß bei Evolventenzähnen, bei denen die Eingriffslinie die Gerade GH , Fig. 264 (a. f. S.), ist, der Eingriffbogen e_1 vor der Centrale einen kleineren Werth hat, wenn der Betrieb von dem größeren Rade A ausgeht, als derjenige hinter der Centrale. Geht der Betrieb von dem kleineren Rade B aus, so gilt natürlich das Umgekehrte, da die Werthe e_1 und e_2 dann ihre Rollen wechseln. Gerade entgegengesetzt verhalten sich, wie schon Willis gezeigt hat, die Zähne mit geraden Flanken, Fig. 265, wo die Kreise C_1 und C_2 von den Halbmessern r_1 und r_2 zu Durchmessern die Eingriffslinien darstellen, indem hier, wie sich durch Rechnung ermitteln läßt, e_1 oder GP größer als e_2 oder PH ist. Dagegen ist bei cycloidschen Satzrädern, bei denen ein kleinerer Kreis C , Fig. 266, die Profile erzeugt (§. 75), der Eingriffbogen $GP = e_1$ vor der Centrale wieder der kleinere von den beiden, immer vorausgesetzt, daß das größere Rad als treibendes dient.

Diese Untersuchung über die verhältnißmäßige Größe der Eingriffsbogen vor und hinter der Centrale ist deswegen nicht ohne praktische Wichtigkeit,

Fig. 264.

Fig. 265.

Fig. 266.



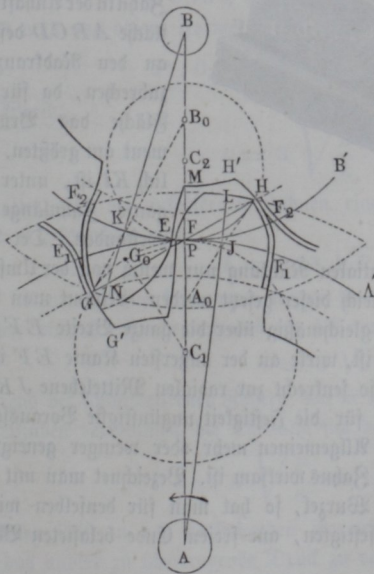
weil damit die gute Erhaltung oder der schnelle Verschleiß der Radzähne im engen Zusammenhange steht. Es scheint nämlich eine durch die Erfahrung festgestellte Thatsache zu sein, daß die Reibung der Zahnflächen (§. 79), welche vor der Centrale stattfindet, schädlicher und zerstörender auf das Material der Zähne wirkt, als die hinter der Centrale auftretende, so daß man in der Praxis sogar für die eigenthümliche Wirkung der Friction vor der Centrale in dem Worte des Stemmens der Zähne einen besonderen Ausdruck gebraucht und unter Praktikern die Regel Geltung hat, bei der Formgebung der Zähne die Wirkung des Stemmens thunlichst zu vermeiden. Aus diesem Grunde eignen sich, wie Willis ebenfalls bemerkt, die Geradflankenzähne nicht besonders für die Fälle, wo das größere Rad das treibende ist. Die Praxis der Uhrmacher und älteren Mühlenbauer hat diesem Umstande schon längst durch die Vorliebe für die Stoßgetriebe Rechnung getragen, bei denen eine Wirkung vor der Centrale nur in geringem Maße eintritt, da der Eingriffsbogen vor der Centrale nur gleich dem Halbmesser der Stöcke, also noch nicht $\frac{t}{4}$ beträgt. Die Uhrmacher pflegen deshalb auch den Zahnrädern, bei denen fast immer das größere Rad das treibende ist, verschieden große Kopfhöhen zu geben, so daß diejenige des treibenden Rades etwa 1,5 mal so groß ist wie diejenige des getriebenen.

In neuerer Zeit, wo die Anwendung der Räderformmaschinen in den

Gießereien größere Verbreitung erlangt und der Maschinenbauer dadurch bis zu gewissem Grade von den kostspieligen Rädermodellen emancipirt wird, ist dem Constructeur hinsichtlich der Bestimmung der Kopfhöhen eine größere Freiheit gelassen, und kann dabei den Rücksichten auf möglichst sanften Gang der Triebräder mehr Rechnung getragen werden, als dies bisher, bei dem Wunsche, vorhandene Modelle zu benutzen, möglich war.

Was schließlich die Zahnlücken anbelangt, deren Tiefe nach dem Vorangehenden so groß zu bemessen ist, daß zwischen dem Grunde derselben und dem Scheitel der Zahnköpfe ein genügender Scheitelspielraum von etwa 0,1 t verbleibt, so braucht man die Flanken der Zahnfüße offenbar nur in derjenigen Erstreckung, auf welcher sie von den Zahnköpfen des anderen Rades wirklich berührt werden, genau mit demjenigen Profile zu versehen, welches nach dem Vorherigen für eine gleichförmige Bewegungsübertragung erforderlich ist. Dieser wirklich zur Berührung kommende Theil der Flanken erstreckt sich aber niemals bis zum Grunde der Lücken, und wird offenbar durch denjenigen Kreis begrenzt, welchen man durch den betreffenden Endpunkt der Eingriff-

Fig. 267.



linie concentrisch zur Radaxe legt. So kommt in Fig. 267 von den Zahnfüßen des Rades A nur ein Stück $E_1 G$ und von denen des Rades B ein Stück $F_2 H$ zur wirklichen Berührung mit den entgegengesetzten Zahnköpfen, und man darf daher die Flankenstücke GG' und HH' im Uebrigen beliebig wenn nur so profiliren, daß die Zahnköpfe des anderen Rades genügend Raum finden. Häufig bildet man diese Wurzelstücke der Flanken radial, verstärkt die Zähne in den Ecken G' und H' , wo sie sich an den

Zahnkranz anschließen, auch wohl durch eine kleine Eckleiste oder Abrundung. Es kann hierbei bemerkt werden, daß bei Evolventenzähnen die Evolventen ohnehin meistens nicht bis zu den Fußkreisen sich erstrecken, da die letzteren

nahme der Geradflanken Zähne, um wenigstens größer sein, als die Dicke $\delta = NO$ im Theilkreise, und da diese letztere Größe mit Rücksicht auf nicht vollkommen genaue Arbeit und zwischen die Zähne tretende Verunreinigungen (Schmiere, Staub etc.) etwas geringer angenommen wird, als die halbe Theilung, meist gleich $\frac{19}{40}t$, so daß also der Flankenspielraum der Zähne in den Rinnen $\frac{1}{20}t$ beträgt, so darf man die Dicke am Fußende $h = \frac{1}{2}t$ für die Rechnung annehmen.

Auch die Breite AD der Zähne in axialer Richtung pflegt man der Theilung proportional anzunehmen, in der Regel zwischen $2t$ und $3t$, und zwar giebt man die geringere Breite $2t$ den langsam gehenden durch Menschenhand bewegten Rädern bei Winden etc., die größere Breite $2,5t$ bis $3t$ und zuweilen noch mehr den schnellgehenden Triebwerksrädern. Die ganze Länge des Zahns l pflegt man ebenfalls nach dem vorigen Paragraph von der Theilung abhängig zu machen und

$$l = k + f = 0,7t \text{ bis } 0,75t \text{ zu wählen.}$$

Unter Annahme der Verhältnisse

$$l = 0,75t, b = 2t \text{ und } h = 0,5t$$

erhält man aus obiger Formel:

$$P \cdot 0,75t = \frac{2t \cdot 0,25t^2}{6} k$$

den Werth

$$t = 3 \sqrt{\frac{P}{k}}.$$

Gestattet man bei gußeisernen Zähnen eine höchstens zulässige Spannung $k = 3^k$, so erhält man

$$t = 1,73 \sqrt{P}.$$

Für hölzerne Zähne kann man wegen der Vorzüglichkeit des ausgesuchten Eschen- oder Weißbuchenholzes $k = 1^k$ annehmen, und hat daher dafür

$$t = 3 \sqrt{P},$$

während bei schmiedeisernen Rädern, wie sie in kleinen Abmessungen namentlich bei Winden vorkommen, die Theilung sich bestimmt zu

$$t = 3 \sqrt{\frac{P}{6}} = 1,22 \sqrt{P}.$$

Unter P ist in den vorstehenden Formeln der ganze von einem Rade auf das andere zu übertragende Druck zu verstehen, denn wenn auch, sobald der Eingriffsbogen größer als die Theilung ist, gleichzeitig der Druck sich auf mehrere Zähne überträgt, so ist doch eine kleine Ungenauigkeit in dem Abstände der Zähne bei dem wenig biegsamen Gußeisen schon genügende Veranlassung, daß ein einziger Zahn durch den gesammten Druck belastet werde.

Höchstens darf man bei den elastischeren Holzzähnen darauf rechnen, daß der Druck von zwei Zähnen gleichzeitig aufgenommen werde, und demgemäß mit einer geringeren Theilung sich begnügen, aber auch nur dann, wenn der Eingriffbogen mindestens gleich $2t$ ist, weil nur daran fortwährend zwei Zahnpaare im Eingriff stehen. Da nun das übertragene Kraftmoment Pr , unter r den Theilkreishalbmesser verstanden, zu der Leistung von N Pferdekraften bei n Umdrehungen des Rades pro Minute in der Beziehung steht:

$$Pr = 716\,200 \frac{N}{n},$$

so findet man die erforderliche Theilung auch durch:

$$t = 1470 \sqrt{\frac{N}{nr}} \text{ für Gußeisen,}$$

$$t = 1050 \sqrt{\frac{N}{nr}} \text{ für Schmiedeeisen,}$$

$$t = 2540 \sqrt{\frac{N}{nr}} \text{ für Holz.}$$

Bei den vorangehenden Ermittlungen ist die Größe der Zahnstärke und daher der Theilung lediglich mit Rücksicht auf die Bruchfestigkeit des Zahns aus dem übertragenen Drucke P bestimmt, ohne auf die Geschwindigkeit des Radumfanges und die damit in Verbindung stehende Abnutzung zu rücksichtigen. Dies ist auch immer bei geringer Umfangsgeschwindigkeit zulässig, wie sie z. B. bei den durch Menschenhand bewegten Rädern von Winden, Pressen 2c. meist nur vorkommt. Bei den größeren Geschwindigkeiten, wie sie den Rädern von Transmissionswellen in der Regel eigen sind, hat man aber auch auf die Abnutzung und die in solchen Fällen unvermeidlichen Stoßwirkungen Rücksicht zu nehmen. Zur Verminderung der Abnutzung empfiehlt es sich daher, durch vergrößerte Breite b der Zähne den Druck pro Flächeneinheit möglichst herabzuziehen, während mit Bezug auf Stoßwirkungen es gerathen erscheint, die höchstens zulässige Materialspannung k mit steigender Geschwindigkeit v zu vermindern. Dementsprechend nimmt Reuleaux für gußeiserne Triebwerkräder

$$b = 0,01 t \sqrt{Pn} = 8,5 \sqrt{\frac{N}{r}}$$

und

$$k = \frac{\text{const.}}{\sqrt{v}}$$

an, wenn v die Umfangsgeschwindigkeit der Theilreise in Millimetern und

n die minutliche Umdrehungszahl des kleineren Rades bezeichnet, bei welchem die Abnutzung der Zähne wegen des häufiger sich wiederholenden Angriffs die größere ist. Hieraus ist der Ausdruck gefolgert:

$$t = 2,1 \sqrt[4]{Pr} = 60 \sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

welchem also ein Werth der Constanten in $k = \frac{\text{const.}}{\sqrt{v}}$ von 120 zu Grunde liegt.

Für hölzerne Zähne, welche beiläufig fast nur bei schnellgehenden Triebwerksrädern vorkommen, soll man

$$b = 0,0125 t \sqrt{Pn} = 10,6 t \sqrt[4]{\frac{N}{r}}$$

und

$$t = 3,23 \sqrt[4]{Pr} = 92,4 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$$

annehmen.

Bei nicht genau paralleler Axenlage oder, wenn ein kleiner fremder Körper zufällig zwischen die Zähne gelangt, kann die Inanspruchnahme derselben unter Umständen eine noch ungünstigere werden, als der oben gemachten Voraussetzung entspricht. Wenn nämlich der Druck P vornehmlich eine Ecke A des Zahns, Fig. 269, trifft, so ist ein Abbrechen desselben nach

Fig. 269.

der schrägen Fläche $DBFE$ zu befürchten. Setzt man für diesen Fall in obiger Formel

$$Pl = \frac{bh^2}{6} k$$

für l die normale Entfernung

$$\begin{aligned} AN &= AB \cdot \sin ABN = l \cdot \sin \varphi \\ &= 0,75 t \cdot \sin \varphi, \end{aligned}$$

für b die Länge

$$BF = \frac{l}{\cos \varphi} = \frac{0,75 t}{\cos \varphi}$$

und für h die Zahndicke im Theilkreise

$$\delta = \frac{19}{40} t = 0,475 t,$$

so erhält man die in der Bruchfläche auftretende äußerste Faserspannung k_1 aus

$$P \cdot 0,75 t \cdot \sin \varphi = \frac{0,75 t \cdot 0,475^2 t^2}{6 \cos \varphi} k_1$$

zu

$$k_1 = \frac{6}{0,226} \sin \varphi \cos \varphi \frac{P}{t^2} = 13,3 \sin 2 \varphi \frac{P}{t^2}.$$

Dieser Werth wird ein größter für $\varphi = ABN = 45^\circ$ und zwar

$$k_1 = 13,3 \frac{P}{t^2}.$$

Setzt man hierin aus der oben gefundenen Formel

$$t = 3 \sqrt{\frac{P}{k}}$$

den Werth

$$\frac{P}{t^2} = \frac{k}{9},$$

so erhält man:

$$k_1 = 1,48 k.$$

Es kann also in diesem Falle die größte Anstrengung des Materials nahezu 1,5 mal so groß werden, als die in den früheren Formeln zu Grunde gelegte Spannung beträgt, d. h. z. B. bei Gußeisen $4,5^k$. Da dieser Werth immer noch hinreichend weit von dem der Elasticitätsgrenze zugehörigen entfernt ist, so braucht man mit Rücksicht auf diesen doch nur ausnahmsweise auftretenden Fall eine Vergrößerung der Zahndicke nicht vorzunehmen, denn da, wie aus dem nächsten Paragraph folgt, die Reibungswiderstände mit der Größe der Theilung wachsen, so muß es gerathen erscheinen, die letztere nicht überflüssig groß anzunehmen, um so mehr als auch der Gang zweier Zahnräder um so gleichmäßiger und sanfter sein wird, je kleiner die Theilung ist, d. h. je mehr die Räder mit wachsender Zähnezahl sich dem idealen Zustande der Frictionsräder nähern.

Beispiele. 1) Wie groß hat man die Theilung eines 1,5 Meter im Durchmesser haltenden gußeisernen Zahnrades zu machen, welches zur Umdrehung einer Windetrommel dient, an deren Halbmesser von 180 Millimeter ein Kettenzug von 3000^k wirksam ist?

Hier ist

$$P = \frac{3000 \cdot 180}{750} = 720 k,$$

daher die erforderliche Theilung

$$t = 1,73 \sqrt{720} = 46,4 \text{ Millimeter},$$

wofür man abgerundet 50 Millimeter nehmen wird. Die Breite der Zähne beträgt $b = 2t = 100$ Millimeter, die Höhe $l = 0,75t = 37,5$ Millimeter, die Dicke $\delta = \frac{19}{40}t = 23,7$ Millimeter, die Breite der Lücke im Theilkreise daher 26,3 Millimeter, und der Flankenpielraum 2,6 Millimeter. Der Umfang des Theilkreises beträgt $1500 \cdot 3,14 = 4712$ Millimeter, daher ergibt sich die Zähnezahl zu $\frac{4712}{50} = 94,24$. Nimmt man bei Anwendung von 6 Armen eine Zähnezahl von 96, so erhält man einen Theilkreisumfang $96 \cdot 50 = 4800$ Milli-

meter, welchem ein genauer Durchmesser von $\frac{4800}{3,14} = 1,528$ Meter entspricht. Macht man die Zahntöpfe $0,3 t = 15$ Millimeter und die Zahnfüße $0,4 t = 20$ Millimeter lang, so erhält der Kopfkreis einen Durchmesser von

$$1528 + 2 \cdot 15 = 1558 \text{ Millimeter}$$

und der Fußkreis einen solchen von

$$1528 - 2 \cdot 20 = 1488 \text{ Millimeter.}$$

2) Das 5 Meter im Durchmesser große gezahnte Schwungrad einer 40 pferdigen Dampfmaschine, welche 30 Umdrehungen in der Minute macht, greift in ein Getriebe der Betriebswelle von 1,5 Meter Durchmesser, welches mit hölzernen Zähnen versehen werden soll. Welche Abmessungen müssen dieselben erhalten?

Die erforderliche Theilung bestimmt sich hier nach Reuleaux zu:

$$t = 92,4 \sqrt[4]{\frac{40}{30}} = 98,9,$$

wofür rund 100 Millimeter zu nehmen ist, wobei eine Breite zu Grunde liegt von

$$b = 10,6 t \sqrt{\frac{N}{r}} = 10,6 \sqrt{\frac{40}{750}} \cdot t = 2,44 t = 244 \text{ Millimeter.}$$

Die Ermittlung der Zahndimensionen, Zähnezahlen und des genauen Theilkreisdurchmessers wie oben.

Zahnreibung. Wenn die Räder zweier parallelen Axen sich in einer §. 79 Geraden berühren, welche mit der ihrem Bewegungszustande zugehörigen Momentanaxe zusammenfällt, so tritt wegen der rein wälzenden Bewegung eine gleitende Reibung an der Berührungsstelle nicht ein. Bei den Frictionsscheiben, sowohl denen mit directer Uebertragung, wie bei den Riemenrädern findet die Berührung fortwährend in der Momentanaxe statt, so daß dabei, eine vollständige Bewegungsmitteltheilung ohne Rutschen vorausgesetzt, eine gleitende Reibung an den Umsängen auch nicht eintreten kann. Bei den Zahnradern indessen berühren sich zwei Zähne während ihrer Einwirkung auf einander nur in einem einzigen Augenblicke in der Momentanaxe P , Fig. 270 (a. S. 391), indem die Berührungslinie während der gedachten Einwirkung die Eingriffslinie GPH von einem Endpunkte bis zum anderen durchwandert. Es ist nun klar, daß hierdurch gewisse Reibungswiderstände hervorgerufen werden müssen, denn wenn beispielsweise die Berührung in einer durch J gehenden, den Axen parallelen Geraden geschieht, so findet anstatt der augenblicklichen kleinen Drehung um die Momentanaxe P eine ebenso große Drehung um die Gerade in J statt, verbunden mit einer Verschiebung der beiden Zahnflächen in J auf einander, in einer zu PJ senkrechten Richtung. Der Betrag dieser Verschiebung, also auch der Reibungsweg beträgt nach Einleitung §. 4, $\lambda \partial \omega$, wenn λ den Abstand PJ und $\partial \omega$ den Drehungswinkel um die Momentanaxe bezeichnet. Ist nun durch K der Druck zwischen den Zahnflächen in der Richtung PJ und durch φ der

Reibungscoefficient bezeichnet, so ist die in dem betrachteten Augenblicke zu überwindende Reibungsarbeit durch $\varphi K \lambda \partial \omega$ gegeben. Bedeuten ferner $l_1 = GP$ und $l_2 = PH$ die Abstände des Anfangs- und Endpunktes der Eingriffslinie GH von der Momentanaxe P , so drückt sich die gesammte Reibungsarbeit, welche zwischen den beiden Zähnen auftritt, aus durch:

$$A = \int_0^{l_1} \varphi K \lambda \partial \omega + \int_0^{l_2} \varphi K \lambda \partial \omega = A_1 + A_2.$$

Hierin bedeutet der erste Ausdruck

$$A_1 = \int_0^{l_1} \varphi K \lambda \partial \omega$$

die Reibung, welche vor der Centrale auf GP sich einstellt, und der andere

$$A_2 = \int_0^{l_2} \varphi K \lambda \partial \omega$$

die hinter der Centrale auf der Strecke PH stattfindende Reibung.

Es ist leicht ersichtlich, daß diese beiden Reibungen in entgegengesetzten Richtungen wirkend auftreten. Nachdem nämlich bei Beginn des Eingriffs in G der Zahn $D_1 F_1$ des treibenden Rades A mit dem Punkte F_1 den Punkt F_2 des getriebenen Zahns $D_2 F_2$ erfaßt hat, wird sich die Zahnfläche $F_1 P$ auf der Zahnfläche $F_2 P$ in der Richtung von F_2 nach P hin verschieben, bis die beiden Flächen mit den Punkten P in der Centrale zusammenfallen. Die ganze Verschiebung während dieser Periode ist offenbar durch die Differenz der Curvenlängen $PF_2 - PF_1$ gegeben. Ebenso findet während der zweiten Periode des Eingriffs hinter der Centrale eine Verschiebung der Zahnfläche PD_1 auf derjenigen PD_2 in der Richtung von D_2 nach P , also der vorherigen entgegengesetzt, statt, und ist diese Verschiebung gleich der Differenz der Curvenstücke $PD_1 - PD_2$. Man kann diese verschiedenen Richtungen der relativen Bewegungen dahin kennzeichnen, daß die Zahnflächen jedes Rades vor der Centrale sich gegen die Axe des anderen Rades hin schieben, dagegen hinter der Centrale von dieser Axe hinweg ziehen. Man bezeichnet die erste Art der Wirkung wohl als das Stemmen, die letztere als das Ausstreichen der Zähne.

Die Erfahrung hat ergeben, daß die Reibung vor der Centrale das Material der Zähne weit mehr angreift, als die Reibung hinter der Centrale, und ist schon oben angegeben worden, daß es aus diesen Gründen rathsam erscheinen muß, die Höhe der Köpfe des getriebenen Rades geringer zu machen als die des treibenden, um das Stemmen möglichst zu vermindern. Aus diesem Grunde hat man sich auch zu erklären, warum man bei den Rädern, welche mit Stockgetrieben oder Drehlingen zusammen arbeiten, immer dem treibenden Rade die Zähne und dem getriebenen Rade die Stöcke giebt,

und $e_2 = \widehat{PF}$ derjenige hinter der Centrale. Es ist dann aus dem Früheren bekannt, daß die Strecken der Eingriffslinie

$$GP = e_1 \sin \gamma \quad \text{und} \quad PH = e_2 \sin \gamma$$

sind, da diese Längen zufolge der Entstehung der Zahnprofile durch Abwicklung der Kreise O' und Q' gleich den den Eingriffswinkeln zugehörigen Bogen der Evolutenkreise von den Halbmessern

$$AO = r_1 \sin \gamma \quad \text{und} \quad BQ = r_2 \sin \gamma$$

sein müssen. Ebenso ist klar, daß in irgend einer Stellung der Zähne, wo der Berührungspunkt ihrer Profile zwischen G und P etwa in J sich befindet, der Abstand

$$\lambda = PJ = r_1 \sin \gamma \cdot \alpha$$

ist, unter α den Winkel verstanden, um welchen das Rad A noch gedreht werden muß, bis der Berührungspunkt von J nach P rückt. Wenn das Rad A aus dieser Stellung um $\partial \alpha$ gedreht wird, wodurch das Rad B eine Drehung um

$$\partial \beta = - \frac{r_1}{r_2} \partial \alpha$$

erhält, so kann man, wie früher schon öfter geschehen, B festgehalten und dem Rade A eine Drehung gleich

$$\partial \omega = - \partial \beta + \partial \alpha = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \partial \alpha$$

um die Momentanaxe P theilt denken. Da nun diese Drehung factisch nicht um die Momentanaxe in P , sondern um die Berührungslinie in J geschieht, so wird die erwähnte Verschiebung

$$\lambda \partial \omega = \lambda \frac{r_1 + r_2}{r_2} \partial \alpha$$

stattfinden, daher die elementare Reibungsarbeit

$$\varphi K \lambda \frac{r_1 + r_2}{r_2} \partial \alpha$$

zu verrichten sein. Man hat daher, wenn der Eingriffswinkel des Rades A vor der Centrale $\frac{e_1}{r_1}$ mit ε_1 bezeichnet wird, die Reibungsarbeit vor der Centrale:

$$A_1 = \int_0^{\varepsilon_1} \varphi K \lambda \frac{r_1 + r_2}{r_2} \partial \alpha = \varphi \frac{r_1 + r_2}{r_2} r_1 \sin \gamma \int_0^{\varepsilon_1} K \alpha \partial \alpha$$

zu setzen.

Wegen der unveränderlichen Druckrichtung von K ist dieser Druck bei Evolventenzähnen constant, und man hat, unter P die Umfangskraft am

Theilkreise verstanden, $K \sin \gamma = P$, daher ergibt sich:

$$A = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} r_1 \int_0^{\varepsilon_1} \alpha \partial \alpha = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{r_1 \varepsilon_1^2}{2}.$$

In derselben Art findet man die Arbeit der Reibung während des Eingriffs hinter der Centrale:

$$A_2 = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{r_1 \varepsilon_2^2}{2}$$

und somit die gesammte Reibungsarbeit:

$$A = A_1 + A_2 = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} r_1 \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2}.$$

Diese Arbeit wird überwunden, während das Rad eine Drehung um die eigene Axe im Betrage $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, also der Umfang einen Weg $r_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ gemacht hat. Bezeichnet daher F die durchschnittliche Größe der Reibung auf den Theilkreis reducirt, so erhält man aus $A = F r_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ diese Reibung zu:

$$\begin{aligned} F &= \frac{A}{r_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \\ &= \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2 \varepsilon}. \end{aligned}$$

Es ist nun leicht zu erkennen, daß dieser Werth bei einer gewissen gegebenen Größe des ganzen Eingriffswinkels $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ein Minimum wird, wenn $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \varepsilon$ ist, d. h. wenn der Eingriffswinkel vor der Centrale gleich demjenigen hinter der Centrale ist, denn schreibt man:

$$\frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{2 \varepsilon} = \frac{\varepsilon_1^2 + (\varepsilon - \varepsilon_1)^2}{2 \varepsilon}$$

und setzt die Ableitung nach ε_1 gleich Null, so erhält man:

$$2 \varepsilon_1 - 2 (\varepsilon - \varepsilon_1) = 0, \text{ oder } \varepsilon_1 = \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon_2.$$

Für diesen Fall erhält man daher die auf den Theilkreis reducirt Reibung:

$$F = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{\varepsilon}{4}.$$

Der Winkel ε muß nun mindestens gleich dem Theilungswinkel $\tau_1 = \frac{t}{r_1}$ sein, wenn überhaupt die Bewegungsübertragung ununterbrochen vor sich gehen soll, man pflegt indessen den Eingriffswinkel wie in §. 77 näher ausgeführt, meist größer anzunehmen. Setzt man für den Eingriffsbogen eine Größe $e = \nu t$ voraus, unter ν eine Zahl größer als 1 verstanden, so ist:

$$\varepsilon = \frac{e}{r_1} = \frac{\nu t}{r_1},$$

und man erhält durch Einführung dieses Werthes:

$$F = \varphi K \frac{r_1 + r_2}{r_2} \frac{v t}{4 r_1} = \varphi K \left(\frac{1}{2 r_1} + \frac{1}{2 r_2} \right) \frac{v t}{2}.$$

Führt man schließlich hierin

$$\frac{t}{2 r_1} = \frac{\pi}{z_1} \quad \text{und} \quad \frac{t}{2 r_2} = \frac{\pi}{z_2}$$

ein, so wird

$$F = \varphi \pi K \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{v}{2}.$$

In der Regel pflegt man für die Rechnung $v = 2$ anzunehmen, d. h. man setzt voraus, daß der Eingriff in dem Abstände t vor der Centrale beginne und um ebenso weit hinter derselben endige, und es geht dann obiger Ausdruck über in:

$$F = \varphi \pi K \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{1}{3} \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right),$$

wenn man den Reibungscoefficienten zwischen gußeisernen Zähnen $\varphi = 0,11$ und daher $\varphi \pi = \frac{1}{3}$ annimmt.

Aus der vorstehenden Entwicklung ist auch sogleich klar, daß bei innerem Eingriffe der Ausdruck

$$F = \varphi \pi \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) \frac{v}{2}$$

folgt, da hierbei die Bewegung des inneren Rades bei festgehaltenem äußeren Rade in jedem Augenblicke auf eine Drehung

$$\partial \omega = \frac{r_2 - r_1}{r_2} \partial \alpha$$

hinausläuft, und ebenso wird für eine Zahnstange, für welche man r_2 oder z_2 unendlich groß anzusehen hat,

$$F = \varphi \pi \frac{P}{\sin \gamma} \frac{1}{z_1} \frac{v}{2}$$

folgen.

Diese Formeln gelten, wie aus der Entwicklung hervorgeht, nur unter der Voraussetzung, daß der Eingriff vor und hinter der Centrale in gleichen Abständen $\frac{v}{2} t$ beginne und endige. Es ist bei dieser Untersuchung stillschweigend

vorausgesetzt worden, daß der ganze zu übertragende Druck $K = \frac{P}{\sin \gamma}$ immer nur von einem einzigen Zahne aufgenommen werde, was offenbar nur dann stattfindet, wenn $v = 1$ ist, d. h. wenn der Eingriff nur auf

einer Strecke gleich der Theilung stattfindet. Im Allgemeinen wird indeß, da man e stets größer als die Theilung annimmt, auch mehr als ein einziges Zähnpaar gleichzeitig im Eingriffe sein. Wählt man z. B. $v = 2$, so wird der Druck P stets auf zwei Zähne sich vertheilen, daher auch an zwei Zähnen gleichzeitig Reibung stattfinden, mit der Maßgabe jedoch, daß auf jeden Zahn auch nur etwa die Hälfte des ganzen Druckes, also:

$$\frac{K}{2} = \frac{P}{2 \sin \gamma}$$

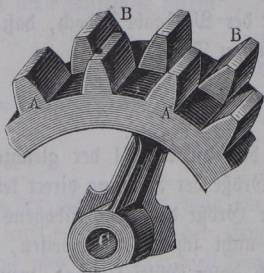
übertragen wird. Es geht daraus hervor, daß die Anzahl der gleichzeitig im Eingriffe stehenden Zähnpaare auf die Größe der Reibung direct keinen Einfluß hat, sondern nur insofern, als die Größe des Eingriffsbogens νt damit in Beziehung steht. Es ist übrigens nicht schwer zu beweisen, daß diese letztere Behauptung allgemein, also auch dann Gültigkeit hat, wenn ν nicht durch eine ganze, sondern durch eine gebrochene Zahl, z. B. 1,6, dargestellt ist. In diesem Falle wird der Druck abwechselnd durch ein einziges Zähnpaar in ganzer Größe auf einem Wege $0,4t$ und dann durch zwei Zähnpaare von jedem in halber Größe auf einem Wege $0,6t$ übertragen werden, u. s. f.

Wenn aber dennoch nach den entwickelten Formeln die Reibung um so kleiner ausfällt, je größer die Zähnezahlen z_1 und z_2 der Räder sind, so liegt der Grund hiervon einfach darin, daß bei größeren Zähnezahlen, d. h. bei kleinerer Theilung der Eingriffswinkel ebenfalls kleiner gemacht werden kann, wodurch die Reibung sich vermindert. Mit Rücksicht hierauf ist es daher gerathen, die Theilung so klein zu machen, als die nach §. 78 zu urtheilende Festigkeit der Zähne überhaupt gestattet. Da diese Festigkeit eine gewisse Größe der Theilung bedingt, welche man wenigstens annehmen muß, so hat man, theils zur Verminderung der Reibung, hauptsächlich aber zur Erreichung eines möglichst gleichmäßigen Ganges für gewisse Arbeitsmaschinen (z. B. Hobelmaschinen), zuweilen die Construction der sogenannten Stufenräder gewählt. Denkt man sich ein gewöhnliches Zahnrad mit z_1 Zähnen von der Theilung t durch eine zur Axe senkrechte Mittelebene in zwei Räder zerschnitten und diese, genau um die halbe Theilung gegen einander verdreht, wieder vereinigt, so erhält man ein Zweistufenrad, Fig. 271 (a. f. S.), und es ist klar, daß ein solches Rad mit seinem entsprechenden Partner genau so arbeitet, als ob es $2z_1$ Zähne, d. h. eine Theilung $\frac{t}{2}$ hätte.

Wenn man nun an Räder überhaupt die Bedingung stellt, daß der Eingriffsbogen gleich der ν fachen Theilung sein soll, so wird bei dem zweistufigen Rade mit z_1 Zähnen dieser Bogen offenbar nur $\nu \frac{t}{2}$, d. h. wie für ein Rad

derselben Größe, aber mit $2z_1$ Zähnen zu sein brauchen, und es folgt ohne Weiteres, daß die Reibung zwischen diesem Rade und seinem gleichfalls zweistufigen Partner mit z_2 Zähnen sich berechnet zu

Fig. 271.



$$F_1 = \pi \varphi \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{2z_1} + \frac{1}{2z_2} \right) \frac{v}{2} = \frac{1}{2} F,$$

also nur halb so groß, als für die einstufigen Räder mit gleichen Zähnezahlen. Dies setzt aber natürlich voraus, daß bei den zweistufigen Rädern die Länge der Zähne derartig verringert wird, daß der Eingriffbogen nur $v \frac{t}{2}$ beträgt. Hierzu

ist beiläufig nur etwa $\frac{1}{4}$ von der dem einstufigen Rade zukommenden Zahnkopfhöhe erforderlich. Wollte man diejenige Zahnlänge, welche dem einstufigen Rade zukommt, auch für das zweistufige beibehalten, so würde eine Verminderung der Zahnreibung nicht erreicht werden, da diese von dem Eingriffswinkel ε abhängt, welcher bei unveränderter Zahnhöhe auch unverändert bleibt. Hierbei würde auch der andere Vortheil verloren gehen, welchen man durch Stufenräder erreichen will, der nämlich eines gleichmäßigeren Ganges. Bedenkt man nämlich, daß die Einwirkung zweier Zähne um so mehr von dem idealen Bewegungszustande, wie er den Aroiden entspricht, abweichen wird, in je größerem Abstände von der Momentanaxe die Zähne zur Berührung kommen, so erkennt man sofort, daß die Anordnung der Stufenräder nur dann jene Unregelmäßigkeiten herabzuziehen gestattet, wenn gleichzeitig die Länge der Zähne, d. h. deren Hervorragungen über die Momentanaxenflächen verringert werden. Unter dieser Voraussetzung, daß $e = v \frac{t}{3}$ sei, giebt das dreistufige Rad, Fig. 272, dann auch nur eine Reibung

$$F_1 = \pi \varphi \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{3z_1} + \frac{1}{3z_2} \right) \frac{v}{2} = \frac{1}{3} F.$$

Denkt man ein solches Stufenrad aus sehr vielen sehr schmalen Rädern bestehend, so nehmen bei einer unendlich großen Anzahl die Zähne eine schräge Stellung gegen die Axe an, Fig. 273. Diese zuerst von White*) angegebenen Räder gestatten offenbar, durch eine sehr geringe Länge der Zähne die Reibung herabzuziehen, wogegen indessen durch

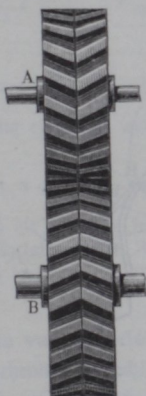
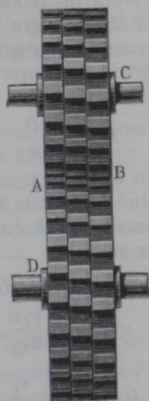
*) White, Century of Inventions. 1822.

die schräge Stellung der Zahnflächen schädliche Seitendrücke nach den Aenrichtungen erzeugt werden, welche zu neuen Reibungswiderständen

Fig. 272.

Fig. 274.

Fig. 273.



an den Stirnflächen und Enden der Zapfen Veranlassung geben. Zwar hat man diese Seitendrücke aufzuheben gesucht durch Combination zweier White'schen Räder mit Zähnen, die nach beiden Seiten hin gleiche Neigung gegen die Aze haben, Fig. 274, doch

haben diese, wie überhaupt die schrägen Zähne, sich wenig in die Praxis eingeführt, hauptsächlich wohl aus dem Grunde, weil der Druck der Zähne immer auf eine sehr geringe Fläche, streng genommen in einen Punkt, concentrirt ist, woraus ein schneller Verschleiß resultirt. Man wendet Räder mit einseitig schrägen Zähnen meist für Apparate an, von denen man bei geringer zu übertragender Kraft einen möglichst gleichmäßigen Gang erfordert, z. B. bei den sogenannten Universal-drehstühlen der Uhrmacher. Räder mit nach beiden Seiten hin schrägen Zähnen hat man unter anderem auch für Eisenbahnen mit steiler Steigung vorgeschlagen.

Es ist übrigens leicht zu erkennen, daß die Form der schrägen Zähne diejenige stark ansteigender Schraubenflächen sein muß, weswegen man solche Räder auch oft als Schraubenräder bezeichnet, obwohl von einer eigentlichen Schraubenwirkung nicht die Rede sein kann.

Anmerkung. Wenn die Zahnprofile andere als evolventenförmige Gestalt haben, so bestimmt sich die Reibung in ähnlicher Art, wie für diese im Obigen geschehen. Es sei beispielsweise die allgemeine cycloidische Verzahnung zu Grunde gelegt, bei welcher die Profile durch Abwälzung der beiden Kreise C_1 und C_2 , Fig. 275 (a. f. S.), von den Halbmessern q_1 und q_2 auf den Theilkreisen A' und B' erzeugt werden, und seien wieder $GP = e_1$ und $PH = e_2$ die Eingriffstrecken, also $E_1P = E_2P = e_1$ und $PF_1 = PF_2 = e_2$ die Eingriffsbogen auf den Theilkreisen. Hier bildet die Druckrichtung mit der Centrale einen ver-

änderlichen Winkel, welcher 90° beträgt, wenn die Berührung in P stattfindet, während für die äußersten Berührungspunkte G und H die Richtung des Druckes durch GP und PH gegeben ist. Bezeichnet γ den mittleren Winkel dieser Druckrichtung gegen die Centrale, welcher nur wenig verschieden ist von einem rechten, so hat man

$$K = \frac{P}{\sin \gamma}.$$

Der Abstand λ irgend eines Punktes G_0 von dem Momentancentrum P ist ferner gegeben durch

$$\begin{aligned} PG_0 &= 2 \varrho_1 \sin \frac{1}{2} G_0 C_1 P \\ &= 2 \varrho_1 \sin \frac{r_1 \alpha}{2 \varrho_1}, \end{aligned}$$

da

$$G_0 C_1 P = \frac{r_1}{\varrho_1} \alpha$$

ist, unter α wieder den Winkel verstanden, um welchen das Rad A gedreht werden muß, wenn der Berührungspunkt von G_0 nach P vorrücken soll. Da im Uebrigen wieder

$$\theta \omega = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \Delta \alpha$$

bei äußerem Eingriffe ist, $\left(\frac{r_2 - r_1}{r_2} \right.$ bei innerem Eingriffe), so hat man wie oben wieder:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\varepsilon_1} \varphi K \lambda \Delta \omega = \varphi K \int_0^{\varepsilon_1} 2 \varrho_1 \sin \frac{r_1 \alpha}{2 \varrho_1} \frac{r_1 + r_2}{r_2} \Delta \alpha \\ &= \varphi K 4 \varrho_1^2 \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \left(\cos 0 - \cos \frac{r_1 \varepsilon_1}{2 \varrho_1} \right). \end{aligned}$$

Setzt man hierin annähernd

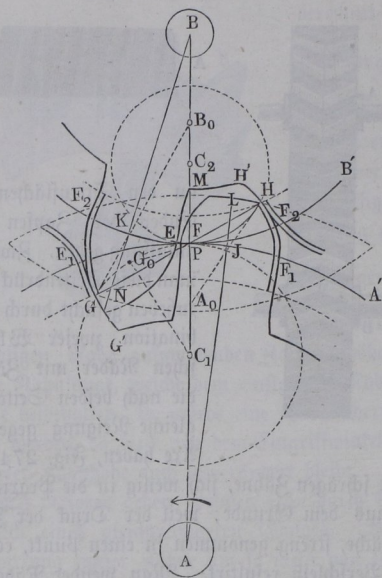
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2},$$

so folgt:

$$A_1 = \varphi K 4 \varrho_1^2 \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} \frac{r_1^2 \varepsilon_1^2}{8 \varrho_1^2} = \varphi K \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{r_1^2 \varepsilon_1^2}{2}.$$

Da der Weg, auf welchem diese Arbeit verrichtet wird, $r_1 \varepsilon_1$ ist, so folgt die auf den Theilkreis reducirte Reibung:

$$F = \frac{A_1}{r_1 \varepsilon_1} = \varphi K \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \frac{r_1 \varepsilon_1}{2},$$



oder, wenn wieder

$$r_1 e_1 = e_1 = e_2 = \frac{e}{2} = \frac{v t}{2} \quad \text{und} \quad \frac{t}{2r} = \frac{\pi}{z}$$

gesetzt wird,

$$F = \pi \varphi K \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{v}{2} = \pi \varphi \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{v}{2}.$$

Der gefundene Ausdruck

$$F = \pi \varphi \frac{P}{\sin \gamma} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{v}{2}$$

kann daher als allgemein gültig angesehen werden, und wenn man $\sin \gamma = 1$ setzt, so erhält man:

$$F = \pi \varphi P \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \frac{v}{2}.$$

Man erkennt übrigens, daß die Reibung der Evolventenzähne etwas größer sein wird, als diejenige der Cycloidenzähne, insofern bei ersteren der Winkel γ meist etwas kleiner ist als bei letzteren.

Allgemeines über die verschiedenen Zahnformen. Was die §. 80.

Anwendung der im Vorhergehenden betrachteten Zahnformen betrifft, so kann man zunächst bemerken, daß auf möglichst genaue und richtige Zahnformen vorzugsweise bei schnellgehenden Axen besondere Aufmerksamkeit verwendet werden muß, da eine ungenaue und unrichtige Form nothwendig ein veränderliches Umsehungsverhältniß zur Folge hat, aus welchem Stoßwirkungen entstehen, die um so beträchtlicher ausfallen, je größer die in den Axen aufgespeicherten lebendigen Kräfte sind. Bei langsam gehenden Axen, wie z. B. bei den Wellen der Windwerke, sind die Nachtheile, welche aus incorrecten Zahnformen entstehen, nur unerheblich, und kann für solche Fälle die Anwendung von Rädern zugelassen werden, deren Zahnprofile nicht genau den obigen Bedingungen einer gleichmäßigen Bewegungsmitteltheilung entsprechen, wenn dies aus praktischen Gründen, etwa wegen Benutzung vorhandener Modelle, wünschenswerth erscheint. Niemals indessen sollte man bei den schnellgehenden Triebwerksrädern, welche große Kräfte zu übertragen und bedeutende Massen in Umschwingung zu setzen haben, derartige Gründe maßgebend sein lassen, wenn die Zahnprofile den Bedingungen einer gleichmäßigen Bewegungsübertragung nicht so genau wie nur irgend möglich genügen. Die Nachtheile unrichtiger Zahnformen lassen sich in diesem Falle leicht übersehen. Stellt man sich vor, eine Ase A , die sich gleichmäßig mit der Winkelgeschwindigkeit α dreht, solle eine andere Ase B mit der Winkelgeschwindigkeit β bewegen, und seien zu dem Zwecke zwei Zahnräder von den Halbmessern a und b , also so, daß $a\alpha = b\beta$ ist, angeordnet. Sind nun die Zahnformen nicht richtig gewählt, so daß also die Druckrichtung nicht stets durch das Momentancentrum geht, vielmehr die Centrale abwechselnd in größerem (a_1) oder geringerem (a_2) Abstände als a von der Ase A schneidet,

so nimmt die Welle *B* dem entsprechend eine schwankende Winkelgeschwindigkeit und zwar eine größere als β im ersten Falle an, d. h. wenn $a_1 > a$, und eine kleinere im letzteren Falle, wo $a_2 < a$ ist. In Folge dessen wird der ganzen mit der Welle *B* verbundenen Masse bald eine Beschleunigung ertheilt, wozu ein größerer Druck zwischen den Zähnen erforderlich ist, als der dem durchschnittlichen Arbeitswiderstande der Welle *B* entsprechende, bald wird die Welle *B* vermöge der in ihr aufgespeicherten lebendigen Kraft derjenigen *A* voranzueilen bestrebt sein, indem sie zur Ueberwindung des Nutzwiderstandes jene lebendige Kraft theilweise verwendet. In diesem Augenblicke wird der Zahn des Rades *b* nicht mehr von demjenigen des Rades *a* gedrückt, sondern er drückt bei seinem Voreilen mit seiner Hinterfläche gegen die Rückfläche des Zahns von *a*. Hiermit ist ein gewisser Stoß verbunden wegen des zwischen den Zähnen unvermeidlichen Flankenspielraums, welchen der Zahn von *b* erst durchlaufen muß, ehe seine Rückfläche auf die Hinterfläche des Zahns von *a* trifft. Unmittelbar darauf bei Einwirkung des nächsten Zähnpaars wird der Zahn von *b* wieder von dem von *a* eingeholt, wobei wieder ein kleiner Stoß zwischen den Vorderflächen eintritt. Da dieser Vorgang in jeder Minute nz mal sich wiederholt, unter n die Umdrehungszahl und unter z die Zähnezahlszahl eines der Räder verstanden, so erklärt sich zur Genüge das klappernde Geräusch, welches bei schnellem Gange und Anwendung unrichtiger Zahnformen sich einstellen muß. Daß durch die fortwährend sich wiederholenden Vibrationen, denen das Material hierbei ausgesetzt ist, die Festigkeit desselben auf die Dauer sehr gefährdet wird, ist eine bekannte Thatsache. Man erkennt hieraus auch, daß der erwähnte Nachtheil um so beträchtlicher sich äußern muß, je größer die Umfangsgeschwindigkeit der Räder, je größer die bewegten Massen und je größer der Flankenspielraum ist, welchen letzteren thunlichst herabzuziehen ebenfalls eine möglichst genaue Ausführung namentlich Theilung der Räder erforderlich ist. Insbesondere fallen, wie leicht erklärlich ist, jene Nachtheile ins Gewicht, wenn schwere Schwungräder, wie bei Walzwerken zuweilen üblich, der größeren Geschwindigkeit wegen, nicht auf der Dampfmaschinenwelle, sondern auf einer von dieser durch Zahnräder betriebenen Ase umgedreht werden, ein Losrütteln der Räder auf dieser Ase und Warmlaufen ihrer Lager ist in solchem Falle selbst bei der sorgsamsten Ausführung oft kaum zu vermeiden.

Aus dem Vorstehenden erklärt sich auch die Vorzüglichkeit hölzerner Zähne bei schnellgehenden Triebädern, da das Holz gerade gegen lebendige Kräfte eine so große Arbeitsthätigkeit zu äußern vermag, und zwar versteht man immer nur das eine von zwei zusammenarbeitenden Rädern, meistens das treibende, mit Holzzähnen. Giebt man dem größeren Rade die hölzernen Zähne, so widerstehen dieselben wegen des weniger häufigen Angriffs allerdings länger, bei der nach Zahnen aber doch nöthigen Erneuerung sind die

Kosten indeß auch entsprechend größer, und der Zeitverlust oft bedeutend. Trotz der oft gegebenen entgegengesetzten Regel scheint es daher zweckmäßiger zu sein, das kleinere Rad mit den hölzernen Zähnen zu versehen, da man von diesem auch ein Reserverad leicht vorrätzig halten kann.

Für die Räder, von denen das eine mit Holzzähnen versehen ist, eignet sich besonders die Geradflankenverzahnung, und zwar sowohl wegen der leichteren Bearbeitung der Flächen, als auch deswegen, weil bei diesen nahezu parallelen Flächen die Flanken Langholz zeigen können, während bei nach außen sich stark verjüngenden Zähnen, wie namentlich die nach Evolventen geformten Zähne des kleineren Rades es sind, unvermeidlich einzelne Fasern als Hirnholz auf den Flanken zu Tage treten. In Folge dessen werden solche Zähne durch das eingreifende eiserne Rad sehr schnell abgenutzt, insbesondere wenn die stemmende Wirkung vor der Centrale beträchtlich ist, wobei der eiserne Zahn wie ein Werkzeug gegen den Spahn arbeitet. Im Uebrigen sind die Geradflanken-zähne bei eisernen Rädern nicht zu empfehlen, da insbesondere bei den kleineren Rädern mit wenig Zähnen wegen der starken Convergenz der Flanken die Zähne hinten im Bruchquerschnitte sehr geschwächt werden, daher man behufs genügender Festigkeit die Theilung und damit die Zahnlänge vergrößern und somit die Nachtheile größerer Zahnreibung und eines weniger sanften Ganges in Kauf nehmen muß. Nur bei ganz kleinen aus Schmiedeeisen zu fertigenden Getrieben für Hebzuge, bei denen es auf die Möglichkeit der Verwendung einer sehr geringen Zähnezahl (bis zu 3 herab) ankommt, wendet man zuweilen wohl gerade Flanken an, da diese allein eine so geringe Zähnezahl gestatten, und das verwendete Material doch die genügende Festigkeit gewährt. Auch die Triebstockverzahnung empfiehlt sich nur für schmiedeeiserne Räder, in welchem Falle eine ausgezeichnete Festigkeit durch sie zu erlangen ist; die hölzernen Stockgetriebe, wie sie in älteren Mühlen-einrichtungen vorkommen, werden heute kaum noch ausgeführt. In Uhren und Winden dagegen sind Triebstöcke vielfach noch im Gebrauche.

Hinsichtlich der Festigkeit sind die nach Evolventen geformten Zähne vorzüglich zu nennen, da deren Form am meisten der Form von Balken gleichen Widerstandes sich nähert. Man kann in Folge dessen die Theilung bei demselben Kraftübertrag geringer machen und erhält dadurch die mit größeren Zähnezahlen verbundenen Vortheile geringerer Reibung und sanfteren Ganges. Nur für sehr geringe Zähnezahlen (Windetgetriebe 2c.) sind die Evolventen-zähne weniger gut zu gebrauchen, da die Minimalzahl eine größere ist, als bei Cycloidenzähnen. Auch wenn die beiden mit einander arbeitenden Räder sehr ungleiche Größe haben, werden meist die Zähne des kleinen Rades so spitz, daß ein Abbrechen der oberen Ranten zu befürchten ist, und pflegt man aus diesem Grunde bei Rädern, deren Verhältniß etwa die Zahl 5 übersteigt, eine andere Zahnform zu wählen. Man macht den Evolventenzähnen zu-

weisen den Vorwurf, daß sie wegen der schrägen Druckrichtung einen verstärkten Nendruck geben, ein Nachtheil, der aber viel weniger beträchtlich ist, als es scheint. Denn setzt man die übliche Neigung der Druckrichtung gegen die Centrale von 75° voraus, so bestimmt sich der aus einem Umfangswiderstande P folgende Nendruck nur zu

$$\frac{P}{\sin 75^{\circ}} = \text{circa } 1,04 P.$$

Auch bei den Cycloidenzähnen ist die Druckrichtung im Allgemeinen geneigt gegen die Centrale, und zwar unter einem veränderlichen Winkel, welcher nur in einem einzigen Augenblicke zu einem Rechten wird, wenn die Zähne sich in der Momentanaxe berühren. Wenn nun auch die durchschnittliche Abweichung der Druckrichtung von der Tangente der Theilkreise bei den Cycloidenzähnen etwas geringer sein wird, als bei der Evolventenverzahnung, so ist doch im ersteren Falle die Schwankung dieser Druckrichtung und damit die Veränderlichkeit der Druckkraft für den Verschleiß der Zähne und den ruhigen Gang der Räder nicht besonders günstig und die daraus folgenden Nachtheile werden meist größer sein als der aus der unbedeutenden Vergrößerung des Nendrucks bei Evolventenzähnen hervorgehende.

Zu den Vortheilen der letzteren Verzahnungsmethode muß insbesondere noch der Umstand gerechnet werden, daß die nach Evolventen gebildeten Zahnprofile richtige bleiben, auch wenn man die Nren um eine gewisse geringe Größe einander nähert oder von einander entfernt. Eine geringe Entfernung der Nren tritt in den meisten Fällen in Folge des Lagerverschleißes von selbst ein, und andere als Evolventenzähne können dann nicht mehr richtig zusammenarbeiten. Andererseits ist in der Eigenthümlichkeit, die Nren ein wenig nähern zu können, die Möglichkeit geboten, bei der Montirung den schädlichen Flankenspielraum auf das thunlich kleinste Maß zu verringern. Daß eine solche geringe Verschiebung der Nren unbeschadet der Richtigkeit der Zahnprofile geschehen kann, ergibt sich leicht daraus, daß die für die Zahnformen zu Grunde gelegten Evolutenkreise stets eine gemeinschaftliche Tangente behalten, welche die Centrale in einem solchen Punkte schneidet, dessen Abstände von den Nren sich wie die Halbmesser der Evolutenkreise verhalten. Eine Näherung der Nren wird also nur den Einfluß haben, daß die beiden Kreise gleicher Geschwindigkeit oder die Theilkreise etwas kleiner werden, ohne daß ihr gegenseitiges Verhältniß geändert wird, und daß die Druckrichtung eine etwas größere Neigung gegen die Centrale annimmt; die Eingriffsbögen werden dabei unbedeutend größer, da die Kopfhöhen der Zähne es werden. Das Entgegengesetzte findet bei einer Entfernung der Nren von einander statt. Diese Eigenschaft läßt die Evolventenzähne in solchen Fällen sehr geeignet erscheinen, wo, wie bei Walzwerken, die Nren

einen veränderlichen Abstand haben müssen. Aus allen diesen Gründen kann man wohl die Evolventenzähne zu den vollkommensten rechnen.

Was die kreisbogenförmigen Zähne anbetrifft, so ist ein Vortheil derselben nicht einzusehen, da sie erstens doch als Annäherungsformen nur in einer oder zwei Berührungslinien genau richtige Bewegungsübertragung ergeben und ihre einfachere Begrenzung bei der Darstellung der Räder keineswegs Erleichterung verschafft; letzteres gilt höchstens für die Anfertigung der Zeichnungen, für welche man sich daher wohl dieses Verfahrens bedienen kann, wenn dieselben nicht zur unmittelbaren Ausführung dienen. Nur in besonderen Fällen wird die Kreisbogenverzahnung räthlich erscheinen, wenn aus Festigkeits- oder sonstigen Rücksichten eine Form wünschenswerth ist, der man mit Kreisbögen sich am besten annähern kann. Ein besonderer Nachtheil des nach §. 74 aus zwei Kreisbögen zusammengesetzten Zahnprofils liegt darin, daß diese Bögen im Theilkreise nicht tangential in einander übergehen, sondern eine stumpfe Ecke bilden, welche sich bald abnutzen muß, wenn man nicht von vornherein eine entsprechende Abrundung vornimmt.

Schließlich mag hier darauf aufmerksam gemacht werden, daß in neuerer Zeit, wo die vorzüglich arbeitenden Räderformmaschinen sich mehr und mehr in den Gießereien einführen, der Constructeur von Triebwerken weniger abhängig von den Modellböden ist, und daß aus diesem Grunde die Satzräderysysteme wesentlich an ihrer früheren Bedeutung verlieren. Da bei der Herstellung der Räder durch Formmaschinen die gewählte Zahnform für die Anfertigungskosten so gut wie gleichgültig ist, so ist bei der Veranlagung von Triebrädern eine größere Freiheit gelassen, und es werden die früher meist festgehaltenen starren Regeln namentlich über die Höhe der Zahnkronen u. weniger maßgebend sein.

Räder für nicht parallele Axen. Für den Fall, daß die Axen §. 81. der Räder nicht parallel sind, ist die Form der zugehörigen Momentanaxenflächen bereits in §§. 45 und 46 näher untersucht und insbesondere gefunden worden, daß bei sich schneidenden Axen die Aroide zwei bestimmte Kegelmäntel sind, deren gemeinsame Spitze im Axendurchschnitte liegt, während bei windschiefen Axen die Momentanaxenflächen durch zwei gewisse Umkehrungshyperboloide dargestellt werden. Auch die conischen und hyperboloidischen Räder werden in ähnlicher Weise mit Zähnen versehen, wie dies im Vorstehenden betreffs der Stirnräder gezeigt ist, und es handelt sich wie dort auch hierfür um die Untersuchung der Begrenzungen, die diesen Zähnen zu geben sind, wenn durch den Zahneingriff der gleichmäßigen Bewegungsübertragung kein Eintrag geschehen soll. Hinsichtlich der Construction richtiger Zahnflächen läßt sich nun ein allgemein gültiges Bildungsgesetz aufstellen, aus welchem die Regeln für die einzelnen speciellen Fälle, also

auch für die Stirnräder sich ergeben. Um dieses Gesetz zu erkennen, sei zuerst ein Hilfslehrsatz bewiesen, welcher eine merkwürdige Eigenschaft er giebt, die den Momentanaxenflächen zweier Räder ganz allgemein zukommt.

Zu dem Ende seien wieder ganz allgemein zwei zu einander windschiefe Axen AA_1 und BB_1 , Fig. 276, vorausgesetzt, deren kürzester Abstand $A_0B_0 = d$ und deren Neigungswinkel gleich δ sein mag. Bezeichnet man wieder mit α und β die Drehungswinkel der Axen in der Zeiteinheit, so erhält man nach §. 46 die zugehörige Momentanaxe der relativen Bewegung in einer Geraden MM_1 , welche in einer Ebene liegt, die parallel ist mit dem durch AA_1 und BB_1 möglichen parallelen Ebenenpaar, und deren Abstände von den Axen gegeben sind durch die Beziehung

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_2},$$

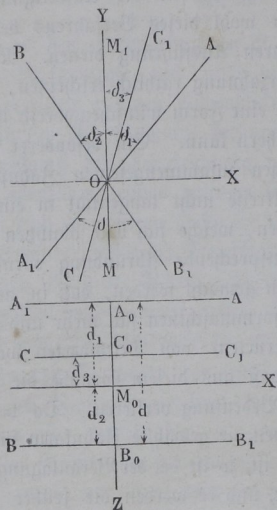
wenn unter δ_1 und δ_2 wiederum die Neigungen der Axen AA_1 und BB_1 gegen die Momentanaxe verstanden sind, für welche man hat:

$$\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Denkt man sich diese Momentanaxe MM_1 einmal um AA_1 und einmal um BB_1 unter Festhaltung ihrer Neigung und ihres Abstandes herumgedreht, so werden nach dem Früheren zwei Umdrehungshyperboloide erzeugt, die sich in MM_1 berühren und welche in dem vorliegenden Falle als die Momentanaxenflächen anzusehen sind. Man kann bemerken, daß diese beiden Axoide zwei ganz bestimmte sind, sobald die gegenseitige Lage der Axen, d. h. d und δ , sowie das Umsetzungsverhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ gegeben sind, und es mögen

diese Hyperboloide die für das Umsetzungsverhältniß $\frac{\alpha}{\beta}$ einander zugeordneten Axoide genannt werden. Man denke sich nunmehr zu dem einen dieser Axoide, etwa zu demjenigen mit der Axe AA_1 , ein drittes Axoid für ein beliebiges anderes Umsetzungsverhältniß etwa $\frac{\alpha}{\gamma}$ zugeordnet, und denke

Fig. 276.



dasselbe in solcher Lage, daß die Berührung zwischen dem ersten und dritten in derselben Geraden MM_1 geschieht, wie zwischen den betrachteten ersten Axoiden der Axen AA_1 und BB_1 . Man hat, um zu einem solchen dritten Axoide zu gelangen, nur nöthig, auf der gemeinsamen Normale A_0B_0 in einem Abstände $d_3 = C_0M_0$ von M_0 eine Axe CC_1 anzunehmen, welche in einer Ebene parallel mit den Axen AA_1 und BB_1 liegt und mit MM_1 einen Winkel δ_3 bildet, für welchen man hat

$$\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_3} = \frac{\gamma}{\alpha},$$

während gleichzeitig d_3 an die Bedingung geknüpft ist:

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_3}.$$

Dieses dritte Hyperboloid ist dann offenbar von solcher Beschaffenheit, daß es bei einer Drehung um den Winkel γ eine Drehung des Hyperboloids A um den Winkel α zur Folge haben würde, wenn man diese Hyperboloide wie zwei Frictionsräder auf einander wirken ließe, mit anderen Worten, die beiden Hyperboloide sind die richtigen Momentanaxenflächen für die zwei Axen AA_1 und CC_1 und entsprechend einem Umsetzungsverhältnisse $\alpha : \gamma$.

Betrachtet man nun das dritte Hyperboloid zur Axe CC_1 in Beziehung zu dem zweiten, der Axe BB_1 zugehörigen, so findet sich leicht, daß auch diese beiden Flächen die richtigen Momentanaxenflächen für die beiden Axen BB_1 und CC_1 sind, und zwar entsprechend einem Umsetzungsverhältnisse $\beta : \gamma$. Man erkennt dies sofort, wenn man

$$\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_3} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{durch} \quad \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{\beta}{\alpha}$$

und

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_3} \quad \text{durch} \quad \frac{d_1}{d_2} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_2}$$

dividirt, wodurch man zu

$$\frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_3} = \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{und} \quad \frac{d_2}{d_3} = \frac{\tan \delta_2}{\tan \delta_3}$$

gelangt, welche Gleichungen die Bedingungen enthalten, denen die Momentanaxenflächen der beiden Axen BB_1 und CC_1 für ein Umsetzungsverhältniß $\beta : \gamma$ genügen müssen. Die hieraus folgende Eigenschaft der Momentanaxenflächen für Räder läßt sich daher folgendermaßen aussprechen:

Wenn zwei Axen A und B von bestimmter Lage, deren Umsetzungsverhältniß $\alpha : \beta$ ist, gegeben sind, und man denkt zu der

einen Momentanaxenfläche der Aze A ein drittes Aroid C entsprechend dem Umsetzungsverhältnisse $\alpha : \gamma$, so ist dieses dritte Aroid C auch die dem zweiten Bzugeordnete Momentanaxenfläche und zwar für das Umsetzungsverhältniß $\beta : \gamma$.

Zur Veranschaulichung dieses Gesetzes kann man sich etwa vorstellen, die gedachten drei Hyperboloide A , B und C seien als materielle Flächen von äußerst dünnem Metallbleche gefertigt und in der gemeinsamen Berührungslinie MM_1 mit solcher Pressung gegeneinander gedrückt, daß mittelst der Friction nach Art wie bei Reibungsrädern die Drehung des einen eine entsprechende Drehung jedes anderen zur Folge hat. Wird nun das dritte Aroid C um einen Winkel γ gleichmäßig gedreht, so veranlaßt dasselbe eine gleichmäßige Drehung des Aroids A um den Winkel α und gleichzeitig eine gleichmäßige Drehung des Aroids B um den Winkel β , und zwar geschehen diese Drehungen α und β genau in denselben Beträgen, welche sie annehmen würden, wenn die beiden Aroide A und B direct aufeinander als Frictionsräder einwirkten. Die Drehung der letzteren geschieht also in dieser Weise mit Hilfe eines dritten Aroids, welches man daher mit dem Namen Hilfsaxoid belegen kann. Dieses Hilfsaxoid kann nun zwar in unendlich verschiedener Art gewählt werden, es ist dasselbe indessen keineswegs ganz willkürlich anzunehmen, sondern an die ganz bestimmten Bedingungen

$$\frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_3} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{d_1}{d_3} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_3}$$

geknüpft, welche überhaupt für zwei windschiefe Azen gelten. Denkt man sich daher alle möglichen Hilfsaxoide zu dem Aroidenpaar A und B , so legen die Azen C aller dieser Hilfsaxoide eine gewisse Regelfläche im Raume fest, deren Charakter sich in folgender Art bestimmt.

Betrachtet man die Momentanaxe MM_1 der Aroide zweier windschiefen Azen A und B als Y -Aze und den kürzesten Azenabstand $A_0 B_0$ als Z -Aze eines rechtwinkligen Coordinatensystems, so gilt für irgend ein Hilfsaxoid, dessen Aze den Abstand $M_0 C_0 = z$ von der Momentanaxe MM_1 hat, die Gleichung

$$\frac{z}{d_1} = \frac{\tan \delta_3}{\tan \delta_1},$$

wenn d_1 den Kehlkreisradius des Aroids A , und δ_3 und δ_1 die Reibungen der Momentanaxe gegen die Azen C und A bezeichnen.

Hierin nun $\tan \delta_3 = \frac{x}{y}$ gesetzt, erhält man als Gleichung der besagten Fläche für die Drehazen aller möglichen Hilfsaxoide

$$\frac{x}{y} = \frac{\tan \delta_1}{d_1} z \text{ oder } x = k y z,$$

unter k die dem zu Grunde gelegten Hauptaxoidenpaare A und B entsprechende Constante

$$k = \frac{\tan \delta_1}{d_1} = \frac{\tan \delta_2}{d_2}$$

verstanden.

Die durch diese Gleichung festgelegte Kegelfläche ist ein hyperbolisches Paraboloid. Dasselbe wird von irgend einer mit der XY -Ebene im Abstände $z = c$ parallel gelegten Ebene in der Ase des Hilfsaxoid vom Reelkreishalbmesser c geschnitten, während alle der XZ -Ebene parallelen Ebenen gerade, die die Momentanaxe schneidende Schnittlinien von der Form $x = k c_1 z$ liefern, wenn der Abstand der betreffenden Schnittebene zu $y = c_1$ angenommen ist. Eine im Abstände $x = c_2$ endlich parallel mit der YZ -Ebene gelegte Ebene giebt als Durchschnitt mit dieser Fläche eine gleichseitige Hyperbel von der Form $yz = \frac{c_2}{k}$. Man kann diese Fläche etwa die Drehaxenfläche der zu zwei gegebenen Hauptaxoiden zugehörigen Hilfsaxoide nennen.

Es ist klar, daß diese Fläche bei parallelen Axen oder Stirnrädern sowohl wie bei sich schneidenden Axen oder conischen Rädern in eine Ebene, nämlich in die Axenebene, übergeht. Im ersteren Falle kann jede in dieser Ebene den Axen parallele Gerade als Ase des Hilfsaxoids auftreten, während im letzteren Falle jede in der Axenebene gelegene und durch den Schnittpunkt der Axen gehende Gerade als Ase für das Hilfsaxoid angesehen werden kann.

Allgemeines Zahnbildungsgesetz. Man denke sich nun für irgend §. 82. zwei Räder, deren Axoide A und B seien, ein beliebiges drittes oder Hilfsaxoid C , und mit demselben fest verbunden irgend eine gerade oder krumme Linie L . Diese letztere wird dann, wenn man allen drei Axoiden die ihnen zugehörigen Drehungen ertheilt, relativ gegen die beiden Axoide A und B zwei gewisse Flächen erzeugen. Für die Anschauung kann man sich etwa die erzeugende Linie L als eine scharfe Schneide oder einen dünnen Draht und die Axen A und B mit plastischen Massen umkleidet vorstellen, in denen die Schneide bei der vorausgesetzten Bewegung ihre Spuren in Gestalt der beiden Flächen F_1 und F_2 hinterläßt.

Diese beiden Flächen haben die Erzeugende L in jedem Augenblicke gemein, und ist für die Verwendbarkeit der Flächen zu Zahnbegrenzungen erforderlich, daß sie in dieser Linie eine Berührung eingehen, sowie ferner, daß sie den Axoiden A und B die diesen eigenthümlich zugehörige relative Bewegung gegen einander gestatten. Die letztere Bedingung ist wegen der

nach dem vorhergehenden Paragraphen dem Hilfsaxoide zukommenden Eigenschaft immer erfüllt, wie man sich übrigens auch durch folgende Rechnung speciell überzeugen kann. Zu dem Ende denke man sich, wie schon öfter geschehen, das Hilfsaxoide C durch eine dem ganzen System ertheilte zusätzliche Drehung um die Ase CC_1 im Betrage $-\gamma$ in Stillstand gebracht und ersetze die beiden Drehungen, welche das Axoide A dadurch erhält (α um A und $-\gamma$ um C) durch eine Schraubung um die Momentanaxe MM_1 , deren Drehungsbetrag ω_a nach §. 46 sich bestimmt aus

$$\alpha : \omega_a = \sin \delta_3 : \sin (\delta_1 + \delta_3)$$

zu

$$\omega_a = \alpha \frac{\sin (\delta_1 + \delta_3)}{\sin \delta_3}$$

und deren Schiebung s_a beträgt:

$$s_a = (d_1 + d_3) \alpha \sin \delta_1.$$

In gleicher Weise sind die beiden Drehungen des Axoids B (β um B und $-\gamma$ um C) gleichbedeutend mit einer Schraubung um dieselbe Ase MM_1 im Drehungs- resp. Schiebungsbetrage

$$\omega_b = \beta \frac{\sin (\delta_2 - \delta_3)}{\sin \delta_3}$$

und

$$s_b = - (d_2 - d_3) \beta \sin \delta_2.$$

Hieraus ergibt sich nun ferner die relative Bewegung der beiden Axoide A und B gegen einander ebenfalls als eine Schraubenbewegung um die Momentanaxe MM_1 . Die Drehung dieser Schraubung beträgt:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_a - \omega_b = \alpha \frac{\sin (\delta_1 + \delta_3)}{\sin \delta_3} - \beta \frac{\sin (\delta_2 - \delta_3)}{\sin \delta_3} \\ &= \alpha \sin \delta_1 \frac{\sin (\delta_1 + \delta_3)}{\sin \delta_1 \sin \delta_3} - \beta \sin \delta_2 \frac{\sin (\delta_2 - \delta_3)}{\sin \delta_2 \sin \delta_3} \end{aligned}$$

oder da $\alpha \sin \delta_1 = \beta \sin \delta_2$ ist:

$$\omega = \alpha \sin \delta_1 (\cotg \delta_1 + \cotg \delta_2) = \alpha \frac{\sin (\delta_1 + \delta_2)}{\sin \delta_2}.$$

Für die Verschiebung der gedachten Schraubung hat man

$$s = s_a - s_b = (d_1 + d_2) \alpha \sin \delta_1 = d. \alpha \sin \delta_1 = d. \beta \sin \delta_2.$$

Nun stimmen aber diese Beträge der relativen Drehung und Verschiebung, welchen die Axoide A und B bei der gedachten Flächenerzeugung unterworfen sind, genau überein mit derjenigen relativen Schraubenbewegung, welche den

Äroiden A und B in Folge des verlangten Bewegungszustandes zukommt. Da also die mit einander correspondirenden Elemente der Flächen F_1 und F_2 gerade durch solche Bewegungen erzeugt sind, wie sie der für die Ären A und B verlangte Bewegungszustand erfordert, so liegt hierin der Beweis, daß diese Flächen richtige Zahnflächen abgeben können, vorausgesetzt, daß sie in der ihnen gemeinsamen Linie L jederzeit eine Berührung eingehen.

Um zu untersuchen, wann dies der Fall ist, kann man bemerken, daß irgend ein Punkt p_0 der erzeugenden Linie, Fig. 277, bei den gedachten Schraubungen des Hilfsäroides um die Momentanaxe MM_1 in jedem Augenblicke Bahnelemente p_0p beschreibt, welche auf dem von p_0 auf die Momentanaxe

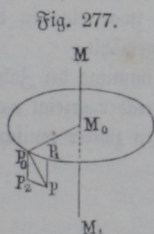


Fig. 277.

tanaxe gefällten Polstrahle p_0M_0 senkrecht stehen. Sei nun etwa T die Tangente an die erzeugende Linie L im Punkte p_0 und seien T_1 und T_2 die Tangenten an die Bahnen p_0p , welche derselbe Punkt p_0 in irgend einem Augenblicke zufolge der Schraubungen beschreibt, so müssen die beiden Berührungsebenen Tp_0T_1 und Tp_0T_2 der beiden gedachten Flächen F_1 und F_2 zusammenfallen, wenn diese Flächen in p_0 , d. h. in der Erzeugenden L sich berühren sollen. Diese Be-

dingung ist bei Stirnrädern und conischen Rädern offenbar immer erfüllt, da hier die beiden Bahntangenten T_1 und T_2 zusammenfallen. Bei den hyperboloidischen Äroiden windschiefer Ären dagegen, wo die Tangenten T_1 und T_2 der schraubenförmigen Bahnen von einander abweichen, ist die Berührung der Flächen in p_0 nur möglich, wenn daselbst die Tangente T an die Erzeugende auf dem Polstrahle p_0M_0 senkrecht steht, wie es mit den beiden Bahntangenten T_1 und T_2 immer der Fall ist, d. h. also, wenn die Erzeugende eine Gerade ist, welche der Momentanaxe parallel ist.

Hiernach läßt sich das allgemeine Bildungsgesetz für Zahnflächen wie folgt aussprechen:

„Man erhält für irgend zwei Räder paralleler oder sich schneidender Ären richtige Zahnbegrenzungen in denjenigen beiden Flächen, welche irgend eine mit einem Hilfsäroide fest verbundene beliebige Linie relativ gegen die Ären erzeugt, wenn man allen drei Äroiden die ihnen zugehörigen Drehungen theilt denkt. Bei windschiefen Ären ist die Erzeugende jedoch an die Bedingung geknüpft, eine mit der Momentanaxe stets parallel bleibende Gerade zu sein.“ Wie der letztgedachte Fall zu einem besonderen (spiraloïdischen) Zahneingriffe führt, wird in §. 86 gezeigt werden.

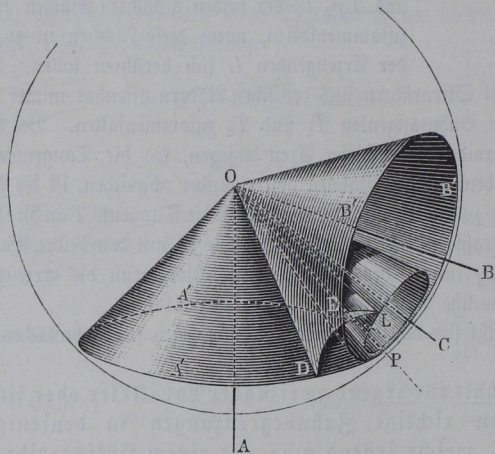
Bei windschiefen Ären kann die Schraubung eines beliebigen Hilfsäroides nach Obigem nur angenäherte Flächen mit punktwisever Berührung,

nämlich in denjenigen Punkten ergeben, in welchen die Tangente an die Erzeugende normal auf dem Polstrahl steht.

§. 83. **Conische Räder.** Mit Hilfe dieses ganz allgemein gültigen Gesetzes für die Bildung richtiger Zahnflächen, von welchem das in §. 67 für Stirnräder angegebene Gesetz nur als ein specieller Fall erscheint, ist es nun leicht, die Zahnflächen für conische Räder zu bestimmen. Hierbei gehen die Momentanaxenflächen der Räder eben so wie das anzuwendende Hilfsaxoid in normale Kreiskegelflächen über, deren gemeinschaftliche Spitze im Axendurchschnitte liegt. Der Einfachheit wegen sei auch hier, wie bei den Stirnrädern, eine Gerade als Erzeugungslinie der Zahnflächen und zwar eine in der Fläche des Hilfskegels liegende, also eine Seite desselben gewählt.

Dies vorausgesetzt, ergibt sich nun die Regel zur Bestimmung der Zahnflächen in ähnlicher Art, wie dies in §. 70 für die Stirnräder gezeigt worden ist. Sind OA und OB , Fig. 278, wieder die Axen zweier conischen

Fig. 278.



Räder, deren Axoide sich in der Geraden OP berühren, so nehme man als Hilfsaxoid einen dritten Kegel von der Axe OC an, welcher die Kegel A und B ebenfalls in dieser Momentanaxe berührt. Irgend eine Seite, z. B. OL dieses Hilfskegels, wird nun bei der im vorigen Paragraphen angenommenen Drehung aller drei Kegel relativ gegen die Axoide A und B zwei krumme Flächen beschreiben, welche ebenfalls als allgemeine Kegelflächen sich charakterisiren, da die Erzeugungslinie OL stets durch denselben festen Punkt O hindurchgeht. Es ist nach dem Früheren ersichtlich, daß

man die auf die gedachte Art entstehenden Flächen auch erzeugt denken kann durch eine Rollung des Kegels C auf dem einen Kegel A äußerlich und in dem anderen Kegel B innerlich. Hierbei wird die erzeugende Gerade OL eine um den Arendurchschnitt O als Mittelpunkt mit dem Halbmesser OL beschriebene Kugelfläche in zwei Curven LD und LE schneiden, welche man sphärische Cycloiden*) und zwar die durch äußere Rollung erzeugte LD eine sphärische Epicycloide, die durch innere Rollung entstandene LE eine sphärische Hypocycloide nennt. Diese sphärischen Curven kann man als die Grundlinien der Kegelflächen ansehen, welche die Zähne begrenzen.

Wenn man durch irgend einen Punkt L der Berührungslinie oder Momentanaxe zwei zu den Aren normale Ebenen legt, so schneiden dieselben die Aroide in zwei Kreisen, $PA'A'$ und $PB'B'$, welche auf einander rollen, und in welchen gleiche Geschwindigkeit stattfindet. Diese Kreise spielen offenbar bei den conischen Rädern eine ähnliche Rolle wie die Theilkreise bei den Stirnrädern, und heißen wohl auch Theilkreise, doch muß man zur unzweideutigen Bezeichnung dabei angeben, in welchem Abstände vom Arendurchschnitte O die Theilkreise zu verstehen sind. Daher kommt es, daß man bei conischen Rädern wohl von äußeren, inneren oder mittleren Theilkreisen und auch solcher Theilung spricht, je nachdem sich die Angaben auf den äußeren, inneren oder mittleren Umfang der Räder beziehen. Es ist klar, daß man mit Rücksicht auf diese Theilkreise in ähnlicher Art wie bei den Stirnrädern von Zahnköpfen und Zahnfüßen sprechen kann, und daß die hierfür bei jenen ermittelten Beziehungen, wie z. B. die, daß Zahnköpfe nur mit Zahnfüßen zusammenarbeiten können, auch für conische Räder ihre Geltung haben werden. Man wird daher auch hier, um jedem Rade sowohl Köpfe wie Füße zu geben, für jedes Rad zweimal eine Wälzung vornehmen müssen, so daß den Köpfen die Epicycloiden, den Füßen die Hypocycloiden zukommen. Ebenso ergiebt sich leicht, in welcher Art das bei den Stirnrädern über innere Verzahnung Gesagte auch für conische Räder seine Gültigkeit behält und kann hinsichtlich dessen, was man bei conischen Rädern überhaupt unter innerem Eingriffe zu verstehen hat, auf das in §. 45 Gesagte hingewiesen werden. In welcher Weise man bei conischen Rädern auch Triebstöcke anstatt der Zähne anwenden könnte, ist ebenfalls leicht zu finden, und es ist natürlich, daß hierbei die Stöcke nicht von cylindrischer Form sein können, sondern als Kegel gebildet werden müssen, die ihre Spitzen sämmtlich im Arendurchschnitte haben.

Was den Grenzfall zwischen äußerem und innerem Eingriffe anbetrifft, welcher bei den Stirnrädern durch die Zahnstange repräsentirt ist, so entspricht demselben bei conischen Rädern bekanntlich das Planrad, für welches

*) S. u. A. Verhandlg. d. Ber. 3. Beförderg. d. Gewerbfließes. Jhrg. 1876.

der halbe Spizewinkel 90° beträgt, während dieser Winkel bei äußerem Eingriffe spiz, bei innerem Eingriffe stumpf ist. Ebenso wie nun bei den Stirnrädern der Uebergang des erzeugenden Cylinders in eine Ebene zu einer besonderen, der Evolventenverzahnung führte, ebenso erhält man für conische Räder eine entsprechende besondere Zahnform, wenn man als drittes oder Hilfsazoid das Planrad auf den beiden Aroiden abwälzt. Läßt man nämlich den halben Spizewinkel δ_3 des rollenden Kegels C größer und größer werden, bis er den Werth des Rechtwinkels erreicht, so geht der Kegelmantel in eine Ebene über, welche die beiden Aroide in der Momentanzaxe OP berührt. Bei der Abrollung dieser Ebene auf den beiden Kegeln A und B erzeugt eine durch O gehende Gerade dieser Ebene Kegelflächen, deren Durchschnittslinien mit einer um O gelegten Kugel in der Geometrie bekanntlich als sphärische Evolventen bezeichnet werden. Ganz analog den Stirnrädern ist es auch hier ersichtlich, daß diese Flächen, welche etwa als sphärische Evolventenkegel bezeichnet werden können, bei äußerem Eingriffe der Kegeln nicht zu Zahnflächen benutzt werden können, da sie nur zur Bildung von Zahnköpfen Gelegenheit geben, welche bekanntlich nicht zusammenarbeiten können. Höchstens können diese Flächen bei dem innerlichen Eingriffe zwischen conischen Rädern in ähnlicher Weise verwendet werden, wie dies bei Stirnrädern mit innerem Eingriffe für die entsprechenden Evolventencylinder gilt. Man kann aber auch bei conischen Rädern evolventische Formen als Zahnflächen in ähnlicher Art wie bei Stirnrädern benutzen, wenn man das Planrad C nicht auf den Aroiden A und B direct, sondern auf gewissen Verhältnißkegeln A_1 und B_1 , Fig. 279, abwälzt, welche man in folgender Weise erhält. Legt man durch die Berührungslinie OM der beiden den Axen OA und OB zugehörigen Kegel eine Ebene unter einem gewissen Winkel φ gleich etwa 75° gegen die Axenebene, und denkt ferner concentrisch zu den Axen OA und OB die beiden diese Ebene berührenden Kegel, welche von jener Ebene in den Seiten OA_1 und OB_1 berührt werden, so kann man diese Kegel als die Grundkegel betrachten, auf welchen die Ebene oder das Planrad OA_1MB_1 abgewälzt werden muß, um zu einander gehörige Zahnflächen für die beiden Räder A und B zu erhalten. Hierbei erzeugt ein Radius wie z. B. OM des Planrades zwei conische Flächen, deren Durchschnitte mit der durch M um O gelegten Kugel die betreffenden sphärischen Evolventen sind, und es ist leicht in ähnlicher Art wie bei den Stirnrädern zu beweisen, daß auch diese Flächen noch richtige Zahnbegrenzungen ergeben müssen. Bezeichnet man nämlich die halben Spizewinkel dieser Kegel AOA_1 mit δ'_1 und BOB_1 mit δ'_2 , so hat man aus den sphärischen Dreiecken $OAM A_1$ bezw. $OBMB_1$:

$$\sin \delta'_1 : \sin \delta_1 = \sin \varphi : \sin 90^\circ$$

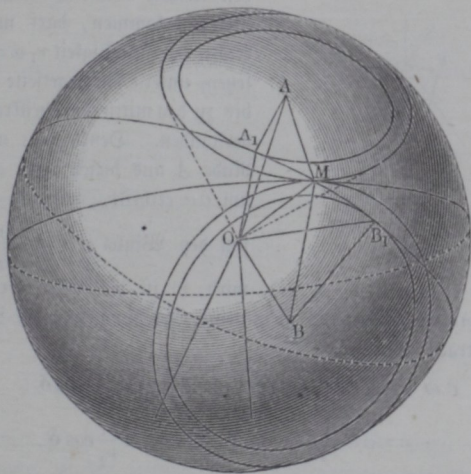
und

$$\sin \delta'_2 : \sin \delta_2 = \sin \varphi : \sin 90^\circ,$$

daher

$$\frac{\sin \delta'_1}{\sin \delta'_2} = \frac{\sin \delta_1}{\sin \delta_2} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Fig. 279.

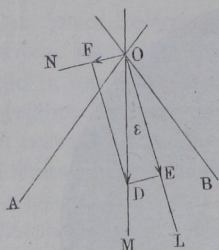


Bei einer Bewegung der beiden Kegel A und B in dem ihnen zukommenden Verhältnisse $\alpha : \beta$ der Winkelgeschwindigkeiten nehmen somit die Hilfskegel A_1 und B_1 , welche wohl als Verhältnißkegel bezeichnet werden, Drehungen an, deren Beträge in demselben Verhältnisse zu einander stehen, daraus folgt die Richtigkeit obiger Behauptung ähnlich wie in §. 73 für Stirnräder.

Zahnreibung conischer Räder. Es ist aus der vorstehenden Darstellung §. 84. klar, daß die erzeugende Linie in jeder ihrer Lagen die Verührungslinie der mit einander arbeitenden Zähne darstellt, und wenn man daher, wie vorstehend vorausgesetzt ist, die erzeugende Linie in der Oberfläche des Hilfsazoids liegend annimmt, so stellt diese letztere Fläche auch die Eingriffsfläche vor. Man kann aus dieser Betrachtung auch sogleich ein Urtheil über die Art und Größe der bei dem Zahneingriffe auftretenden Reibung gewinnen. Es findet eine Reibung zwischen den Zähnen offenbar nicht statt, sobald sich dieselben in der Momentanaxe OM berühren, weil die relative Bewegung dann lediglich in einer Wälzung um diese Verührungslinie besteht. Denkt man aber das Rad A , dessen mittlerer Halbmesser r_1 sein möge, aus dieser Lage um einen gewissen kleinen Winkel α gedreht,

wobei das Rad B mit dem mittleren Halbmesser r_2 um einen Winkel $\beta = \frac{r_1 \alpha}{r_2}$ sich gedreht hat, so findet die Berührung jetzt in einer gewissen Geraden OL , Fig. 280, statt, welche mit der Momentanaxe OM den

Fig. 280.



Winkel $MO L = \varepsilon$ bilden möge. Bei den kleinen Winkeln, welche hier nur in Betracht kommen, darf man mit hinreichender Genauigkeit $r_1 \alpha = r_2 \beta = l \varepsilon$ setzen, unter l die Kegelseite $OM = OL$ bis zu den mittleren Theilkreisen gerechnet verstanden. Denkt man nunmehr dem Rade A aus dieser Lage eine Drehung um $\partial \alpha$ ertheilt, wodurch das Rad B um den Winkel $\partial \beta = \frac{r_1}{r_2} \partial \alpha$ gedreht

wird, so ist die diesen Drehungen entsprechende relative Bewegung gleich einer Drehung um die Momentanaxe OM im Betrage

$$\begin{aligned} \partial \omega &= \sqrt{\partial \alpha^2 + \partial \beta^2 + 2 \partial \alpha \cdot \partial \beta \cdot \cos \delta} \\ &= \partial \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + 2 \frac{r_1}{r_2} \cos \delta}, \end{aligned}$$

wenn δ den Arenwinkel bedeutet.

Da nun in dem betrachteten Augenblicke die Zähne sich nicht in der Momentanaxe OM , sondern in der unter dem Winkel ε gegen dieselbe geneigten Geraden OL berühren, so zerlegt sich die Momentanaxenbewegung $\partial \omega$ in zwei Drehungen, eine $\partial \omega \cdot \cos \varepsilon$ um die Berührungslinie OL als Axe, und eine $\partial \omega \cdot \sin \varepsilon$ um eine durch O gehende in der Ebene $MO L$ liegende und auf OL senkrechte Axe ON . Es ergibt sich leicht, daß diese letztgedachte Axe senkrecht stehen muß auf den beiden Flächenelementen, in welchen sich die Zähne augenblicklich berühren, folglich bringt diese Drehungscomponente $\partial \omega \cdot \sin \varepsilon$ eine sogenannte bohrende Wirkung der Zahnflächen auf einander hervor, welche die Reibung erzeugt, zum Unterschiede von den Stirnrädern, wo durch eine einfache Verschiebung die Friction entsteht. Bezeichnet nun P den Normaldruck zwischen den Zähnen, und φP die Größe der Reibung, so kann man, den Druck P in dem mittleren Berührungspunkte concentrirt gedacht, die während der Drehung der Axe A um $\partial \alpha$ verzehrte Reibungsarbeit nach dem Angeführten zu $\varphi P \cdot l \partial \omega \cdot \sin \varepsilon$, oder da ε nur ein kleiner Winkel ist, annähernd genug zu

$$\varphi P l \varepsilon \partial \omega = \varphi P r_1 \alpha \partial \omega = \varphi P r_1 \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + 2 \frac{r_1}{r_2} \cos \delta} \cdot \alpha \partial \alpha$$

setzen. Nimmt man nun an, der Eingriff zweier Zähne finde sowohl vor als hinter der Momentanaxe in dem Betrage gleich der Theilung t , also in den Theilungswinkeln $\tau_1 = \frac{t}{r_1}$ der Ase A und $\tau_2 = \frac{t}{r_2}$ der Ase B statt, so erhält man die gesammte Reibungsarbeit während eines solchen Drehungswinkels offenbar zu

$$F = \varphi P r_1 \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + 2 \frac{r_1}{r_2} \cos \delta} \int_0^{\frac{t}{r_1}} \alpha \, d\alpha$$

$$= \varphi P \frac{t^2}{2 r_1} \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + 2 \frac{r_1}{r_2} \cos \delta}.$$

Führt man hierin wieder für r_1 und r_2 die Zähnezahlen z_1 und z_2 ein, indem man $r = \frac{t \cdot z}{2 \pi}$ setzt, so erhält man

$$F = \varphi P \frac{t}{2} \frac{2 \pi}{z_1} \sqrt{1 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + 2 \frac{z_1}{z_2} \cos \delta}$$

$$= \varphi P \pi t \sqrt{\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{2}{z_1 z_2} \cos \delta}.$$

Diese Formel gilt sowohl für den Eingriff vor wie hinter der Centrale, wenn man unter P den zwischen zwei aufeinander einwirkenden Zähnen stattfindenden Druck versteht; sie drückt daher auch die gesammte Reibungsarbeit aus, welche während der Bewegung durch einen Theilungsbogen stattfindet, wenn P den zwischen den Rädern überhaupt übertragenen Druck bedeutet, wie in §. 79 hinsichtlich der Stirnräder näher ausgeführt worden. Es ist auch klar, daß die Reibungsarbeit kleiner oder größer wird, wenn man den Eingriffswinkel kleiner oder größer als den Theilungswinkel $\frac{t}{r_1}$ annimmt. Für rechtwinkelige Axen wird $\cos \delta = 0$, daher

$$F = \varphi P \pi t \sqrt{\frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2}}$$

und für parallele Axen und äußeren Eingriff, also $\cos \delta = \cos 0 = +1$ erhält man

$$F = \varphi P \pi t \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right),$$

während man bei innerem Eingriffe für $\cos 180^\circ = -1$

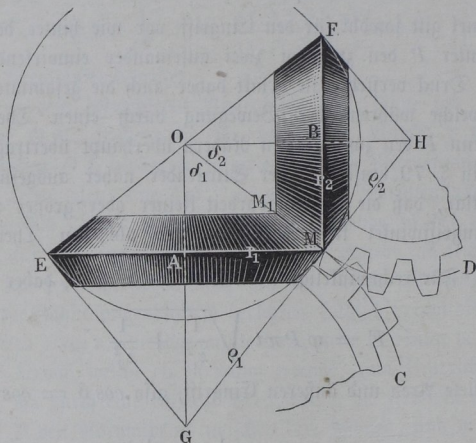
$$F = \varphi P \pi t \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right)$$

erhält, übereinstimmend mit §. 79.

§. 85. **Angenäherte Zahnform conischer Räder.** Die nach dem allgemeinen Gesetze (§. 82) gebildeten exacten Zahnformen conischer Räder bieten bei der bisherigen Herstellungsweise der Radmodelle nach Schablonen große praktische Schwierigkeiten dar, weil, wie aus dem Vorstehenden ersichtlich ist, die betreffenden Schablonen die Form sphärischer Cycloiden resp. sphärischer Evolventen haben müssen. Man würde daher die Schablonen auf der entsprechenden Kugelfläche entwerfen müssen, was in der Ausführung wegen der nicht möglichen Abwickelbarkeit der Kugelfläche sehr erschwert sein würde. Aus diesem Grunde ist daher schon von Tredgold (i. Tredgold's Edition of Buchanan's Essay on Millwork) eine einfachere Methode der Ausführung angegeben worden, welche allerdings nur angenähert richtige Zahnformen ergibt. Diese Methode, welche in fast alle Lehrbücher der Maschinenconstruction übergegangen ist, hat sich auch in der Praxis allgemeinen Eingang verschafft, indem die Abweichung von den correcten Zahnformen eine für die meisten der vorkommenden Fälle unbedeutende ist. Es soll diese Methode auch hier angeführt werden.

Die gedachte Annäherungsmethode für conische Räder beruht darauf, daß man an die um den Axienschnitt O der Räder durch den Punkt M , Fig. 281,

Fig. 281.

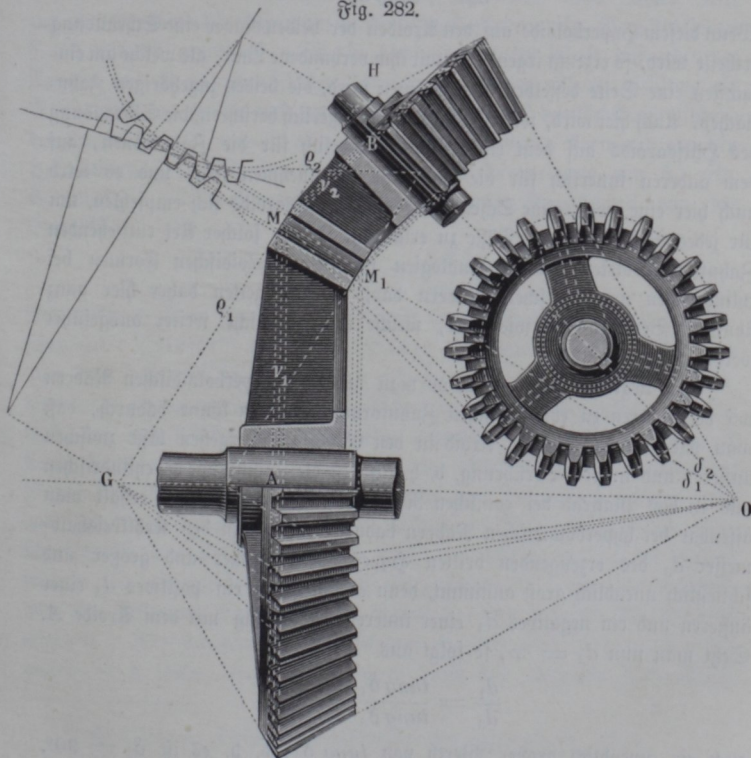


gedachte Kugelfläche zwei berührende Kegelflächen gelegt denkt, deren Axen die Radaxen OA und OB sind, und deren Spitzen man in den Durchschnitten G und H der letzteren mit der in M auf der Momentanaxe OM errichteten Normalebene findet. Diese beiden Kegelflächen GME und HMF , welchen man den Namen Ergänzungskegel beigelegt hat, haben

mit den Momentanaxenflächen die entsprechenden Theilkreise ME und MF gemein und weichen in der Nähe von M in dem kleinen die correcten Zahnprofile enthaltenden Flächenelemente der Kugel von dieser nur wenig ab. Denkt man daher diese Ergänzungskegel abgewickelt, und behandelt die abgewickelten Segmente CMG und DMH wie zwei Stirnräder, d. h. verzahnt man dieselben nach irgend einer der für Stirnräder angegebenen Methoden, so erhält man hierin die gewünschten Schablonen, durch deren Wiederaufwicklung auf die Ergänzungskegel man zu den Profilformen für die Zähne der conischen Räder gelangt. Natürlich hat man bei der Ausarbeitung der Zähne diese auf den Ergänzungskegeln befindlichen Profile als die Grundlinien allgemeiner Kegelflächen anzusehen, deren gemeinsame Spitze im Axendurchschnitte O gelegen ist.

Man pflegt diese Construction in der Regel für die äußeren und für die inneren Theilkreise durch M und M_1 vorzunehmen, und dürfte die Ausführung aus der Figur 282 wohl von selbst erhellen. Bezeichnen wieder

Fig. 282.



r_1 und r_2 die Halbmesser AM und BM , und setzt man die Halbmesser der abgewinkelten Sektoren $GM = \varrho_1$ und $HM = \varrho_2$, so hat man, unter δ_1 und δ_2 wieder die Winkel AOM und BOM verstanden:

$$\varrho_1 = \frac{r_1}{\cos \delta_1} \quad \text{und} \quad \varrho_2 = \frac{r_2}{\cos \delta_2}.$$

§. 86. **Hyperboloidenräder.** Die Bildung richtiger Zahnformen für die Räder windschiefer Axen ergibt sich nun aus dem allgemeinen Bildungsgesetze §. 82 von selbst. Als Hilfsaxoid, welches die zugehörigen Zahnflächen erzeugt, hat man hier zu den beiden hyperboloidischen Momentanaxenflächen ein drittes Hyperboloid anzunehmen, dessen Rehlkreis halbmesser d_3 , d. h. dessen Axenabstand von der Momentanaxe zwar beliebig angenommen werden kann, dessen Axe aber in die oben gedachte Drehaxenfläche hineinfällt, d. h. dessen Axenneigung δ_3 an die Bedingung geknüpft ist:

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_3}.$$

Wenn diesem Hyperboloide auf den Axoiden der beiden Räder eine Schraubung ertheilt wird, so erzeugt irgend eine mit ihm verbundene Linie, als welche am einfachsten eine Seite desselben angenommen wird, die beiden zugehörigen Zahnflächen. Auch hier wird, wenn die Räder sich äußerlich berühren, die Schraubung des Hilfsaxoids auf dem einen Rade äußerlich für die Zahnkrone, auf dem anderen innerlich für die Zahnfüße vorzunehmen sein, und es wird auch hier eine zweimalige Schraubung eines Hilfsaxoids sich empfehlen, um für jedes Rad Köpfe und Füße zu erlangen. Die in solcher Art entstehenden Zahnflächen bieten gewisse Analogien mit den cycloidischen Formen bei cylindrischen und conischen Rädern dar, und es gelten daher hier ganz ähnliche Bemerkungen wie dort, welche indessen nicht weiter ausgeführt werden sollen.

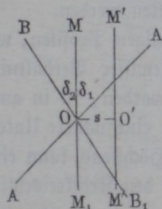
Hier liegt die Frage nahe, ob man auch bei hyperboloidischen Rädern wie bei anderen zu evolventischen Zahnformen gelangen könne dadurch, daß man das erzeugende dritte Axoid in den Grenzfall übergehen läßt zwischen äußerer und innerer Berührung, d. h. also in die Zahnstange bei cylindrischen und in das Planrad bei conischen Rädern. Diesen Grenzfall erhält man offenbar bei hyperboloidischen Rädern dadurch, daß man den Rehlkreis halbmesser d_3 des erzeugenden dritten Hyperboloids größer und größer und schließlich unendlich groß annimmt, denn es entspricht ein positives d_3 einer äußeren und ein negatives d_3 einer inneren Berührung mit dem Axoide A . Setzt man nun $d_3 = \infty$, so folgt aus

$$\frac{d_1}{d_3} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_3}$$

auch ein unendlich großer Werth von $\tan \delta_3$, d. h. es ist $\delta_3 = 90^\circ$.

Das dritte Aroid schrumpft in Folge dessen auf eine Gerade, nämlich die Momentanaxe OM zusammen. Stellt man sich nun diese Momentanaxe OM , Fig. 283, selbst als das erzeugende Aroid vor, so wird bei einer Drehung der Axen A und B um die Winkel α und β diese Gerade, die man sich etwa als einen Zahn einer Zahnstange vorstellen kann, senkrecht zu ihrer Richtung in einer den Axen A und B parallelen

Fig. 283.



Ebene um den Betrag

$$OO' = s = d_1 \alpha \cos \delta_1 = d_2 \beta \cos \delta_2$$

verschoben. Bei dieser Bewegung erzeugt die Gerade OM relativ gegen die Axen AA_1 und BB_1 ebenfalls richtige Zahnflächen, sofern sie der allgemeinen Bedingung genügen, daß sie zu Köpfen und Zähnen Veranlassung geben. Letzteres war bei der directen Abwicklung äußerlich sich berührender cylindrischer und conischer Räder bekanntlich nicht der Fall, und war man daher dort

zur Zuhilfenahme der sogenannten Verhältnißcylinder resp. Verhältnißkegel §. 73 und 83 genöthigt. Die in hier angeführter Weise auf jeder der Axen A und B erzeugten Flächen kennzeichnen sich bei näherer Prüfung als Kegelflächen, welche auch entstehen, wenn man auf den Kegelkreiscylindern der Hyperboloide A und B , also auf Cylindern zu diesen Axen und von den Halbmessern d_1 und d_2 eine Gerade unter der Axenneigung von δ_1 resp. δ_2 abwälzt. Dadurch entstehen schraubenförmige Kegelflächen von der Ganghöhe

$$h = \frac{2\pi d_1}{\tan \delta_1} = \frac{2\pi d_2}{\tan \delta_2},$$

welche jede zu ihren Axen senkrechte Ebene in der Evolvente des Kegelkreises schneiden. Olivier*) giebt diesen Flächen den Namen Spiraloide, und man kann dieselben, da sie, wie hier angegeben, durch Bewegung der Momentanaxe erzeugt werden, als Zahnflächen benutzen. Man erkennt nämlich leicht, daß diese Flächen nicht vollständig außerhalb der Aroide zu A und B liegen, sondern in dieselben bis zur Tiefe der Kegelkreiscylinder einschneiden, so daß diese Flächen nicht nur zur Bildung von Zahnköpfen sondern auch von Zahnfüßen Veranlassung geben. Allerdings ist die Tiefe dieses Einschneidens in den Kegelkreisen gleich Null und nimmt von da an beiderseits zu, so daß eine bestimmte Tiefe der Zahnwurzeln, die man wünscht, auch eine bestimmte Entfernung der Räder von dem kürzesten Axenabstande erfordert. Für sogenannte Kegelkreisträder (vielfach Schraubenräder genannt), d. h. solche, deren Mittelebenen durch den kürzesten Axenabstand

*) E. Olivier: Théorie géométrique des engrenages.

gehen, eignen sich daher diese evolventischen Flächen ebenso wenig, wie die Evolventencylinder oder Evolventenkegel der Aroide bei Cylinder- und Kegellädern. Diese erwähnten Spiraloide haben indessen, wie die Construction leicht ergibt, und wie auch schon von Olivier gezeigt worden, die Eigenthümlichkeit, auf jeder Seite der Rehlkreise nur für die eine Richtung der Betriebsübertragung dienen zu können, für die Möglichkeit entgegengesetzter Umdrehung müssen die Zahnflächen auf den entgegengesetzten Seiten der Rehlkreise aus den Spiraloiden herausgeschnitten werden.

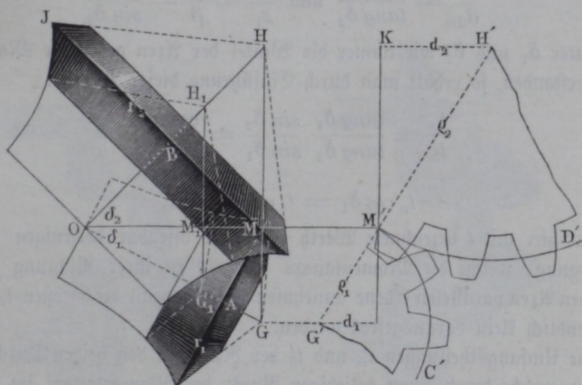
Eine Construction von Zahnflächen mit evolventenförmigen Profilen, wie sie bei cylindrischen und conischen Rädern mit Hülfe gewisser Verhältnißcylinder (§. 73) und Verhältnißkegel (§. 83) angegeben worden, ist in analoger Weise bei Hyperboloidenrädern nicht möglich, wie eine nähere Untersuchung der hyperboloidischen Aroide unschwer ergibt. Höchstens kann eine Begrenzung der Zähne durch Spiraloide, deren Cylinder den Rehlkreiscylindern in dem §. 73 gedachten Sinne verhältnißgleich sind, zu angenäherten Zahnformen für Rehlkreisläder führen, d. h. für solche Räder, deren Mittelebenen mit den Rehlkreisen zusammenfallen, und deren Grundformen wegen ihrer geringen axialen Höhe von Cylindern nur unwesentlich abweichen. Als exacte können diese Formen aber nicht angesehen werden, so lange die Axen einen meßbaren Winkel mit einander einschließen. Nur bei parallelen Axen, also bei cylindrischen Rädern, bei denen die Zähne schräg gegen die Axen angeordnet werden, tritt dagegen die gedachte spiraloide Form als die genaue Zahnform auf, weshalb man derartigen Rädern auch wohl den Namen Schraubenräder zu geben pflegt (s. §. 88).

Anmerkung. In dem Werke von Olivier sind als Zahnflächen solche spiraloide Flächen vorausgesetzt, die durch eine willkürlich (parallel der einen Axe) angenommene gerade Linie erzeugt werden, deren Erzeugung daher von der Lage der Momentanaxe ganz unabhängig ist. Wenn zwar durch jene gemachte Annahme einer Erzeugenden parallel zu der einen Radaxe die zugehörige Zahnfläche dieses Rades die einfachere Form eines Evolventencylinders anstatt eines Spiraloids annimmt, so können doch diese Flächen, welche ohne Berücksichtigung der so bedeutungsvollen Momentanaxe erzeugt sind, nicht als richtige Zahnflächen angesehen werden; wenigstens werden zwei Räder, deren Zähne durch solche Flächen begrenzt sind, nicht, wie oben immer angenommen, in einer geraden Linie (Krafteingriff), sondern nur in einem Punkte (Präcisionseingriff) sich berühren können. Vergl. Olivier: *Théorie géométrique des engrenages*. Ueber den spiraloideischen Zahnengriff kann man auch nachsehen: *Pücher, Zeitschrift deutscher Ingenieure*. Jahrgang 1860.

Auch bei den Hyperboloidenrädern kann man sich, ähnlich wie bei den conischen, einer angenäherten Zahnconstruction bedienen, indem man die Stirnflächen oder Profile der Zähne in Kegelflächen liegend verzeichnet, welche Kegelflächen auf den Hyperboloiden senkrecht stehen. Denkt man sich durch die Punkte M und M_1 der Momentanaxe OM , Fig. 284, welche die

Zahnlänge begrenzen sollen, Ebenen normal zur Momentanaxe OM , so sind deren Schnittpunkte G und H beziehungsweise G_1 und H_1 die Spitzen der hierhergehörigen Ergänzungskegel, deren abgewinkelte Mäntel $G'M'C'$ und

Fig. 284.



$H'M'D'$ das Mittel geben, nach den für Stirnräder üblichen Verzahnungsmethoden die äußeren und inneren Zahnprofile zu ermitteln. Sind d_1 und d_2 wieder die Kehlkreisbahnmesser der Hyperboloide und bezeichnet l die Länge OM , so hat man die Kegelseiten, welche für die Verzahnung als Halbmesser gelten:

$$G'M' = \rho_1 = \sqrt{d_1^2 + l^2 \tan^2 \delta_1}$$

und

$$H'M' = \rho_2 = \sqrt{d_2^2 + l^2 \tan^2 \delta_2}.$$

Mit Bezug auf die Theilung hyperboloidischer Räder läßt sich hier noch anführen, daß die letzteren in gewisser Beziehung ein von den conischen und cylindrischen Rädern abweichendes Verhalten zeigen. Während nämlich bei diesen letztgenannten die Zahntheilung in zwei zu einander gehörigen Raddurchschnitten, d. h. in zwei Ebenen, welche durch denselben Punkt der Momentanaxe senkrecht zu den Axen gelegt sind, für beide Räder den gleichen Betrag hat, ist dies bei hyperboloidischen Rädern nicht der Fall. Denkt man sich nämlich zu zwei zugehörigen Hyperboloiden A und B die Kehlkreise von den Halbmessern d_1 und d_2 , von denen die Zähnezahlen entsprechend mit z_1 und z_2 und die Winkelgeschwindigkeiten mit α und β bezeichnet sind, so hat man offenbar die Theilungen t_a und t_b dieser Räder, in den Umfängen der Kehlkreise gemessen, zu:

$$t_a = \frac{2\pi d_1}{z_1} \quad \text{und} \quad t_b = \frac{2\pi d_2}{z_2},$$

also

$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{d_1}{d_2} \frac{z_2}{z_1}.$$

Da nun

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_2} \text{ und } \frac{z_2}{z_1} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}$$

ist, unter δ_1 und δ_2 wie immer die Winkel der Axen gegen die Momentanaxe verstanden, so erhält man durch Einführung dieser Werthe:

$$\frac{t_a}{t_b} = \frac{\tan \delta_1}{\tan \delta_2} \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} = \frac{\cos \delta_2}{\cos \delta_1},$$

oder

$$t_a \cos \delta_1 = t_b \cos \delta_2 = t.$$

Der hier mit t bezeichnete Werth entspricht offenbar derjenigen seitlichen Bewegung, welche die Momentanaxe senkrecht zu ihrer Richtung in einer mit den Axen parallelen Ebene annehmen würde, wenn die Größen t_a , t_b und t unendlich klein vorausgesetzt werden.

Die Umfangstheilungen t'_a und t'_b der Räder in den beiden Durchschnittsebenen, welche durch einen beliebigen Punkt der Momentanaxe im Abstände l desselben von dem Berührungspunkte der Rehlkreise senkrecht zu den Axen gedacht werden, folgen dann ohne Weiteres aus den Halbmessern r_1 und r_2 dieser Durchschnitte zu:

$$t'_a = \frac{2 \pi r_1}{z_1} = \frac{2 \pi}{z_1} \sqrt{l^2 \sin^2 \delta_1 + d_1^2}$$

und

$$t'_b = \frac{2 \pi r_2}{z_2} = \frac{2 \pi}{z_2} \sqrt{l^2 \sin^2 \delta_2 + d_2^2},$$

daher hier das Verhältniß der Theilungen sich ergibt zu:

$$\frac{t'_a}{t'_b} = \frac{z_2}{z_1} \sqrt{\frac{l^2 \sin^2 \delta_1 + d_1^2}{l^2 \sin^2 \delta_2 + d_2^2}} = \frac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1} \sqrt{\frac{l^2 \sin^2 \delta_1 + d_1^2}{l^2 \sin^2 \delta_2 + d_2^2}}.$$

Hyperboloidische Räder werden wegen der schwierigen Darstellung und bedeutenden Reibung nur selten und nur zur Uebertragung kleiner Kräfte angewandt. Am häufigsten kommen dieselben zur Bewegung der Spindeln und Spulen von Vorspinnmaschinen vor, wo es nothwendig ist, einer größeren Anzahl verticaler Spindeln durch eine längere horizontale Ase die Bewegung zu ertheilen*). Bei der Uebertragung größerer Betriebskräfte zwischen zwei windschiefen Axen umgeht man die Anordnung hyperboloidischer Räder fast immer durch Anordnung einer Zwischenaxe, welche die

*) S. Technolog. Encyclopädie, den Artikel Baumwolle von Gölße, Supplmt. Bd. 1.

beiden Axen durchschneidet, und in Folge davon mit jeder der letzteren durch ein conisches Räderpaar in Verbindung gesetzt werden kann. Eine solche Anordnung ist immer möglich, und ist aus den Figuren 285 und 286 ersichtlich. Bei der Anordnung in Fig. 285 ist die Zwischenwelle CD in die gemein-

Fig. 285.

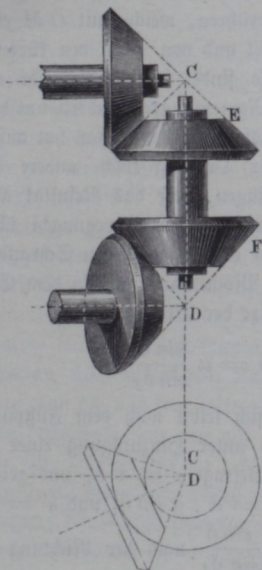
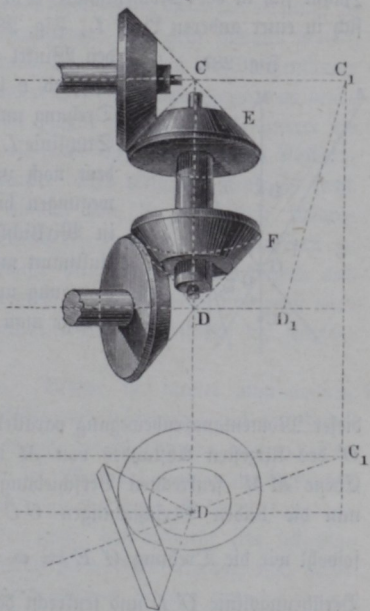


Fig. 286.



schaftliche Normale zu den Axen gelegt, während in Fig. 286 eine beliebige Lage für CD angenommen ist. Die erstere Anordnung, Fig. 285, wird sich, wo sie erreichbar ist, besonders deswegen empfehlen, weil dabei beide Räderpaare die Bewegung zwischen rechtwinkelig zu einander stehenden Axen zu vermitteln haben.

Reibung hyperboloidischer Zahnräder. Zur Ermittlung der Reibung, welche zwischen den Zähnen hyperboloidischer Räder stattfindet, kann man ähnliche Betrachtungen anstellen, wie für cylindrische und conische Räder. Ersetzt man wieder die beiden Drehungen der Axen A und B um α und β unter Festhaltung der einen A durch eine Schraubenbewegung des Hyperboloids B um die Momentanaxe im Drehungsbetrage

$$\omega = \alpha \frac{\sin \delta}{\sin \delta_2} = \beta \frac{\sin \delta}{\sin \delta_1}$$

mittelt zu $O'G = \omega_2 = \omega \sin \eta$. Diese Drehung erzeugt eine Bohrbewegung der Flächen auf einander und ist die daraus entspringende Reibung wie diejenige conischer Räder zu beurtheilen.

4) Eine Verschiebung nach der Axe der unter 3) angeführten Bohrbewegung im Betrage $s_2 = s \sin \eta + \omega e \cos \eta$. Diese Verschiebung, welche eine Reibung analog derjenigen bei Stirnrädern hervorruft, bildet mit der unter 3) angegebenen Drehung eine Schraubenbewegung. Es geht hieraus hervor, daß die den Rädern zukommende Schraubenbewegung um die Momentanaxe sich jederzeit ersetzen läßt durch zwei andere Schraubenbewegungen, von denen die eine um die Berührungslinie zweier Zähne erfolgt und die andere um eine Axe, welche auf der Berührungslinie sowie auf dem kürzesten Abstände dieser von der Momentanaxe im Fußpunkte dieses Abstandes senkrecht steht.

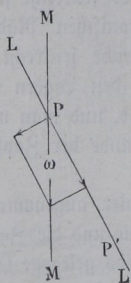
Daß auch bei hyperboloidischen ähnlich wie bei conischen Rädern der zwischen zwei Zähnen an deren Berührungslinie wirkende senkrecht zu den Zahnflächen gerichtete Druck gewisse Reactionen in den Lagern und an den Stirnflächen der Axenzapfen erzeugt, ist selbstredend, und man wird in jedem einzelnen Falle die daraus resultirenden Widerstände der Zapfenreibungen leicht ermitteln können.

Räder mit schrägen Zähnen. Bisher ist immer angenommen §. 88. worden, daß die mit dem dritten oder Hülsaroid verbundene und die Zahnflächen erzeugende Linie eine auf dem Umfange des Hülsaroids gelegene Gerade, also eine Seitenlinie des letzteren sei. Aus der allgemeinen Gültigkeit des in §. 82 bewiesenen Bildungsgesetzes folgt aber ohne Weiteres, daß diese Bedingung keineswegs festgehalten werden muß, daß vielmehr jede beliebige krumme oder gerade Linie theoretisch richtige Zahnflächen erzeugt, auch wenn sie nicht in der Umfläche des Hülsaroids gelegen, sondern nur mit diesem fest verbunden ist. Diese Bemerkung führt in sehr einfacher Art zur Erläuterung der Zahnformen, welche man in Anwendung zu bringen hat, wenn man die Räder mit sogenannten schrägen Zähnen versehen will, wie dies insbesondere bei Stirnrädern schon längst, zuerst von White, geschehen ist, nach welchem diese Räder auch wohl den Namen der White'schen Räder führen (vergl. §. 79). Die Gründe, aus welchen man Räder paralleler Axen zuweilen mit Zähnen versehen, die gegen die Axen geneigt sind, können zweierlei sein. Man will einerseits eine gleichmäßigere Bewegungsübertragung dadurch erzeugen, daß gleichzeitig eine größere Anzahl von Zähnpaaren im Eingriffe stehen und die ruckweise und absehbende Bewegung einer stetigeren Platz macht, und hofft andererseits den Widerstand der Zahnreibung möglichst herabzuziehen, ja sogar gänzlich zu beseitigen. In wie weit das letztere möglich ist, ergibt sich leicht aus der folgenden Betrachtung. Ein Kraftübertrag zwischen Rädern irgend welcher Art, welcher gänzlich frei von gleitender Reibung ist (die sehr kleine wälzende Reibung wird auch hier, wie bisher

immer, vernachlässigt), ist nur möglich, wenn die wirklich zwischen zwei Zähnen stattfindende relative Bewegung mit der zugehörigen Momentanaxenbewegung übereinstimmt, und diese selbst lediglich eine wälzende, von jeder Gleitung freie Bewegung ist. Da letzteres bei windschiefen Axen nicht der Fall ist, so kann zwischen Hyperboloidenrädern überhaupt nicht ein reibungsloser Kraftübertrag stattfinden, auch selbst dann nicht, wenn dieselben ganz ohne Zähne in Form von Frictionsrädern dargestellt werden.

Bei den Stirnrädern und conischen Rädern dagegen besteht die Momentanaxenbewegung fortwährend aus einer bloßen Drehung um die Momentanaxe und ist frei von Gleitung, man wird daher eine ganz reibungslose Kraftüber-

Fig. 288.



tragung in jedem Augenblicke nur dann ermöglichen können, wenn auch in jedem Augenblicke die wirkliche Berührung in einem Punkte der Momentanaxe, aber in keinem anderen Punkte außerhalb derselben stattfindet. Denn sei M , Fig. 288, die Momentanaxe, L eine Berührungslinie zweier Zähne welche mit M etwa den Punkt P gemein habe, so kann man die Momentanaxenbewegung ω zerlegen in zwei Drehungen um eine in L fallende und eine dazu senkrechte durch P gehende Axe. Die letztgedachte Drehung muß offenbar in jedem zweiten Berührungspunkte P' außerhalb von M boh-

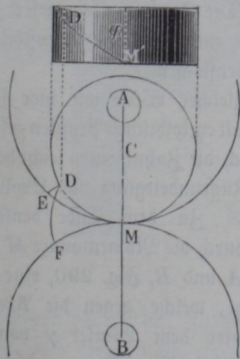
rende Wirkungen, daher Reibungen hervorrufen. Bei den bisher betrachteten conischen Rädern treten diese Bohrbewegungen, wie oben gezeigt, immer auf, indem dabei der Axendurchschnitt fortwährend als der der Momentanaxe und der Berührungslinie zweier Zähne gemeinsame Punkt figurirt. Bei den Stirnrädern dagegen, wo dieser Schnittpunkt als unendlich fern angenommen werden muß, geht diese Bohrung bekanntlich in eine Verschiebung über, deren Betrag direct von dem Abstände e abhängt, in welchem die Berührungslinie der Zähne zu der Momentanaxe parallel ist. In beiden Fällen verschwindet die Reibung zwischen je zwei Zähnen nur in dem Augenblicke, in welchem die Berührungslinie mit der Momentanaxe zusammenfällt.

Aus dem Vorstehenden ist schon ersichtlich, daß ein Kraftübertrag ohne Zahnreibung nur bei dem sogenannten Präcisionseingriffe, d. h. bei punktweiser Berührung, niemals bei einem Krafteingriffe stattfinden kann, da bei Voraussetzung des letzteren mit Nothwendigkeit das stete Zusammenfallen der Berührungslinie in allen ihren Punkten mit der Momentanaxe folgen müßte. Diese Voraussetzung weist offenbar auf die Ausführung der Räder als Frictionsräder, also Weglassung von Zähnen überhaupt hin.

Man kann sich von einem Zahneingriffe, welcher frei von Reibung ist, in folgender Art eine Anschauung verschaffen. Man denke sich auf dem

Umfange des Theilkreischylinders des einen von zwei Stirnrädern nach irgend einer gegen die Ase beliebig geneigten Linie, z. B. nach einer cylindrischen Schraubenlinie, eine äußerst dünne Rippe angebracht, etwa in Form eines dünnen Drahts. Wenn nun die beiden Theilkreischylinder mit gewissem Drucke gegen einander gepreßt werden, so wird bei ihrer Umdrehung die erwähnte sehr dünne Rippe des einen Cylinders in dem anderen eine äußerst feichte Furche hinterlassen, deren Form von der Form jener Rippe abhängig ist, und zwar werden Rippe und Furche sich stets nur in einem einzigen Punkte, nämlich in demjenigen berühren, welcher in der Momentanaxe, d. h. in der geraden Berührungslinie der beiden Cylinder gelegen ist. Würde man nun die beiden Räder mit Zähnen versehen, deren Flächen nach dem Laufe jener Rippe und Furche so gebildet sind, daß die Berührung zwischen ihnen stets nur in einem Punkte der Momentanaxe stattfindet, so würden diese Räder offenbar in einem Präcisionseingriffe stehen, welcher mit einem Reibungswiderstande nicht behaftet ist, da die relative Bewegung hierbei fortwährend auf eine Wälzung um den Berührungspunkt beschränkt bleibt. Da nun aber bei einem solchen Eingriffe der ganze zu übertragende Druck zwischen den Zähnen fortwährend in einem einzigen Punkte concentrirt ist, so wird bei größeren Kräften die richtige Form jener Zahnflächen gar bald gestört sein, so daß dann die Berührung in mehr als einem Punkte stattfindet. In Folge dessen stellen sich Reibungen und daher Verschleiß ein, und man erkennt leicht, daß jener vorausgesetzte Präcisionseingriff unvermeidlich in einen Krafteingriff übergehen muß, bei welchem nach dem Obigen der Uebertrag nicht mehr ohne Friction möglich ist. Wenn man daher zwei Stirnräder etwa zur Erzielung einer möglichst gleichmäßigen Bewegung mit schrägen Zähnen versehen will, so wird man gut thun, von vornherein die Zähne so

Fig. 289.



zu gestalten, daß sie in einer gewissen Linie sich berühren oder in einem Krafteingriffe zusammenstehen, und nicht erst durch den Verschleiß der Präcisionseingriff in einen Krafteingriff übergeführt wird. Für diesen Fall nun ergeben sich die Flächen, durch welche diese schrägen Zähne begrenzt werden müssen, in derselben Einfachheit, wie für gerade Zähne aus dem allgemeinen Zahnbildungsgeetze.

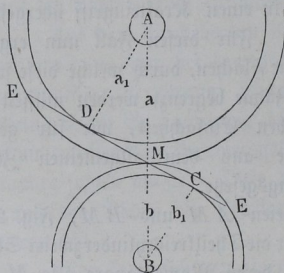
Seien AM und BM , Fig. 289, wieder die Theilkreischylinder zweier Stirnräder, deren Momentanaxe also M , sei ferner irgend ein Hülfscylinder CM an-

genommen, welcher in bekannter Weise durch seine Abwälzung auf B die Zahnköpfe für dieses Rad und in A die Wurzeln für dieses letztere erzeugen soll. Irgend ein Punkt D im Umfange dieses Cylinders erzeugt dabei die Epicycloide FD und die Hypocycloide ED , welche bei den geraden Zähnen als die Grundlinien der cylindrischen Zahnflächen auftreten. Wenn man nun aber hier nicht die in D sich projecirende gerade Seite des Hilfszylinders als Erzeugende annimmt, sondern als solche eine Schraubenlinie DM voraussetzt, welche auf dem Cylinder C unter dem Neigungswinkel φ gegen die Ase gezeichnet ist, so erkennt man sehr leicht, daß die durch diese Schraubenlinie erzeugten Zahnflächen nicht mehr cylindrische, sondern Schraubenflächen sein werden. Die Durchschnitte derselben mit irgend welcher Ebene senkrecht zu den Axen stimmen dann mit den gedachten cycloidischen Curven FD und ED überein, und die Ganghöhe dieser Schraubenflächen beträgt entsprechend

$$h_a = \frac{2\pi a}{\tan \varphi} \quad \text{und} \quad h_b = \frac{2\pi b}{\tan \varphi},$$

wenn $AM = a$ und $BM = b$ die Halbmesser der Räder sind. Als Eingriffsfläche muß auch jetzt die Umfläche des erzeugenden Cylinders C angesehen werden, und zwar findet die Berührung zweier Zähne immer in der erzeugenden Schraubenlinie DM statt. Da diese Berührungslinie die Momentanaxe fortwährend in einem Punkte schneidet, so ist es mit Rücksicht auf Fig. 288 klar, daß die sich einstellende Reibung nicht aus einer Verschiebung der Zahnflächen auf einander wie bei geraden Zähnen, sondern aus einer drehenden oder bohrenden Bewegung um den gedachten Durchschnittspunkt resultirt. Für diese schrägen Zähne mit cycloidischen Durchschnitten gelten offenbar ganz analoge Bemerkungen, wie für die geraden Zähne, und man kann namentlich das in §§. 69 bis 72 über Geradflanken sowie Triebstöcke, über äußere und innere Verzahnung sowie über die Zahnstange Angeführte ohne Weiteres hierauf anwenden. Die Flächen aller dieser Zähne,

Fig. 290.



auch der entsprechenden Triebstöcke, sind Schraubenflächen.

In gleicher Weise wie hier für die Zähne mit cycloidischen Profilen geschehen, lassen sich die Zahnformen leicht herleiten unter Zugrundelegung von Evolventenprofilen. Zu dem Ende denke man wieder durch die Momentanaxe M zweier Räder A und B , Fig. 290, eine Ebene E gelegt, welche gegen die Asebene AB unter dem Winkel γ von etwa 75° geneigt ist. Dann wickelse man

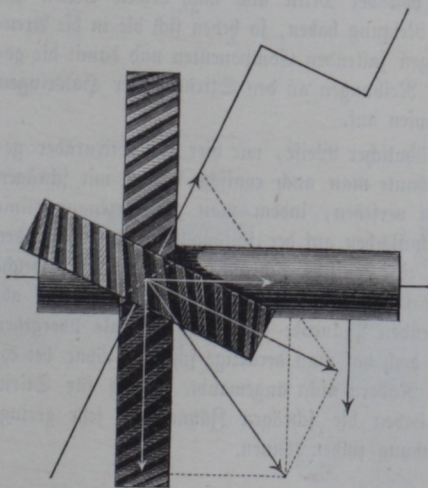
diese Ebene, wie in §. 73 auf die beiden berührenden Hülfszylinder AD und AC auf, betrachte aber als Erzeugende nicht mehr eine mit den Axen parallele, sondern eine in der Ebene E liegende und gegen die Axen unter dem beliebigen Winkel φ geneigte Gerade DC . Es ist deutlich, daß diese Linie bei der gedachten Aufwicklung auf die Cylinder AD und BC zwei Schraubenflächen erzeugen wird, deren Ganghöhen beziehungsweise durch

$$h_a = \frac{2\pi a_1}{\tan \varphi} \quad \text{und} \quad h_b = \frac{2\pi b_1}{\tan \varphi}$$

gegeben sind, und deren Durchschnitte mit Ebenen senkrecht zu den Axen die Evoluten der Kreise AD und BC sind, also Flächen, welche in §. 86 mit dem Namen Spiraloide belegt wurden.

Diese Schraubenflächen stimmen ihrem Charakter nach offenbar mit denjenigen überein, welche oben als angenäherte Zahnformen für die Kehlkreiskräder windschiefer Axen angeführt worden sind, und es ist nur der bereits in §. 86 angedeutete Unterschied hervorzuheben, daß während diese Flächen genaue Zahnformen für die schrägen Zähne von Rädern paralleler Axen

Fig. 291.



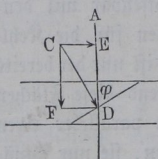
abgeben, sie nur annähernde Richtigkeit für die Kehlkreiskräder windschiefer Axen gewähren. Letztere Räder, Fig. 291, sind ihrem Charakter nach Hyperboloidenräder, und die correcten Zahnformen für dieselben sind keine Schraubenflächen, sondern sind durch Wälzung und Schiebung eines Hülfs-hyperboloids auf den Axoiden in der in §. 86 angegebenen Weise erzeugt zu denken. Man pflegt indessen in der Praxis in der Regel die Kehlkreiskräder windschiefer Axen mit dem

Namen Schraubenräder zu belegen, doch geht aus dem Vorstehenden hervor, daß diese Bezeichnung eigentlich den schräg gezahnten Rädern paralleler Axen zukommt. Schließlich darf wohl auch noch darauf aufmerksam gemacht

werden, daß der Winkel φ , unter welchem die schrägen Zähne gegen die parallelen Axen geneigt sind, ganz beliebig angenommen werden kann, wogegen bei den spiraloïdischen Zähnen windschiefer Axe die erzeugende Linie ein für allemal durch die Lage der Momentanaxe M gegeben ist, also durch die Beziehung $\alpha \sin \delta_1 = \beta \sin \delta_2$, wenn wie früher α und β die Umdrehungswinkel und δ_1 und δ_2 die Neigungen der Momentanaxe gegen die Axen bezeichnen.

Es ist übrigens leicht ersichtlich, daß bei den Rädern mit schrägen Zähnen wegen der schrägen Stellung der letzteren unter dem Winkel φ gegen die Axen die letzteren mit einem gewissen Drucke in ihrer Axenrichtung gegen die Lager gepreßt werden. Ist, Fig. 292, $CD = P$ der Normaldruck, welchen zwei Zähne auf einander ausüben, so ist die in die Richtung der Axe fallende Componente

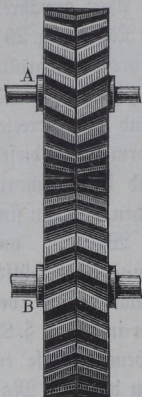
Fig. 292.



$$CF = P \sin \varphi,$$

welche eine Reibung an der Stirn der Zapfen erzeugt. Die auf Axendrehung wirkende Componente ist natürlich $CE = P \cos \varphi$. Wenn man die Räder nach Art der Fig. 293, mit Zähnen versehen, welche von der Mitte aus nach beiden Seiten hin gleiche Neigung haben, so heben sich die in die Axenrichtungen fallenden Componenten und damit die gedachten Reibungen an den Stirnen oder Halsringen der Zapfen auf.

Fig. 293.



In ähnlicher Weise, wie hier für Stirnräder gezeigt, könnte man auch conische Räder mit schrägen Zähnen versehen, indem man als Erzeugungslinie der Zahnflächen auf der Umfangsfläche des wälzenden Kegels eine conische Schraubenlinie annähme, welche bei der Evolventenverzahnung in eine auf dem abzuwälzenden Planrade befindliche Spirale übergehen würde, doch hat man derartige schräge Zähne bei conischen Rädern nicht angewandt. Auch für Stirnräder haben die schrägen Zähne nur sehr geringe Anwendung finden können.

§. 89. Construction der Zahnräder. Die Zahnräder werden fast immer aus Gußeisen, nur die kleinsten aus Stahl, Schmiedeeisen oder Messing gemacht, und zwar aus einem Stücke bis zu mittlerer Größe (2 bis 3 Meter Durchmesser), aus mehreren Stücken nach Art der Wasserräder bei größerem Durchmesser. Hölzerne Räder wendet man heute wegen ihrer Ungenauigkeit

und geringen Beständigkeit kaum mehr an. Dagegen ist die Anwendung hölzerner Zähne bei dem einen von zwei zusammenarbeitenden schnellgehenden Rädern zur Erreichung eines sanften und geräuschlosen Ganges sehr zu empfehlen. Die Gestalt der Zähne für ein äußerlich verzahntes Stirnrad zeigt Fig. 294, und für innere Verzahnung Fig. 295, während Fig. 296

Fig. 294.

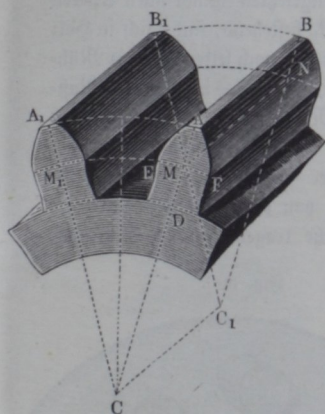


Fig. 295.

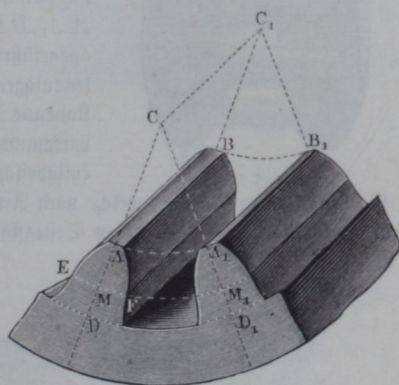


Fig. 296.

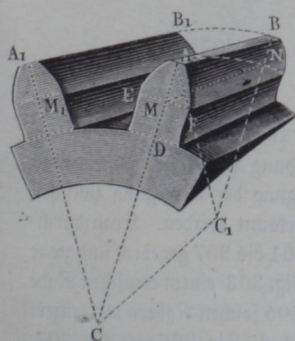
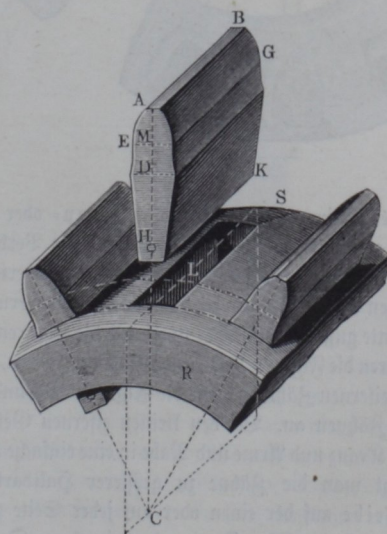


Fig. 297.



einem conischen Rade entspricht. einem conischen Rade entspricht. eiserne Radfranzes mit hölzernen

Fig. 298.

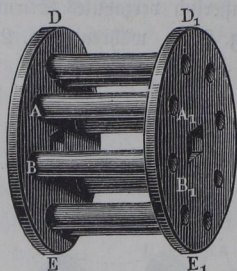


Fig. 297 (a. v. S.) zeigt ein Stück eines Zählens, welche durch eiserne, durch die Löcher *H* geschlagene Stifte festgehalten werden. Das Stockgetriebe, auch Drehling oder Trilling genannt, Fig. 298, aus den beiden Scheiben *DE* und *D1E1* mit zwischengesetzten cylindrischen Stöcken *A A1, B B1* bestehend, findet sich in Holz ausgeführt nur noch selten in alten Mühlenanlagen, während es in kleinerem Maßstabe aus Metall gefertigt vielfach in Uhren vorkommt. Die Verwendung derartiger cylindrischer Stockgetriebe im Eingriffe

mit scheibenförmigen Rädern, welche nach Art von Fig. 299 und 300 ihre Zähne oder Stöcke auf der ebenen Seitenfläche tragen und im Gegensatze

Fig. 299.

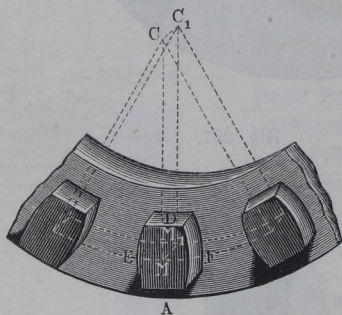
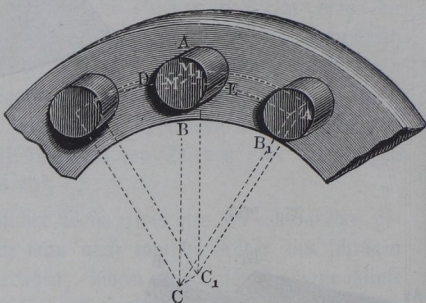


Fig. 300.



zu den Stirnrädern den Namen Kron- oder Kammräder führen, ist eine jetzt gleichfalls veraltete Einrichtung zur Verbindung zweier sich schneidenden Axen. Das einzig correcte Mittel zur Uebertragung der Bewegung zwischen solchen Axen kann nur in den conischen Rädern erkannt werden. Kranzdurchschnitte gußeiserner Räder sind durch die Figuren 301 bis 307 gegeben, und zwar gehören die Figuren 301 und 302 Stirnrädern, Fig. 303 einem conischen Rade mit eisernen Zähnen, sowie die Figuren 304 und 305 solchen Rädern mit hölzernen Zähnen an. Bei den kleinen eisernen Getrieben, Fig. 306 und Fig. 307, sind Kranz und Arme und Nabe in eine einfache Hülse zusammengedrumpft und pflegt man die Zähne zu größerer Haltbarkeit durch eine angegossene Scheibe auf der einen oder auf jeder Seite zu fassen. In diesen Figuren sind auch die Abmessungen der einzelnen Querdimensionen als Functionen

einer gewissen Größe δ angegeben, welche Größe zu $\delta = 0,4t + 3 \text{ mm}$ angenommen ist, wenn t die Theilung in Millimetern bezeichnet.

Fig. 301.

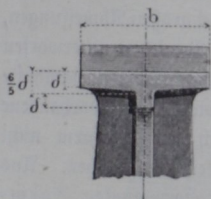


Fig. 302.

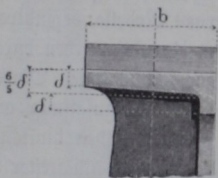


Fig. 303.

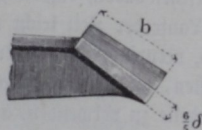


Fig. 304.

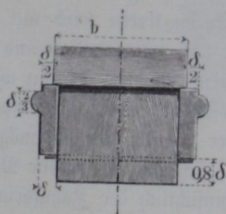


Fig. 305.

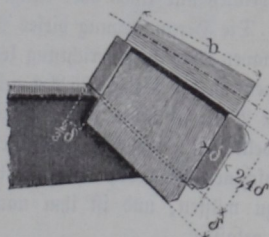


Fig. 306.

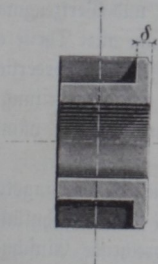
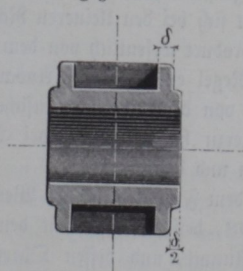


Fig. 307.



Den Radarmen, deren Zahl je nach der Größe des Rades zwischen 3 und 8 variiert, giebt man meist einen gerippten Querschnitt, die Nabe erhält nach Kettenbacher eine Länge $L = b + 0,06r$ und eine Wandstärke $s = 5 \text{ mm} + \frac{1}{3}d$, wenn b die Zahnbreite, r den Radhalbmesser und d die Wellenstärke bezeichnet. Im Uebrigen muß hinsichtlich der Construction der Zahnräder auf die speciellen Handbücher der Constructionslehre verwiesen werden.

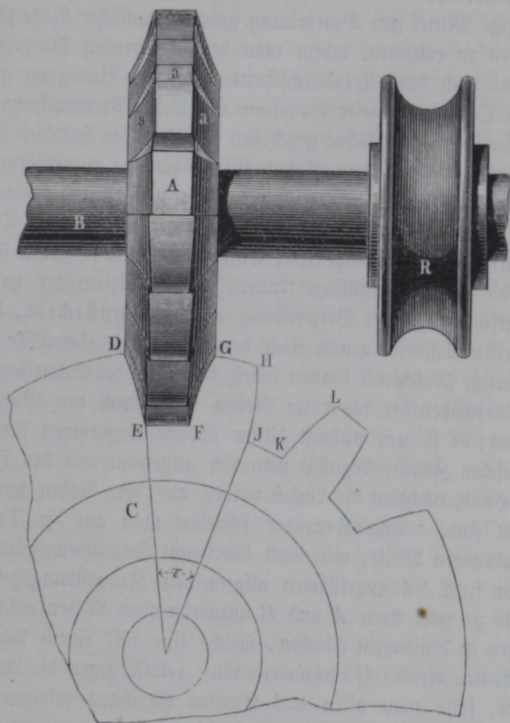
Die Ausführung der Räder, wenigstens der größeren sogenannten Triebwerksräder für schwerere Transmissionen geschah bis vor kurzer Zeit fast ausschließlich durch den Abguß nach hölzernen, möglichst genau gearbeiteten Modellen. Mit dieser Methode sind große Uebelstände verbunden, denn abgesehen davon, daß die hölzernen Modelle, besonders bei großen Abmessungen, im Laufe der Zeit leicht einem Unrichtigwerden durch Verziehen unterworfen sind, verursacht die Anfertigung reichhaltiger Modellsammlungen namhafte Kosten, wodurch gar häufig die Veranlassung geboten wird, vorhandene Modelle zu verwenden, auch wenn dieselben hinsichtlich der Zahnform nicht den zu stellenden Bedingungen in vortheilhaftester Weise entsprechen. Aus diesen Gründen haben sich in neuerer Zeit die sogenannten Formmaschinen mehr und mehr Eingang verschafft, welche die Ausarbeitung der Form für den Zahnkranz mit Hilfe eines Modellstücks bewirken, welches nur einen oder einige Zähne von sehr genauer Ausführung enthält. Die Herumtragung dieses Modellstücks im Kreise wird mit Hilfe einer genauen Kreistheilvorrichtung leicht ermöglicht, während Nabe und Armsystem meist in der bisherigen Art mittelst hölzerner Modelle geformt werden. Auf diese Weise ist neben der sehr exacten Ausführung möglichste Ersparung an Modellkosten erreicht. Gleichzeitig ist der Constructeur vermöge der Formmaschinen der Nothwendigkeit überhoben, sich an vorhandene Modelle binden zu müssen, und ist ihm namentlich hinsichtlich der Zahnform volle Freiheit gelassen.

Während eine derartige Darstellung der Zähne durch einfachen Abguß für die größeren Triebwerksräder meist eine genügende Genauigkeit gewährt, so macht sich bei den kleineren Rädern der Arbeits- und Werkzeugmaschinen, deren Product wesentlich von dem gleichmäßigen Gange aller Theile abhängt, in der Regel eine genauere Ausarbeitung der Zahnflächen erforderlich. Abgesehen von der immerhin unsicheren und theueren Handbearbeitung wendet man hierzu hauptsächlich zwei Mittel der Bearbeitung an, nämlich das Fräsen und das Hobeln.

Bei dem Fräsen dient als Werkzeug ein stählerner Umdrehungskörper *A*, Fig. 308, dessen Profil mit demjenigen *DEFG* einer Zahnfläche genau übereinstimmt, und dessen Oberfläche durch entsprechende Einschnitte mit einer größeren Anzahl von Schneiden *aa* versehen ist, deren schneidende Kanten genau in der gedachten Umdrehungsfläche liegen. Wird nun die auf ihrer Ase *B* befestigte Fräse durch ihre Rolle *R* in schnelle Umdrehung gesetzt, und langsam parallel zu der Ase des zu schneidenden Rades *C* entlang geführt, so nehmen die schneidenden Kanten der Fräse alles Material fort, welches in der zu erzeugenden Lücke *DEFG* enthalten ist. Es ist klar, daß nach Vollendung einer Lücke durch eine Wiederholung desselben Arbeitsprocesses nach vorheriger Drehung des Rades *C* um den Theil-

winkel τ die folgende Zahnücke *HJKL* in gleicher Art hergestellt wird, u. s. f.

Fig. 308.



Diese Methode der Bearbeitung, welche durchweg gleiche Weite der Zahn-
lücken, also prismatische resp. cylindrische Form derselben voraussetzt, ist aus
diesem Grunde nur für Stirnräder und deren Zahnstangen geeignet und
für dieselben auch in ausgedehnter Anwendung. Für die Zähne conischer
Räder kann das Fräsen niemals zu einer correcten Form führen, denn wenn
man auch in diesem Falle unter Anwendung von nur einseitig geschärften
Schneidrädern jede Zahnücke durch zweimaliges Fräsen bearbeitet, so zeigen
die bearbeiteten Flächen doch in allen Abständen gleiche Krümmung des
Profils, was bei der conischen Gestalt der hierfür nöthigen Zähne nicht der
Fall sein darf. Es kann nur als eine sehr unvollkommene Abhülfe dieses
Uebelstandes angesehen werden, wenn man eine Fräse für die conischen
Räder verwendet hat, deren Profil mit dem engsten (inneren) Profil der

Lücke übereinstimmt, und welcher man durch oscillirende Bewegung der Fräsaue die Fügigkeit ertheilt hat, die Lücken nach außen hin in größerer Weite auszuarbeiten.

Das einzige Mittel zur Bearbeitung genauer conischer Näderzähne ist in dem Hobeln zu erkennen, indem man der schneidenden Meißelspitze fortwährend eine nach dem Axendurchschnitte gerichtete Bewegung giebt unter gleichzeitiger Oscillation dieser Bahnlinie um diesen Axendurchschnitt in der durch die Profilform der Zähne gegebenen Weise. Man hat diese Oscillation mehrfach durch eine von dem Zahnprofile abhängige curvenförmige Leitschiene oder Schablone zu erreichen gesucht, und es sind dementsprechend verschiedene sehr sinnreiche Hobelmaschinen^{*)} angegeben worden. Da dieselben aber sämmtlich von sehr complicirter Einrichtung sind, so haben sie sich nur wenig in die Praxis einführen können. Auch Stirnräder hat man zu hobeln vorgeschlagen, unter Verwendung eines Fagonstichels, d. h. eines Meißels, dessen Schneide genau nach dem Profil der Zahnfläche geschliffen ist^{**)}; derartige Maschinen können indeß, der Natur des Schneidorgans nach, nur zum Ausschaben der schon im Rohen etwa durch den Guß erzeugten Lücken dienen, da sie nur äußerst dünne Späne wegnehmen können. Bei hyperboloidischen Zähnen begnügt man sich allgemein mit der Bearbeitung aus freier Hand, nachdem die Lücken vorher aus dem Rohen durch Fräsen vorgearbeitet sind. Schraubenräder schneidet man auf der Drehbank in derselben bekannten Weise, wie man überhaupt Schraubengewinde herstellt.

Nach dem in §. 82 angeführten allgemeinen Zahnbildungsgeetze erhält man für die zu zwei Axen A und B anzuordnenden Räder richtige Zahnbegrenzungen in denjenigen Flächen, welche eine mit einem beliebigen zugehörigen dritten Axoide C verbundene Linie relativ gegen die Axen A resp. B beschreibt, falls man allen drei Axoiden die ihnen zukommenden Umdrehungen ertheilt. Hieraus folgt nun sogleich, daß man auf jeder beliebigen Hobelmaschine alle diejenigen Zahnflächen genau richtig herstellen kann, welche durch eine gerade Erzeugungslinie entstehen. Denkt man sich nämlich zu dem einen Axoid, etwa A , das dritte Axoid C , und seien deren respective Drehungswinkel wieder mit α und γ bezeichnet, so kann man dem ganzen Systeme, d. h. der Aze A sowohl wie derjenigen C , eine zusätzliche Drehung im Betrage $-\gamma$ ertheilen denken, ohne daß dadurch an der relativen Bewegung der beiden gegen einander etwas geändert wird. Hierdurch kommt offenbar das Hilfsaxoid C und mit ihm die erzeugende Gerade in absolute Ruhe, während die Aze A und das auf ihr befindliche Rad zweien Drehungen

^{*)} S. u. a. Dingler's polyt. Journ., Bd. 209 (1873), S. 24. Civ.-Ing. Bd. 10, S. 27. Bd. 18, S. 141 u. a. a. D.

^{**)} S. Gardt, Werkzeugmaschinen.

ausgesetzt sind, einer im Betrage α um die Ase A selbst und einer anderen — γ um die Ase C . Betrachtet man daher die in einer und derselben festen Geraden gelegene Bahn, welche die Meißelspitze einer gewöhnlichen Hobelmaschine beschreibt, als die Erzeugende, so muß dieselbe die genau richtige Zahnfläche hervorbringen, sobald man das zu bearbeitende Rad in solcher Weise unterstützt, daß es außer einer Drehung um die eigene Ase noch einer anderen um die Ase C des zu Grunde gelegten Hüllsaxoids fähig ist, und sobald man dafür sorgt, daß ihm diese beiden Drehungen gleichzeitig und in dem Verhältnisse $\alpha : -\gamma$ mitgetheilt werden. Zu diesem Behufe hat man nur nöthig, die betreffende Hobelmaschine, welche übrigens von gewöhnlicher Einrichtung sein kann, mit einem geeigneten Support oder Apparat zur Aufnahme des Rades zu versehen, um ganz automatisch die Zahnflächen anhobeln zu können. In dieser Weise ist die Bearbeitung der Zähne sowohl für Stirnräder wie für conische, hyperboloidische und Schraubenräder ohne Schwierigkeit möglich, und können ebensowohl Cycloiden- wie Evolventenformen erzeugt werden. Es ist hierzu keinerlei Schablone oder Façonstichel erforderlich, ja es bedarf nicht einmal einer vorherigen Aufzeichnung des Zahnprofils, wenn man nur das erzeugende Hüllsaxoid angenommen hat. Es muß ferner bemerkt werden, daß die auf solche Weise erzeugten Zähne conischer Räder die exacten Formen (Kegel mit sphärischen Cycloiden und sphärischen Evolventen als Grundflächen) an sich tragen, während bei der seitherigen Darstellungsweise conischer Räder wegen der Nothwendigkeit, eine Schablone anzufertigen, immer nur die Annäherungsformen mit Hülfe der Ergänzungskegel zur Verwendung gekommen sind. In Betreff der gedachten Apparate zur Unterstützung der zu hobelnden Räder sei hier auf eine Abhandlung des Verfassers in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbleißes, Jahrgang 1877, verwiesen.

Kettenräder. Gemäß der in §. 40 angegebenen Eintheilung der §. 90. Räder wären schließlich noch die sogenannten Kettenräder zu besprechen. Dieselben stimmen mit den Riemscheiben darin überein, daß die Bewegungsübertragung wie bei jenen nicht durch directe Berührung der Radflächen, sondern mittelst eines Zwischengliedes, nämlich einer Kette, bewirkt wird. Mit den Zahnradern andererseits haben sie das Vorhandensein gewisser zahnartiger Vorsprünge gemein, welche, zwischen die Lücken der Kettenglieder tretend, unter allen Umständen die Bewegungsübertragung sichern, indem durch die Zähne ein Gleiten der Ketten über die Rollenumfänge verhindert wird, wie es beim Riemenbetrieb in Folge ungenügender Spannung eintreten kann. Demgemäß erfordert die Kette auch keine besondere Anspannung, und es werden daher die an den Zapfen der Kettenräder auftretenden Reibungen nur durch die zu übertragende Kraft, also durch den einfachen Kettenzug hervorgerufen, da das nicht treibende Kettenstück ganz schlaff sein kann.

Die Treibketten werden in verschiedener Form und zwar immer aus Schmiedeeisen ausgeführt, welches wegen der unpermeidlichen kleinen Stöße, denen diese Ketten fortwährend ausgesetzt sind, von sehniger möglichst zäher Beschaffenheit sein muß. Die gewöhnliche Lastkette, Fig. 309 und 310, mit elliptischen Gliedern, denen man zur Versteifung nach Brunton auch

Fig. 309.



Fig. 310.

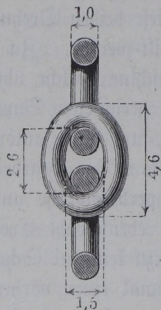
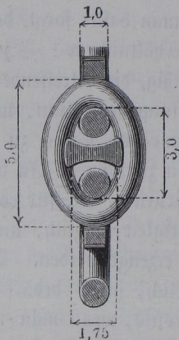


Fig. 311.



gußeiserne Querstege, Fig. 311, giebt, findet für die eigentlichen Kettenräder zur Bewegungsübertragung wenig Verwendung. Bei Winden und Hebevorrichtungen, für welche diese Ketten meist gebraucht werden, giebt man den Rollen und Trommeln in der Regel glatte Oberflächen ohne Hervor-

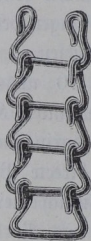
Fig. 312.



Fig. 313.



Fig. 314.



ragungen, und machen hiervon etwa nur die Differentialflaschenzüge eine Ausnahme. Auch die Ketten nach Fig. 312 wendet man mehr für Rollenzüge, z. B. zum Bewegen der Rauchschieber von Dampfkesselfeuerungen u., an, wogegen die in Fig. 313 und 314 abgebildeten Ketten als eigentliche Treibketten mehrfach Verwendung finden. Die letztere von Baucanson angegebene ist, wie leicht zu erkennen, nur zur Ueber-

tragung schwacher Kräfte geeignet, da die Fugen der Glieder nur durch Umbiegungen des Drahts ohne Schweißung hergestellt sind. Wegen der leichten Herstellung und sicheren Auflagerung auf die Rollenumfänge ist diese bandförmige Kette jedoch sehr beliebt und z. B. vielfach bei den Krakenmaschinen der Wollspinnereien gebräuchlich, wo dieselbe Treibkette zugleich einem System von mehreren Walzen die Bewegung mittheilt. Dieser Kette nahe

steht die Bandkette von Proché, Fig. 315, aus geschweißten Ringen von Rundeisen und flachen Blechgliedern mit umgebogenen Enden bestehend.

Fig. 315.



Fig. 316.

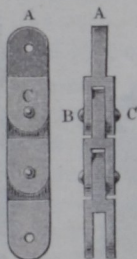


Fig. 317.

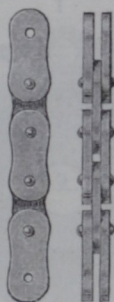
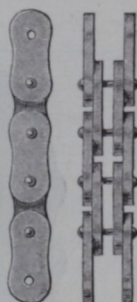


Fig. 318.

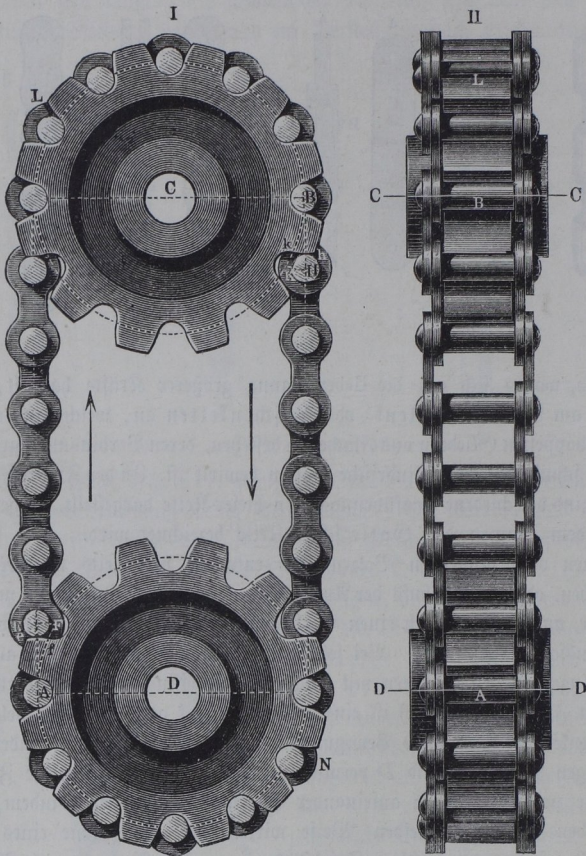


Da, wo es sich um die Uebertragung größerer Kräfte handelt, wendet man am besten die Gelenk- oder Laschenketten an, welche aus einfachen oder doppelten Gliedern aus Flacheisen bestehen, deren Verbindung durch gleichfalls schmiedeeiserne cylindrische Bolzen bewirkt ist. In den Figuren 316 bis 318 sind verschiedene Ausführungsarten dieser Kette dargestellt, die gewöhnlich mit dem Namen der Galle'schen Kette bezeichnet wird. Die schmiedeeisernen oder stählernen Bolzen sind entweder beiderseits mit Nietköpfen versehen, oder auch behufs der Auswechselung nur auf einer Seite mit einem Kopfe, andererseits durch einen Vorsteckstift oder eine Schraubenmutter am Herausfallen verhindert. Bei sehr soliden Ausführungen werden auch wohl die Augen in den Gliedern mit Stahl oder Messingringen ausgefüttert.

In Fig. 319 (a. f. S.) ist ein Kettenräderwerk abgebildet, bei welchem die Laschenkette *ALBN* die Bewegungsübertragung zwischen den beiden zwölfzähligen Rädern *C* und *D* vermittelt. Die Zähne treten in die Zwischenräume zwischen je zwei aufeinander folgenden Bolzen ein, indem sie auf dieselben etwa in derselben Weise wirken, wie die Zähne eines Stirnrades auf die cylindrischen Triebstöcke einer Zahnstange, vergl. Fig. 249, §. 72. Man hat daher die Zähne der Räder nach den betreffenden Äquidistanten *ef*, *kh* der Kreisevolventen *EF*, *KH* zu profiliren. Kettenräder werden nur für parallele Axen angewendet. Ein großer Uebelstand aller Kettenräder besteht darin, daß die Glieder mit der Zeit durch den fortwährenden Zug sichrecken und daher ihre Länge bald nicht mehr mit der Theilung der Räder übereinstimmt. In Folge davon tritt zwischen den Radzähnen und den Bolzen der Kette todter Gang ein, welcher zu entsprechenden kleinen Stößen Veranlassung giebt, deren schädliche Einwirkung

um so erheblicher wird, je größer die Geschwindigkeit der Kette ist. Aus diesem Grunde wendet man Kettenräder nur selten und meist nur bei geringen

Fig. 319.



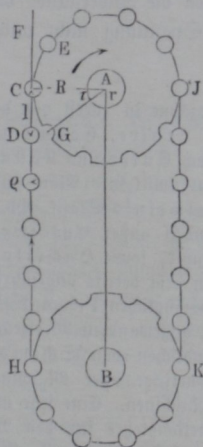
Geschwindigkeiten an, und ist es, um den gedachten Uebelstand möglichst herabzuziehen, gerathen, die Kettenglieder und Bolzen so kräftig zu construiren, daß die pro Querschnittseinheit darauf entfallende Spannung nur eine verhältnißmäßig kleine ist. Die Bestimmung der Abmessungen, welche man den Kettengliedern und ihren Bolzen zu geben hat, bietet unter Zugrundelegung einer höchstens als zulässig erachteten specifischen Spannung des

Materials nach den in Theil I gegebenen Regeln der absoluten resp. Abseerungsfestigkeit keine Schwierigkeiten dar.

Außer als Transmissionsmittel zum Betrieb von Axen kommen Ketten von geeigneter Form häufiger bei gewissen Arbeitsmaschinen, z. B. bei Baggermaschinen, Elevatoren, Tuchrahmmaschinen u., vor, hinsichtlich deren Betrachtung auf die zugehörigen Stellen verwiesen werden muß.

Die mit einem Kettenräderwerke verbundenen Reibungen setzen sich zusammen aus der Zapfenreibung, der Reibung zwischen den Zähnen und Bolzen und derjenigen, welche zwischen den Bolzen und Kettengliedern in den Augen der letzteren an den Umbiegungsstellen eintritt, wo die Ketten aus der geraden Richtung abweichen, um sich dem Umfange der Rollen anzuschmiegen. Bezeichnet R den Rollenhaltmesser AC , Fig. 320, r denjenigen

Fig. 320.



der Axenzapfen und q den des Kettenbolzens, ferner l die Länge $DC = CE$ eines Kettengliedes von Mitte zu Mitte der Bolzen, so ergeben sich die durch eine am Umfange der Rolle A wirkende Umfangskraft P hervorgerufenen Reibungen an dieser Rolle wie folgt:

Die Zapfenreibung an A beträgt auf den Punkt C reditirt bekanntlich:

$$F_1 = \varphi P \frac{r}{R}.$$

Die Zahnreibung zwischen den Zähnen und den Kettenbolzen ergibt sich nach §. 79, wenn n die Zähnezahl bezeichnet, zu:

$$F_2 = \pi \varphi P \frac{1}{n}.$$

Um die Reibung der Glieder zu bestimmen, bedenke man, daß bei einer Bewegung der Kette um die Gliedlänge l das Glied DC in die Lage CE gelangt, also um den Winkel $FCE = \frac{1}{2} CAG = \frac{1}{2} \tau$ gedreht wird, unter τ den Theilwinkel $\frac{2\pi}{n}$ verstanden. Der entsprechende Widerstand beträgt daher

$$F_3 = \frac{\varphi P q}{l} \cdot \frac{\tau}{2} = \frac{\varphi P q}{2R}, \text{ da } \tau = \frac{l}{R} \text{ ist.}$$

Man hat daher die gesammten an der Rolle A auftretenden Reibungswiderstände

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \varphi P \left(\frac{r}{R} + \frac{\pi}{n} + \frac{q}{2R} \right).$$

Ebenso sind die an der Rolle B an den Zapfen und an der Ablassstelle H der Kette auftretenden Widerstände gegeben durch

$$F' = \varphi P \left(\frac{r'}{R'} + \frac{\pi}{n'} + \frac{\varrho}{2R'} \right),$$

wenn mit r', R' und n' die entsprechenden Größen dieser Rolle bezeichnet werden. Setzt man der Kürze wegen die obigen Parenthesen

$$\frac{r}{R} + \frac{\pi}{n} + \frac{\varrho}{2R} = f \quad \text{und} \quad \frac{r'}{R'} + \frac{\pi}{n'} + \frac{\varrho}{2R'} = f',$$

so sind die gesammten Widerstände des Kettenbetriebs ausgedrückt durch

$$F = \varphi P (f + f')$$

oder bei gleichen Rollen

$$F = 2 \varphi P f.$$

An der Ablassstelle J und der Auflaßstelle K können die Widerstände vernachlässigt werden, da das Kettenstück JK einer Spannung nicht unterworfen ist.

Literatur. Die geometrische Construction der Radzähne ist zuerst von dem dänischen Astronomen Römer, nächstdem aber von Lahire, Camus und Deparcieuz gezeigt worden. Ueberdies haben sich auch Euler und Kästner damit beschäftigt, die besten Zahnformen für Räder auszumitteln. Man findet die hierauf bezüglichen Schriften angeführt in Gytelwein's Statik, Bd. I. Ausführlich über die Verzeichnung der Radzähne handelt außer Gytelwein auch noch Gerstner im dritten Bande seiner Mechanik, sowie Hachette in seinem *Traité élém. de machines*, ferner Olivier in dem bereits angeführten Werke (deutsch von Schnufe) und Willis in den vorzüglichen *Principles of Mechanism*. Siehe auch Verdam's Grundsätze der angewandten Werkzeugwissenschaft und Mechanik, Thl. II (aus dem Holländischen von Schmidt), Gaidl's Maschinenkunde und Salzenberg's Vorträge über Maschinenbau; ebenso wie Wiebe's Lehre von den einfachen Maschinen. Eine sehr ausführliche und eingehende Behandlung giebt die Constructionslehre für den Maschinenbau von Moll und Reuleaux. Das Nothwendigste für den Constructeur ist in Morin's *Aide-mémoire* und in Redtenbacher's Resultaten für den Maschinenbau enthalten. Von den Rädern handeln fast sämtliche Werke über allgemeinen Maschinenbau und Constructionslehre, so z. B. das von H. v. Reiche. Die Maschinenfabrikation, 2. Auflage 1876. Die in technischen Journalen zerstreute Literatur über Räder ist sehr ausgedehnt.