klein ausfällt, und vernachlässigt werden kann, darf man immer nach den Festigkeitsformeln rechnen.

Beispiele. 1. Wie stark hat man die Trommelaxe einer Krahnwinde zu machen, bei welcher die Kette einen Zug von 4000 Kilogramm an dem Trommelhalbmesser von 0,20 Meter ausübt?

Da bei der geringen Länge der Windetrommel der Verdrehungswinkel nicht in Betracht kommt, so kann man den Durchmesser wählen

$$d = 1,02 \sqrt[3]{4000 \,.\, 200} = 94,7 \text{ Millimeter.}$$

2. Welche Stärke hat man der schmiedeeisernen Axe einer Turbine zu geben, die bei minutlich 45 Umdrehungen ein Arbeitsmoment von 30 Pferden übertragen soll?

Es ist hier nach der Elasticitätsformel zu machen:

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{30}{45}} = 108,5 \text{ Millimeter.}$$

3. Welchen Durchmesser hat man einer hölzernen Göpelwelle zu geben, welche die Arbeit von vier Pferden aufnehmen soll, die bei mittlerer Geschwindigkeit zwei Mal in der Minute herumgehen?

Vernachlässigt man die Inanspruchnahme durch biegende Kräfte, so ergiebt sich mit Rücksicht auf Verdrehung ein erforderlicher Durchmesser von:

$$d = 255 \sqrt[4]{\frac{4}{2}} = 304,8 \text{ Millimeter.}$$

§. 16. **Verdrehung und Biegung von Wellen.** Wenn eine Axe, welche durch ein gewisses Kraftmoment auf Torsion in Anspruch genommen wird, außerdem noch biegenden Kräften unterworfen ist, welche nicht so klein sind, um sie ohne erheblichen Fehler vernachlässigen zu können, so muß die Wellenstärke nach den Regeln der zusammengesetzten Festigkeit bestimmt werden, wie sie Theil I, §. 284 entwickelt worden sind. Dieser Fall kommt vornehmlich bei den Axen von Wasserrädern und Dampfmaschinen vor. Bezeichnet hierbei $M_1$ das auf Biegung und $M_2$ das auf Verdrehung wirkende Moment für irgend einen Querschnitt, dessen Trägheitsmoment $W$ sein mag, so findet man die erforderlichen Querdimensionen dieses Querschnitts durch die Beziehung (s. Thl. I, §. 284):

$$\tfrac{3}{8} M_1 + \tfrac{5}{8} \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = k \frac{W}{l},$$

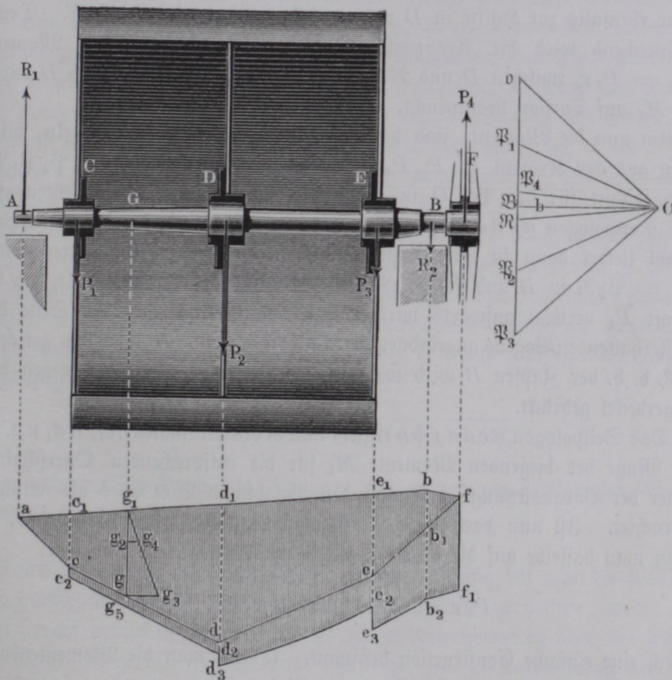
worin $k$ die höchstens zulässige Biegungsspannung bedeutet. Um das Biegungs- und Torsionsmoment und daraus den obigen Ausdruck

$$\tfrac{3}{8} M_1 + \tfrac{5}{8} \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$

für verschiedene Querschnitte zu bestimmen, kann man sich wieder mit Vortheil der graphostatischen Methode bedienen, wie in dem folgenden Beispiele dargethan werden soll.

Es sei $AB$, Fig. 56, die Axe eines oberschlächtigen Wasserrades, auf welcher in $C$, $D$ und $E$ die Rosetten für drei Armsysteme befestigt sind,

Fig. 56.




während bei $F$ ein Zahnrad angebracht ist, welches die Kraft auf das Getriebe einer Transmissionswelle überträgt. Das Gewicht des Rades und des die Schaufeln erfüllenden Wassers wird durch die Armsysteme bei $C$, $D$ und $E$ auf die Axe übertragen, und mögen die in diesen Punkten auf die Welle wirkenden Kräfte beziehungsweise mit $P_1$, $P_2$ und $P_3$ bezeichnet werden. Ist das mittlere Armsystem in $D$ symmetrisch gegen die beiden in $C$ und $E$ gelegen, so darf man annehmen, daß in $D$ die Hälfte und in $C$ und $D$ je ein Viertel des ganzen Rad- und Wassergewichtes wirksam ist. Wenn die aufgenommene Wasserkraft durch das Rad $F$, dessen Halbmesser $r$ sein möge, übertragen wird, wobei zwischen den Zähnen in $F$ ein Druck $P_4$ auftreten möge, so wird dieser Druck $P_4$ als biegende Kraft ebenfalls auf die Axe wirken, und wird letztere außerdem noch einem Torsionsmomente $M_2 = P_4 r$ ausgesetzt sein. Hierbei muß man bemerken, daß nicht die ganze Axe zwischen $F$ und $A$, sondern natürlich nur das Stück zwischen $F$ und $C$ auf Verdrehung angegriffen wird, und zwar auch dieses Stück nicht in allen Punkten in gleicher Stärke. Man muß nämlich annehmen, daß die Wirkung der Wasserkraft durch die drei Armsysteme $C$, $D$ und $E$ auf die Axe übergeht, und zwar ebenfalls zur Hälfte in $D$ und zu je ein Viertel in $C$ und $F$. Dementsprechend wird die Axe zwischen $E$ und $F$ durch das ganze Moment $M_2 = P_4 r$, zwischen $D$ und $E$ durch $^3/_4 M_2$ und zwischen $C$ und $D$ durch $^1/_4 M_2$ auf Torsion beansprucht.

Um nun die Momente und daraus die Dimensionen zu ermitteln, bilde man aus den Kräften $P_1, P_2, P_3$ und $P_4$ das Kräftepolygon $o\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_3\,\mathfrak{P}_4$ und zeichne für den Pol $O$ in einem Abstande gleich der Momentenbasis das Seilpolygon $a\,c\,d\,e\,f\,b\,a$. Der mit der Schlußlinie $b\,a$ parallele Polstrahl liefert dann in dem Schnittpunkte $\mathfrak{R}$ die beiden Auflagerreactionen $R_2 = \mathfrak{P}_4\,\mathfrak{R}$ in $B$ und $R_1 = \mathfrak{R}\,o$ in $A$. In vorliegendem Falle, wo die Kraft $P_4$ vertical aufwärts wirkt (wenn das Getriebe auf der Seite des wasserhaltenden Bogens angeordnet ist), fällt die Reaction $R_2$ abwärts gerichtet aus, d. h. der Zapfen $B$ wird während des Betriebes nach oben gegen den Lagerdeckel gedrückt.

Das Seilpolygon $a\,c\,d\,e\,f\,b\,a$ ergiebt nun in den Ordinaten $c\,c_1$, $d\,d_1$ u. s. w. die Maße der biegenden Momente $M_1$ für die entsprechenden Querschnitte, unter der Voraussetzung, daß man den Polabstand $\mathfrak{B}\,O = b$ als Einheit betrachtet. Ist nun das ganze Torsionsmoment $M_2 = P_4 r$ bekannt, so kann man dasselbe auf die gleiche Basis $b$ reduciren, indem man setzt:

$$P_4 r = P_t b, \text{ und } P_t = P_4 \frac{r}{b}$$

durch eine einfache Construction bestimmt. (Hätte man die Momentenbasis $\mathfrak{B}\,O = b$ gleich dem Halbmesser $r$ des Rades $F$ angenommen, so erhielte man $P_t = P_4$.)

Kennt man nun $P_t$, d. h. diejenige Kraft, welche an einem Hebelsarm gleich $\mathfrak{B}\,O = b$ einem Torsionsmomente $M_2 = P_4 r$ entspricht, so findet man leicht das Moment der ganzen Inanspruchnahme durch Construction des Ausdruckes

$$^3/_8 M_1 + {}^5/_8 \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

Um diese Construction für irgend einen Querschnitt, z. B. durch $G$, auszuführen, theile man die zugehörige Ordinate $g\,g_1$ des Seilpolygons in $g_2$ so, daß $g_1\,g_2 = {}^3/_8\,g\,g_1 = {}^3/_8 M_1$ ist, mache $g\,g_3$ senkrecht zu $g\,g_1$ und gleich $^1/_4 P_t$ also $^1/_4 M_2$, ziehe $g_3\,g_1$ und theile letztere Linie in $g_4$ so, daß

$$g_4 g_3 = {}^5/_8\, g_1 g_3 = {}^5/_8 \sqrt{M_1^2 + ({}^1/_4 M_2)^2}$$

wozu man nur $g_2 g_4$ parallel mit $g g_3$ zu ziehen hat. Trägt man nun $g_4 g_3$ in $g_2$ als $g_2 g_5$ an, so erhält man in $g_1 g_5$ das ideale biegend anzunehmende Moment

$${}^3/_8\, M_1 + {}^5/_8 \sqrt{M_1^2 + ({}^1/_4 M_2)^2},$$

natürlich immer unter der Voraussetzung, daß der Polabstand $\mathfrak{B}\, O = b$ als Momenteneinheit zu Grunde gelegt werde. Führt man diese Construction für eine genügende Anzahl von Punkten aus, so erhält man das combinirte Seilpolygon $a c c_2 d_2 d_3 e_2 e_3 b_2 f_1 f b a$, von welchem der obere Theil $a c d e f b$ den biegenden Kräften $P_1, P_2, P_3$ und $P_4$ entspricht, während der untere Theil $c c_2 d_2 d_3 e_2 e_3 b_2 f_1 f e d c$ den Einfluß des verdrehenden Momentes $M_2$ erkennen läßt. Daß der letztere Zweig des Seilpolygons bei $d$ und $e$ die plötzlichen Zunahmen $d_2 d_3$ und $e_2 e_3$ zeigt, hängt natürlich mit dem oben erläuterten Uebergang der Kraft in die Welle bei $C$, $D$ und $E$ zusammen, und es ist dementsprechend erforderlich, die angegebene Construction $g g_1 g_3$ so auszuführen, daß die horizontale Kathete $g g_3$ zwischen $c$ und $d$ gleich ${}^1/_4\, P_t$, zwischen $d$ und $e$ gleich ${}^3/_4\, P_t$ und zwischen $e$ und $f$ gleich $P_t$ gemacht werde. Die Bestimmung der zulässigen Querschnittsdimensionen folgt nun in der mehrfach besprochenen Weise mittelst der höchstens zulässigen Biegungsspannung $k$ durch die Formel:

$$k \frac{W}{e} = {}^3/_8\, M + {}^5/_8 \sqrt{M_1^2 + M_2^2},$$

wo die rechte Seite durch die Ordinaten des gefundenen combinirten Seilpolygons gegeben ist.

**Festigkeit der Wellen gegen Stösse.** Häufig hat man die Wellen auch hinsichtlich ihrer Festigkeit gegen lebendige Kräfte zu prüfen, wobei es nicht sowohl darauf ankommt, daß die größte Faserspannung oder der Verdrehungswinkel gewisse Werthe nicht übersteige, sondern darauf, daß das in der Welle vorhandene Material in Folge der elastischen Formänderung eine hinreichend große mechanische Arbeit zu leisten vermöge. §. 17.

Dieser Fall der Anstrengung der Welle durch lebendige Kräfte kommt z. B. bei jeder plötzlichen Geschwindigkeitsänderung, also bei jedem Stoße vor. Wenn z. B. die Daumenwelle eines Schwanzhammers in schneller Bewegung ist, und ein Daumen derselben trifft plötzlich auf den Schwanz des freigemachten Hammers, so wird die Welle einem Stoße ausgesetzt, welchem sie nur durch eine genügende Masse widerstehen kann. Bezeichnet in diesem Falle $M$ die auf die Angriffsstelle (Daumen) reducirte Masse der Welle incl. des treibenden Wasserrades, und $M_1$ die ebendahin reducirte Masse des Hammers mit Helm und Hülse, so ist, wenn $c$ die Geschwindigkeit des