$$75000\, N = P 2 a \pi \frac{n}{60}$$

gegeben.

Anders verhält sich die Sache, wenn der verdrehende Druck P, oder der Hebelsarm a, oder beide Größen zugleich von veränderlichem Werthe sind, wie dies z. B. bei der Kurbel einer Dampfmaschine der Fall ist. Hier ändert bei der Expansion des Dampfes nicht nur der Kolbendruck seine Größe, sondern auch der wirksame Arm desselben durchläuft allmälig alle Werthe von Null im Todtpunkte der Kurbel bis zum vollen Kurbelhalbmesser. Wollte man daher der Berechnung der Kurbelwelle hier den Werth $\frac{N}{n}$ zu Grunde legen, so würde man eine zu geringe Wellenstärke erhalten, denn dem Ausdrucke $\frac{N}{n}$ entspricht hier nur ein durchschnittlicher Mittelwerth des Torsionsmomentes. In solchem Falle hat man der Rechnung immer das Maximum des Verdrehungsmomentes zu Grunde zu legen, welches in jedem Falle durch eine besondere Untersuchung der Verhältnisse der Kurbel und der Dampfwirkung zu ermitteln ist. Aehnliche Betrachtungen gelten natürlich nicht nur für Dampfmaschinen, sondern allgemein für das Kurbelgetriebe, wie es z. B. zur Bewegung von Pumpen ꝛc. Verwendung findet.

Verdrehungswinkel. Die im vorigen Paragraph gefundenen Formeln zur Bestimmung der Wellenstärken nehmen keine Rücksicht auf den Torsionswinkel, indem sie nur mit Bezug darauf entwickelt sind, daß die größte Faserspannung t einen gewissen zulässigen Werth nicht übersteigt. Bei dünnen und besonders bei langen Wellen kann nun aber der Verdrehungswinkel einen Betrag annehmen, wie er mit einem sicheren Betriebe nicht verträglich ist, und es genügt daher in solchen Fällen nicht, die Wellenstärke nach obigen Festigkeitsformeln zu bestimmen, vielmehr wird man dieselbe mit Rücksicht auf eine höchstens zulässige Größe des Verdrehungswinkels ermitteln müssen. Man kann nach Reuleaux die Größe dieses Winkels in Graden für Wellen, deren Länge nicht größer als 3 Meter ist, zu $\alpha^0 = \frac{L}{4}$ annehmen, wenn L die Länge der Welle in Metern bezeichnet, also §. 15.

$$\alpha^0 = \frac{l}{4000} = 0{,}00025\, l\text{*}),$$

---

*) Nach Redtenbacher darf der Verdrehungsmittelpunkt $\frac{l}{397}$ Grad betragen, wenn l in Centimetern gegeben ist, also $\alpha^0 = 0{,}000253 \,.\, l$ Millimeter.

wenn l in Millimetern gegeben ist. In Theil I, §. 269 war die Formel gefunden worden:

$$Pa = \frac{\alpha W C}{l},$$

worin α den Verdrehungswinkel der Welle als Bogen vom Halbmesser 1, also die Länge $\frac{\alpha^0 \pi}{180}$ und C den Elasticitätsmodul bedeutet. Führt man den Winkel in Graden ein, so geht obige Formel daher über in

$$Pa = \frac{\alpha^0 \pi W C}{180 \,.\, l},$$

und speciell für den kreisförmigen Querschnitt, für welchen

$$W = \frac{\pi d^4}{32}$$

ist:

$$Pa = \frac{\alpha^0 \pi^2 d^4 C}{180 . 32 . l} = 0{,}00171 \frac{\alpha^0 d^4 C}{l}.$$

Der Elasticitätsmodul C der Schubfestigkeit ist nach dem Früheren (Theil I, §. 260) gleich $^2/_5 E$ zu setzen, wenn E den Elasticitätsmodul der absoluten Festigkeit bezeichnet, und man kann daher setzen:

für Schmiedeeisen $C = 8000$;
für Gußeisen $C = 4000$;
für Holz $C = 400$.

Führt man diese Werthe ein, und nimmt

$$\alpha^0 = \frac{l}{4000} = 0{,}00025\, l$$

an, so erhält man für Schmiedeeisen:

$$d = \sqrt[4]{\frac{l \,.\, Pa}{0{,}00171 \,.\, 0{,}00025\, l \,.\, 8000}} = 4{,}13 \sqrt[4]{Pa},$$

für Gußeisen:

$$d = \sqrt[4]{\frac{l \,.\, Pa}{0{,}00171 \,.\, 0{,}00025\, l \,.\, 4000}} = 4{,}92 \sqrt[4]{Pa},$$

für Holz:

$$d = \sqrt[4]{\frac{l \,.\, Pa}{0{,}00171 \,.\, 0{,}00025\, l \,.\, 400}} = 8{,}75 \sqrt[4]{Pa}.$$

Will man die Dimensionen wieder durch die Arbeitsleistung N Pferdekräfte und die Umdrehungszahl n bestimmen, so hat man nur nöthig wieder

$$Pa = 716200 \frac{N}{n}$$

einzuführen und erhält:

für Schmiedeeisen:

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{P}{n}},$$

für Gußeisen:

$$d = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

für Holz:

$$d = 255 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$

Um zu erkennen, in welchem Falle die Festigkeitsformel denselben Werth für d ergiebt wie die Elasticitätsformel, hat man nur nöthig, die beiden Ausdrücke für d einander gleich zu setzen und daraus den betreffenden Werth von Pa oder $\frac{N}{n}$ zu ermitteln. Dies ausgeführt giebt für Schmiedeeisen:

$$d_0 = 91{,}3 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

woraus

$$\frac{N}{n} = \left(\frac{120}{91{,}3}\right)^{12} = 26{,}6,$$

für welche Werthe aus beiden Formeln der Durchmesser $d = 273$ Millimeter folgt. Ebenderselbe Werth für d ergiebt sich auch für gußeiserne Wellen, wenn man setzt:

$$d_0 = 115 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$

Hieraus folgt, daß für alle eisernen Wellen unter dieser Stärke $d_0 = 273$ Millimeter die Elasticitätsformeln die größeren Werthe geben, also nach ihnen die Stärken zu bestimmen sind, während für größere Durchmesser die Bestimmung nach den Festigkeitsformeln zu treffen ist.

Für hölzerne Wellen ergiebt sich der entsprechende Grenzwerth für d_0 aus:

$$d = 179 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} = 255 \sqrt[4]{\frac{N}{n}},$$

wofür

$$\frac{N}{n} = \left(\frac{255}{179}\right)^{12} = 73{,}5,$$

welcher Werth nach beiden Formeln $d = 749$ Millimeter ergiebt. Da größere Durchmesser wohl überhaupt nicht vorkommen, so wird man gut thun, hölzerne Wellen immer nach den Elasticitätsformeln (Verdrehung) zu berechnen.

Bei sehr kurzen Wellen, wie bei den Handkurbeln für Winden ꝛc., bei denen der Verdrehungswinkel α wegen der geringen Länge überhaupt nur klein ausfällt, und vernachlässigt werden kann, darf man immer nach den Festigkeitsformeln rechnen.

Beispiele. 1. Wie stark hat man die Trommelaxe einer Krahnwinde zu machen, bei welcher die Kette einen Zug von 4000 Kilogramm an dem Trommelhalbmesser von 0,20 Meter ausübt?

Da bei der geringen Länge der Windetrommel der Verdrehungswinkel nicht in Betracht kommt, so kann man den Durchmesser wählen

$$d = 1{,}02 \sqrt[3]{4000 \,.\, 200} = 94{,}7 \text{ Millimeter.}$$

2. Welche Stärke hat man der schmiedeeisernen Axe einer Turbine zu geben, die bei minutlich 45 Umdrehungen ein Arbeitsmoment von 30 Pferden übertragen soll?

Es ist hier nach der Elasticitätsformel zu machen:

$$d = 120 \sqrt[4]{\frac{30}{45}} = 108{,}5 \text{ Millimeter.}$$

3. Welchen Durchmesser hat man einer hölzernen Göpelwelle zu geben, welche die Arbeit von vier Pferden aufnehmen soll, die bei mittlerer Geschwindigkeit zwei Mal in der Minute herumgehen?

Vernachlässigt man die Inanspruchnahme durch biegende Kräfte, so ergiebt sich mit Rücksicht auf Verdrehung ein erforderlicher Durchmesser von:

$$d = 255 \sqrt[4]{\frac{4}{2}} = 304{,}8 \text{ Millimeter.}$$

§. 16. **Verdrehung und Biegung von Wellen.** Wenn eine Axe, welche durch ein gewisses Kraftmoment auf Torsion in Anspruch genommen wird, außerdem noch biegenden Kräften unterworfen ist, welche nicht so klein sind, um sie ohne erheblichen Fehler vernachlässigen zu können, so muß die Wellenstärke nach den Regeln der zusammengesetzten Festigkeit bestimmt werden, wie sie Theil I, §. 284 entwickelt worden sind. Dieser Fall kommt vornehmlich bei den Axen von Wasserrädern und Dampfmaschinen vor. Bezeichnet hierbei M_1 das auf Biegung und M_2 das auf Verdrehung wirkende Moment für irgend einen Querschnitt, dessen Trägheitsmoment W sein mag, so findet man die erforderlichen Querdimensionen dieses Querschnitts durch die Beziehung (s. Thl. I, §. 284):

$$\tfrac{3}{8} M_1 + \tfrac{5}{8} \sqrt{M_1^2 + M_2^2} = k \frac{W}{l},$$

worin k die höchstens zulässige Biegungsspannung bedeutet. Um das Biegungs- und Torsionsmoment und daraus den obigen Ausdruck

$$\tfrac{3}{8} M_1 + \tfrac{5}{8} \sqrt{M_1^2 + M_2^2}$$